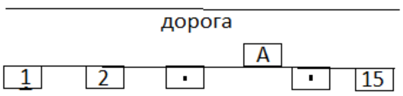
Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,

профиль «Инженерные науки»,

Решения и критерии оценивания задач олимпиадной части финала конкурса

2020-2021 учебного года, 9 класс

1. Вдоль одной стороны дороги расположены 15 домов с номерами 1, 2, …,15 (см рис). Жители этих домов добираются на работу по дороге на автобусе. В определенный момент времени из каждого дома вышли по одному человеку и направились на автобусную остановку. Укажите номер дома, у которого нужно было построить остановку, чтобы среднее значение пройденного ими расстояния было минимальным? (задача математическая: дома и остановка – точки)



2. Тридцать линейных функций $y = f_n(x), n = 1, 2, ..., 30$ задают уравнения тридцати прямых на плоскости, проходящих через одну точку A с ординатой 1 и пересекающих ось OX в точках с абсциссами $x_1, x_2, ..., x_{30}$. Вычислить значение выражения

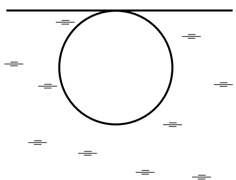
$$B = \left(f_2(x_1) - 1\right)\left(f_3(x_2) - 1\right)\left(f_4(x_3) - 1\right) \cdot ... \left(f_{30}(x_{29}) - 1\right)\left(f_1(x_{30}) - 1\right)$$

3. В каком отношении делит площадь трапеции прямая параллельная ее основаниям и проходящая через точку пересечения ее диагоналей, если одно основание трапеции в два раза больше другого?

4. В дачном доме имеется газовый проточный водонагреватель, в котором текущая по трубам вода нагревается газом до нужной температуры. Нагреватель имеет полезную мощность $P = 20$ кВт и КПД $\eta = 0{,}8$. Каков массовый расход газа в таком нагревателе (масса газа, сжигаемого в единицу времени)? Сколько времени нагреватель будет наполнять ванну объемом $V = 200$ л водой, нагретой в нагревателе на $\Delta T = 25°$. Удельная теплота сгорания природного газа $q = 45 \cdot 10^6$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$К). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

5. У звезды «тау» из созвездия Кита имеется планетная система. На третьей от звезды планете очень необычная гравитация: до высоты $h = 10$ м от поверхности ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2, а вот выше оно вдвое меньше. Космонавт бросает тело прямо с поверхности планеты вертикально вверх с такой скоростью, что на Земле оно поднялось бы на высоту $H = 20$ м. На какую высоту над поверхностью этой планеты поднимется тело?

6. Шар радиуса R, изготовленный из материала с плотностью, равной плотности воды, плавает в воде, касаясь ее поверхности (см. рисунок). Найти силу, с которой вода действует на нижнюю половину шара. Плотность воды ρ известна.

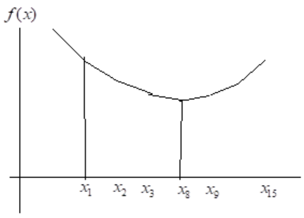


Решения

1.
Ответ: 8
Решение.
Положение домов изобразим точками на оси с абсциссами $x_1, x_2, ..., x_{15}$, остановку автобуса точкой с абсциссой x. Тогда среднее значение пройденного жителями домов расстояния равно:

$$f(x) = \frac{1}{15}\left(|x-x_1|+|x-x_2|+|x-x_3|+...+|x-x_{15}|\right)$$

График функции $f(x)$ – ломаная с вершинами с абсциссами $x_1 < x_2 < ... < x_{15}$. Для $x < x_1$ все модули раскрываются со знаком минус и поэтому угловой коэффициент первого звена ломаной $k_1 = -1$. На отрезке $[x_1; x_2]$ первое слагаемое в сумме раскрывается со знаком плюс, остальные – со знаком минус и угловой коэффициент второго звена ломаной $k_2 = -\frac{13}{15}$. Отрицательные угловые коэффициенты $k_3 = -\frac{11}{15}, k_4 = -\frac{9}{15}, ...$ звеньев ломаной сохраняться до отрезка $[x_7; x_8]$, где его значение равно $k_8 = -\frac{1}{15}$ и функция $f(x)$ на полуоси $(-\infty; x_8]$ убывает. На последующих отрезках угловые коэффициенты положительные и функция $f(x)$ возрастает. Остановка должна располагаться у дома с номером 8.



2.

Ответ: $B = 1$
Решение.
Обозначение: $x = a$ – абсцисса общей точки всех прямых, k_n – угловые коэффициенты прямых.

$$y = f_n(x) = k_n(x-a)+1 \rightarrow x_n - a = -\frac{1}{k_n} \rightarrow$$

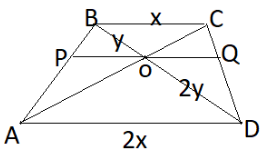
$$f_n(x_{n-1}) - 1 = -k_n \cdot \frac{1}{k_{n-1}}, n = 2,3,...30$$

$$f_1(x_{30}) - 1 = -k_1 \cdot \frac{1}{k_{30}}$$

$$B = (-1)^{30} \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{k_3}{k_2} \cdot \frac{k_4}{k_3} \cdot ... \cdot \frac{k_{30}}{k_{29}} \cdot \frac{k_1}{k_{30}} = 1$$

3.

Ответ: $7:20$
Решение.



Обозначение: s – площадь треугольника BCD, $2s$ – площадь треугольника ABD.

Треугольник OQD подобен треугольнику BCD с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$, поэтому

$$S_{OQD}=\frac{4}{9}s\to S_{OBCQ}=\frac{5}{9}s$$

Треугольник PBO подобен треугольнику ABD с коэффициентом подобия $k=\frac{1}{3}$, поэтому

$$S_{PBO}=\frac{1}{9}S_{ABD}=\frac{2}{9}s\to S_{PBCQ}=\frac{5}{9}s+\frac{2}{9}s=\frac{7}{9}s\to S_{APQD}=3s-\frac{7}{9}s=\frac{20}{9}s$$

$$S_{PBCQ}:S_{APQD}=7:20$$

4. Пусть за время Δt в нагревателе сгорает масса природного газа Δm. Тогда

$$P\Delta t=\eta q\Delta m$$

где P мощность нагревателя, η - коэффициент полезного действия (КПД) нагревателя, q - удельная теплота сгорания газа. Отсюда находим массовый расход газа в нагревателе

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{P}{\eta q}=0,36\cdot 10^{-3}\text{ (кг/сек)}$$

Пусть нагреватель наполняет ванну за время t. Тогда уравнение теплового баланса для нагретой воды дает

$$Pt=c\rho V\Delta T$$

где c - удельная теплоемкость воды, ρ - ее плотность, V - объем ванны, $\Delta T=25^\circ$ - величина нагрева воды. Отсюда находим скорость наполнения ванны водой

$$t=\frac{c\rho V\Delta T}{P}=1050\text{ (с)}=17{,}5\text{ (мин)}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Используется правильное уравнение теплового баланса – 0,5 балла
2. Правильное определение КПД нагревателя – 0,5 балла
3. Правильный ответ для массового расхода газа – 0,5 балла
4. Правильный ответ для времени наполнения вынны – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Поскольку на Земле высота подъема тела равна H, то начальная скорость брошенного тела есть

$$v_0=\sqrt{2gH}$$

На планете из системы «тау Кита» тело будет двигаться до высоты h с ускорением g, потом – с ускорением $g/2$. Поэтому над этой границей тело поднимется на высоту

$$h_0=\frac{v_1^2}{2(g/2)}=\frac{v_1^2}{g} \qquad (*)$$

где v_1 - та скорость, которую тело имело на высоте h от поверхности. Найдем эту скорость. Пока тело двигалось с ускорением g, законы его движения имели вид

$$x(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$$
$$v_x(t)=v_0-gt \qquad (**)$$

На высоту h тело поднимется за такое время t_1, которое определяется из уравнения

$$\frac{gt_1^2}{2} - v_0 t_1 + h = 0$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\left(t_1\right)_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

(нам нужен меньший корень – со знаком минус). Подставляя это время во второе уравнение (*), найдем скорость тела в момент смены ускорений

$$v_1 = v_x(t_1) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Подставляя эту скорость в выражение (*) найдем высоту подъема тела над тем уровнем, где меняется его ускорение

$$h_0 = \frac{v_0^2 - 2gh}{g} = \frac{v_0^2}{g} - 2h$$

Поэтому над поверхностью планеты тело поднимется на высоту

$$H_1 = h + h_0 = \frac{v_0^2}{g} - h$$

Подставляя теперь в эту формулу значение начальной скорости, получим окончательно

$$H_1 = 2H - h = 30 \text{ м}$$

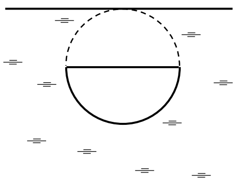
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Используются правильные уравнения равноускоренного движения – 0,5 балла
2. Правильно найдена скорость на высоте h от поверхности – 0,5 балла
3. Правильные уравнения движения после изменения ускорения – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Очевидно, силы, действующие со стороны воды на разные участки поверхности нижнего полушара, разные и направлены они тоже по-разному. Поэтому вычислить эту силу, суммируя силы, действующие на малые элементы поверхности полушара, достаточно сложно. Но у нас есть и другой способ суммирования. Дело в том, что такие же суммы сил по поверхности тела входят в закон Архимеда. Поэтому если взять такое вспомогательное тело, чтобы нижняя поверхность шара бала его поверхностью, и воспользоваться законом Архимеда, то можно вычислить и искомую силу.

Итак, мысленно отрежем и удалим верхний полушар, т.е. рассмотрим тело в виде только нижнего полушара. С одной стороны, сила Архимеда, действующая на этот полушар со стороны воды нам известна. Это

$$F_A = \rho g V_{п.ш.} = \frac{2}{3}\pi\rho g R^3 \qquad (*)$$

где ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения, $V_{п.ш.} = 2\pi R^3/3$ - объем полушара. С другой стороны, эта сила есть равнодействующая сил, действующих на полушар со стороны жидкости. Поэтому ее можно представить как сумму сил, одна из которых действует на нижнюю поверхность полушара $\vec{F}_{п.ш.}$ (и которую нам и нужно найти), а вторая действует на его плоскую поверхность круга, замыкающего полушар $\vec{F}_{кр}$. Поскольку эти силы направлены противоположно, в выражении для силы Архимеда они вычитаются



$$F_A = F_{п.ш.} - F_{кр} \qquad (**)$$

Последнюю силу легко вычислить. Поскольку замыкающий полушар круг находится в жидкости на глубине R, гидростатическое давление жидкости на этой глубине равно $p = \rho g R$. Поэтому

$$F_{кр} = p\pi R^2 = \pi\rho g R^3$$

Отсюда и формул (*), (**) находим

$$F_{п.ш.} = F_A + F_{кр} = \frac{5}{3}\pi\rho g R^3$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения задачи – разность силы Архимеда, действующей на полушар, и силы давления столба жидкости на его верхнюю поверхность – 0,5 балла
2. Правильное нахождение силы Архимеда, действующей на полушар – 0,5 балла
3. Правильное нахождение силы, действующей на верхнюю поверхность полушара – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: