Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,

профиль «Инженерные науки»,

Решения и критерии оценивания

Задач олимпиадной части финала конкурса 2020-2021 учебного года

10 класс

1. Семь учеников класса получают по одной двойке каждые два дня учебы, а девять других учеников – по двойке за три дня каждый. Остальные ученики класса двоек не получают никогда. С понедельника по пятницу в журнале появилось 30 новых двоек. Сколько новых двоек появится в классном журнале в субботу?

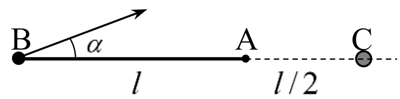
2. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

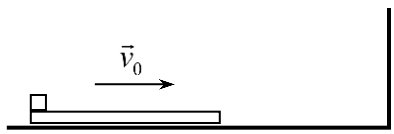
3. Через вершину B правильного треугольника ABC проведена прямая L, пересекающая продолжение стороны AC за точку C. На прямой L отложены отрезки BM и BN по длине равные стороне треугольника ABC. Прямые MC и NA имеют общую точку D и пересекают стороны AB и BC треугольника в точках P и Q соответственно. Доказать, что около четырехугольника $PBQD$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если длина отрезка PQ равна $\sqrt{3}$.

4. Запаянный горизонтальный цилиндрический сосуд длиной l разделен на две части подвижной перегородкой. С одной стороны от перегородки содержится 1 моль кислорода, с другой – 1 моль гелия и 1 моль азота, а перегородка находится в равновесии. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия и остается непроницаемой для остальных газов. Найти перемещение перегородки к моменту установления равновесия. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение всего процесса.

5. В точке А, находящейся на горизонтальной поверхности, закреплен конец лёгкой упругой нерастяжимой нити длиной l. Второй конец нити прикреплен к точечному массивному телу. В начальный момент нить натянута, тело находится в точке В. На той же поверхности на прямой, являющейся продолжением начального положения нити, на расстоянии $l/2$ от точки А сделана небольшая лунка (см. рисунок, вид сверху; лунка находится в точке С). Под каким углом α к начальному положению нити нужно толкнуть тело, чтобы оно попало в лунку, натянув нить один раз (не считая начального положения)? Трение отсутствует. Ненатянутая нить сопротивления движению тела не оказывает.



6. По гладкой горизонтальной поверхности перпендикулярно вертикальной стенке со скоростью v_0 движется доска длиной l с расположенным на ее конце точечным телом. Происходит абсолютно упругий удар доски о стенку. Считая, что удар происходит практически мгновенно, определить при каком коэффициенте трения между телом и доской доска остановится на максимальном расстоянии от стенки. Чему равно это максимальное расстояние? Массы доски и тела равны.



Решения

Задача 1. Семь учеников класса получают по одной двойке каждые два дня учебы, а девять других учеников – по двойке за три дня каждый. Остальные ученики класса двоек не получают никогда. С понедельника по пятницу в журнале появилось 30 новых двоек. Сколько новых двоек появится в классном журнале в субботу?

Ответ: 9

Решение. В период с понедельника по субботу (шесть дней) в журнале появятся по 3 двойки от каждого ученика первой группы (из семи человек) и по две двойки от каждого из 9 учеников второй группы. Всего за учебную неделю число новых двоек равно $7\cdot 3+9\cdot 2=39.$. Тогда за субботу в журнале появится $39-30=9$ новых двоек.

Задача 2. Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Решение. Пусть $b\ge a$. Разделим неравенство на $\sqrt{a}$:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\ge 1+\sqrt{\frac{b}{a}}\to\sqrt{\frac{b}{a}}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-1\right)\ge 1-\sqrt{\frac{a}{b}}\to\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\ge\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}}\to$$

$$\to\frac{b}{a}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\ge\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\to\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\frac{b}{a}-1\right)\ge 0$$

Последнее неравенство верное. Случай $a\ge b$ аналогичен.

Задача 3. Через вершину B правильного треугольника ABC проведена прямая L, пересекающая продолжение стороны AC за точку C. На прямой L отложены отрезки BM и BN по длине равные стороне треугольника ABC. Прямые MC и NA имеют общую точку D и пересекают стороны AB и BC треугольника в точках P и Q соответственно. Доказать, что около четырехугольника $PBQD$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если длина отрезка PQ равна $\sqrt{3}$.

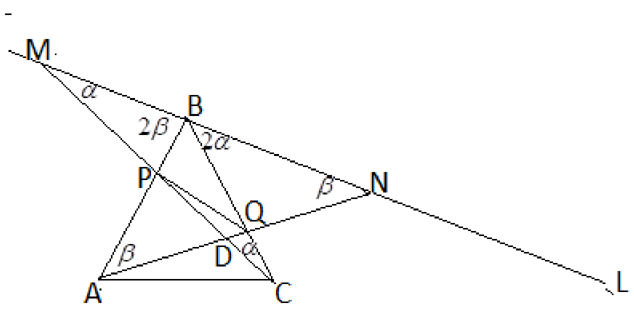
Ответ: 1.

Решение. Треугольники MBC и ABN равнобедренные, поэтому

$$\angle BMC=\angle BCM=\alpha\to\angle NBC=2\alpha,\ \angle BAN=\angle BNA=\beta\to\angle ABM=2\beta$$

$$2\alpha+2\beta+60^0=180^0\to\alpha+\beta=60^0$$

В треугольнике MDN угол PDQ равен $180^0-\alpha-\beta=120^0$ и сумма противоположных углов четырехугольника $PBQD$ равна 180^0 поэтому около него можно описать окружность.

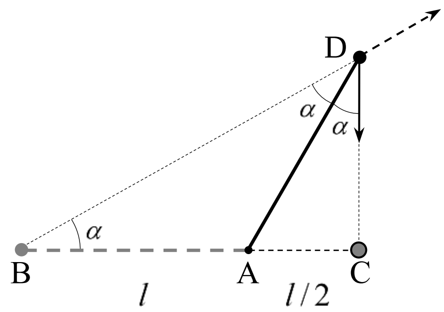


По теореме синусов $PQ=2R\sin 120^0=\sqrt{3}\to R=1.$

Задача 4. Из условия равновесия перегородки (равенство давлений справа и слева от нее), находим, что в начальный момент она расположена на расстоянии $2l/3$ и $l/3$ от концов сосуда. После того, как гелий распределится по сосуду равномерно, его парциальные давления справа и слева от перегородки (независимо от ее расположения) будут равны. Поэтому перегородка расположится так, что парциальные давления кислорода с одной стороны и азота с другой будут одинаковы. А поскольку количества вещества кислорода и азота одинаковы, она расположится посередине сосуда. Следовательно, перемещение перегородки после перераспределения гелия составляет

$$\Delta x = \frac{2l}{3} - \frac{l}{2} = \frac{l}{6}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование законов Клапейрона-Менделеева и Дальтона – 0,5 балла
2. Правильно найдено начальное положение перегородки – 0,5 балла
3. Правильное условие равновесия перегородки во втором случае – 0,5 балла
4. Правильно найдено конечное положение перегородки и ее перемещение – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям



Задача 5. Сразу после толчка нить перестанет быть натянутой, и не будет оказывать сопротивления движению тела. Поэтому тело будет двигаться прямолинейно под углом α к первоначальному направлению нити (вдоль прямой BD на рисунке) с постоянной скоростью до того момента, когда нить снова натянется в точке D (на рисунке начальное положение нити показано светлым пунктиром). В этот момент на короткое время нить натянется, возникнет сила натяжения, которая изменит скорость тела. При этом, поскольку сила натяжения направлена вдоль нити, она изменяет только составляющую скорости тела, направленную вдоль нити, но не изменяет составляющую скорости, перпендикулярную нити. Поскольку нить упругая, то потерь механической энергии тела после натяжения нити не происходит, и составляющая скорости тела, направленная вдоль нити, после ее растяжения меняется на противоположную. А это значит, что углы между скоростью тела и положением нити в момент ее натяжения до и после натяжения будут одинаковы (скорость тела до настяжения нити показана пунктирным вектором, после натяжения – сплошным вектором). После этого тело сомнет нить, и далее будет двигаться прямолинейно. Чтобы оно попало в лунку, после натяжения нити оно должно двигаться вдоль прямой DC.

Поскольку треугольник BAD равнобедренный (его стороны AB и AD равны длине нити), то $\angle ABD = \angle BDA = \alpha$ (см. рисунок). Угол ADC также равен α, поскольку (как это доказано выше) после натяжения нити угол между нитью и вектором скорости не меняется: $\angle ADC = \alpha$. А так как сумма углов в треугольнике равна $180°$, то угол BAD равен $180° - 2\alpha$. Значит, угол DAC равен 2α, а $\angle ACD = 180° - 3\alpha$. Поэтому по теореме синусов для треугольника ACD имеем

$$\frac{l}{\sin(180° - 3\alpha)} = \frac{l/2}{\sin\alpha}$$

или

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 3\alpha \qquad (*)$$

Решения этого уравнения можно найти подбором. Очевидно, решениями являются

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 180°, \qquad \alpha_3 = 30°$$

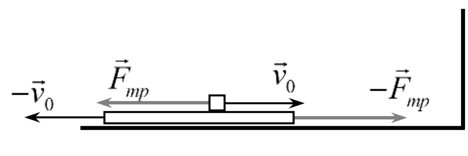
(то, что это корни уравнения, проверяется непосредственной подстановкой). Первый и второй корни не подходят. Действительно, корень $\alpha_1 = 0$ отвечает толчку тела вдоль нити. Но при таком движении тело попадет в лунку раньше, чем оно натянет нить один раз, и потому не выполнено условие однократного натяжения нити за исключением начального. Корень $\alpha_2 = 180°$ отвечает толчку противоположно начальному положению нити, что означает, что нить перед попаданием тела в лунку будет натянута только один раз, но этот «раз» совпадает с начальным. Поэтому для этого корня условие попадания при однократном натяжении нити за исключением начального не выполнено. В промежутке между этими корнями существует только один корень уравнения, поскольку угол, под которым расположена траектория тела после натяжения нити, меняется в зависимости от угла, под которым толкнули тело, монотонно (см. рисунок). Это и означает, что три перечисленных корня (из которых подходит только один) исчерпывают все решения уравнения. Уравнение (*) можно решить и непосредственно, воспользовавшись формулой сложения $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha)$, а затем формулами для синуса и косинуса двойного угла. Это решение приводит к тем же корням, которые перечислены выше. Таким образом, для попадания в лунку при однократном натяжении нити (за исключением начального) тело нужно толкнуть под углом

$$\alpha = 30°$$

к первоначальному расположению нити.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное условие изменения скорости тела при натяжении нити – изменение продольной составляющей скорости тела на противоположную и неизменность поперечной составляющей – 0,5 балла
2. Правильная траектория тела (с правильными углами) – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для угла (уравнение (*) в решении) – 0,5 балла
4. Правильное решение уравнения, правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Задача 6. В момент удара доска поменяет скорость на противоположную $-\vec{v}_0$ а тело будет продолжать двигаться в направлении стенки с той же скоростью $\vec{v}_0$. Поэтому возникнет



проскальзывание тела относительно доски, и на тело и доску станет действовать тормозящая сила трения между доской и телом. В результате и доска, и тело будут замедляться (см. рисунок; векторы скоростей показаны тонкими черными стрелками, векторы сил – жирными серыми). Замедление движения тела и доски (с одинаковыми ускорениями, поскольку массы доски и тела равны) будут проходить до тех пор, пока тело не свалится с доски. После этого доска будет двигаться равномерно, поскольку поверхность, по которой она двигается – гладкая. Следовательно, чтобы доска остановилась, тело должно остановиться на доске. А максимальному расстоянию между остановившейся доской и телом, очевидно, отвечает ситуация, когда тело остановится на самом правом краю доски.

Найдем время его движения до остановки в этом случае. В системе отсчета, связанной с доской тело имеет начальную скорость $2v_0$ и ускорение $2a$ (где $a = \mu g$ - ускорение тела и доски под действием силы трения; μ - коэффициент трения). Поэтому тело остановится относительно доски через время

$$t = \frac{v_0}{a},$$

пройдя расстояние

$$L = 2v_0 t - \frac{2at^2}{2} = \frac{v_0^2}{a}$$

При максимальном удалении доски от стенки, это расстояние равно длине доски l. Отсюда находим коэффициент трения между телом и доской, при котором доска пройдет максимальное расстояние от стенки

$$\mu = \frac{v_0^2}{gl}$$

Само максимальное расстояние можно найти из следующих соображений. Доска и тело движутся одинаково, поэтому до остановки тела пройдут одинаковые расстояния, но в разные стороны. При этом тело относительно доски должно переместиться на всю ее длину. Поэтому перемещения тела и доски равны половине длины доски, и, следовательно, максимальное расстояние между остановившейся доской и телом равно половине ее длины - $l/2$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное качественное описание движения тела и доски после удара доски о стенку – 0,5 балла
2. Правильный вывод (с обоснованием), что доска остановится на максимальном расстоянии от стенки, когда тело остановится на ближайшем к стенке конце доски – 0,5 балла
3. Правильные законы равноускоренного движения для тела и доски (или правильное использование теоремы об изменении кинетической энергии для тела и доски) – 0,5 балла
4. Правильный ответ для коэффициента трения и максимального расстояния между доской и стенкой в случае остановки доски – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице перевода первичных баллов за оценку письменной части Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» Инженерной секции.