Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,

профиль «Инженерные науки»,

Решения и критерии оценивания

Задач олимпиадной части финала конкурса 2020-2021 учебного года

11 класс

1. Функция $f(x)$ – квадратный трехчлен, $g(x)$ – линейная функция, для которых справедливо неравенство $|f'(x)|\cdot g^2(x)\ge|f(x)|+|g(x)|$ для всех x. Докажите, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g^2(x)}$ существует для любого a и его значение не зависит от a.

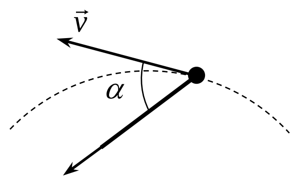
2. Петя предложил Васе найти все целые решения уравнения:

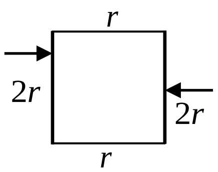
$$tg\frac{\pi}{x}\cdot tg\frac{2\pi}{x}\cdot tg\frac{3\pi}{x}\cdot\ldots\cdot tg\frac{2021\pi}{x}=0.$$

Вася зачеркнул в нем первый сомножитель $tg\frac{\pi}{x}$ и вернул уравнение Пете утверждая, что множество целых решений уравнения от этого не изменилось. Петя подумал и проделал то же самое: зачеркнул сомножитель $tg\frac{2\pi}{x}$ утверждая, что все целые решения сохранились. Игра была продолжена. Сколько раз Петя и Вася могли зачеркивать очередные сомножители, сохраняя все целые решения уравнения?

3.Длина ребра BC треугольной пирамиды $ABCD$ равна 3. Точки M и N середины ребер DC и AB соответственно. На скрещивающихся прямых AM и DN расположены точки P и Q так, что прямая PQ параллельна BC. Найти длину отрезка PQ.

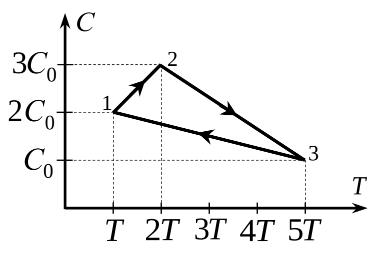
4. К телу, находящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности, привязана нить, расположенная горизонтально. Тело тянут за нить, прикладывая к ней постоянную по величине силу. При этом тело движется с постоянной скоростью v по окружности радиуса R, а нить составляет постоянный угол α с вектором скорости тела (см. рисунок; вид сверху, фрагмент траектории тела показан пунктиром, нить – жирным отрезком). Найти коэффициент трения между телом и поверхностью.





5. Из проволоки изготовлен квадрат. Две противоположных стороны имеют одинаковые сопротивления r, две другие – одинаковые сопротивления $2r$. По двум противоположным сторонам с сопротивлением $2r$ могут перемещаться скользящие контакты (см. рисунок; контакты показаны стрелками). Во сколько раз максимальное сопротивление квадрата отличается от минимального? Как нужно подключать контакты, чтобы сопротивление квадрата было минимальным или максимальным. Привести все варианты подключений.

6. С идеальным газом происходит циклический процесс 1-2-3-1, для которого дан график зависимости теплоемкости газа C от температуры T (см. рисунок; теплоемкости газа на всех участках являются линейными функциями температуры). Найти термодинамический коэффициент полезного действия этого процесса. Какую работу газ совершает за цикл? Ответ обосновать.



Решения

1.
Решение
Пусть $f(x)=p(x-b)^2+q,\ g(x)=cx+d,\ p\neq 0, c\neq 0$
Тогда

$$\left|2p(x-b)\right|\cdot\left(cx+d\right)^2\geq\left|p(x-b)^2+q\right|+\left|cx+d\right|,\forall x \qquad (*)$$

Подставляем в (*) $x=b$

$$0\geq|q|+|cb+d|\to q=0, b=-\frac{d}{c}$$

Тогда

$$f(x)=p(x-b)^2=p\left(x+\frac{d}{c}\right)^2=\frac{p}{c^2}\left(cx+d\right)^2=\frac{p}{c}g^2(x)\to\frac{f(x)}{g^2(x)}=\frac{p}{c}$$

для всех $x\neq b$, для которых $g(x)\neq 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g^2(x)}=\dfrac{p}{c^2},\forall a\neq b$

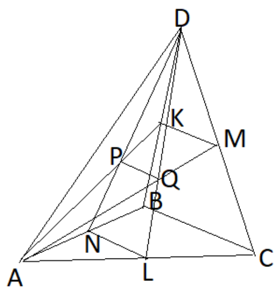
Для $a=b$

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g^2(x)}=\lim_{x\to b}\frac{p(x-b)^2}{(cx+d)^2}=\lim_{x\to b}\frac{p(x-b)^2}{(c(x-b)+\underbrace{d+cb}_{0})^2}=\lim_{x\to b}\frac{p(x-b)^2}{c^2(x-b)^2}=\frac{p}{c^2}$$

2.
Ответ: 1010 раз
Решение
Если зачеркивается в уравнении множитель $tg\dfrac{m\pi}{x}, m\leq 1010$, то все целые решения соответствующего уравнения $tg\dfrac{m\pi}{x}=0$ будут повторены в уравнении $tg\dfrac{2m\pi}{x}=0, 2m\leq 2020$ и множество целых решений уравнений не меняется. Если в уравнении зачеркнуть множитель $tg\dfrac{m\pi}{x}, m\geq 1011$, то решение $x=m$ будет потеряно, поскольку оно не присутствует среди решений уравнений $tg\dfrac{n\pi}{x}=0, n>m\geq 1011, n\leq 2021\to tg\dfrac{n\pi}{m}\neq 0$

3.

Ответ: 1
Решение



Искомые точки единственные, поскольку P является точкой пересечения плоскости, содержащей прямую AM и параллельной прямой BC, и прямой DN.
Дополнительные построения: проводим медиану AK в грани ADB, медиану DL грани ADC, отрезки KM и NL. Точка P – пересечение медиан треугольник ADB, точка Q – пересечение медиан треугольника ADC.
Треугольник APQ подобен треугольнику AKM с коэффициентом подобия $k=\dfrac{2}{3}$ (свойство медиан), поэтому $PQ\|KM\|BC$.

$$PQ = \frac{2}{3}KM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot BC = 1$$

4. Поскольку сила трения направлена противоположно скорости, а тело имеет постоянную по величине скорость, то проекция силы натяжения нити на направление скорости компенсирует силу трения, а проекция на перпендикулярное направление обеспечивает нужную центростремительную силу:

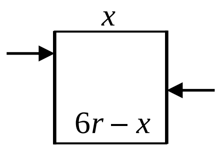
$$\begin{aligned} T\cos\alpha &= \mu mg \\ T\sin\alpha &= \frac{mv^2}{R} \end{aligned} \qquad (1)$$

Деля уравнения (1) друг на друга, найдем

$$\mu = \frac{v^2 \operatorname{ctg}\alpha}{gR}$$

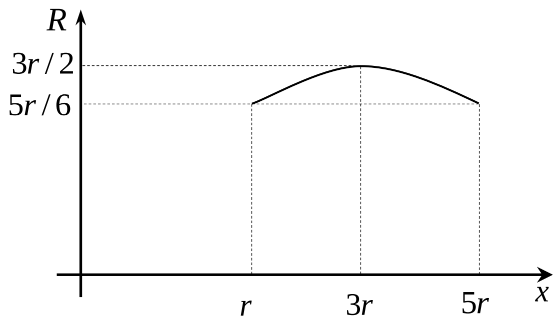
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные направление и величина силы трения – 0,5 балла
2. Правильная проекция второго закона Ньютона на направление скорости – 0,5 балла
3. Правильная проекция второго закона Ньютона на направление, перпендикулярное скорости – 0,5 балла
4. Правильный коэффициент трения между телом и поверхностью – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Найдем сопротивление квадрата при некотором расположении контактов и исследуем эту величину на максимум и минимум. Очевидно, что при любом расположении контактов на квадрате сумма сопротивлений его верхней и нижней ветви равна сопротивлению проволоки, из которой он изготовлен, т.е. $6r$. Поэтому, если сопротивление верхней ветви квадрата x, то сопротивление его нижней части $6r - x$ (см. рисунок). Причем минимальное сопротивление x равно r (оба контакта вверху), максимальное - $5r$ (оба контакта внизу). Найдем теперь сопротивление квадрата, включенного между скользящими контактами. В этом случае верхняя и нижняя ветви соединены параллельно, и сопротивление квадрата R будет равно отношению произведения сопротивлений верхнего и нижнего участка к их сумме



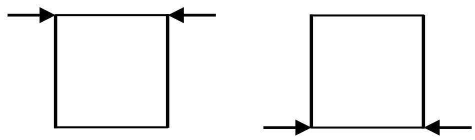
$$R = \frac{x(6r - x)}{6r} \qquad (1)$$

причем x в этой формуле меняется от r до $5r$. График функции $R(x)$ (1) представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, определенную на указанном интервале значений x. Поскольку при $x = r$ и $x = 5r$ значения функции (1) одинаковы, то функция (1) симметрична относительно прямой $x = 3r$ и достигает



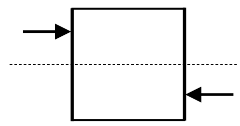
максимума при этом значении x (см. рисунок). Отсюда заключаем, что максимальным сопротивление цепи будет при $x=3r$, а минимальным при $x=r$ и $x=5r$. Значения максимального и минимального сопротивлений найдем, подставляя эти значения x в формулу (1):

$$R_{\max}=\frac{3}{2}r\,,\ R_{\min}=\frac{5}{6}r$$



Минимальное сопротивление цепи

Найдем положения скользящих контактов, при которых достигается минимум или максимум сопротивления цепи. Минимум достигается, если сопротивление верхнего участка цепи между контактами $x=r$ или $x=5r$. Такое положение будет иметь место в двух случаях, - если оба контакта вверху, или оба контакта внизу. А вот максимум достигается во многих случаях. Действительно, сопротивление верхнего (и нижнего) участка между контактами будет равно $x=3r$, если оба контакта в центре проводников с сопротивлением $2r$. Но оно останется таким же, если сдвинуть левый контакт на некоторую величину (относительно центра проводника с сопротивлением $2r$) вверх, а правый контакт – на такую же величину вниз. Поэтому максимальному сопротивлению цепи отвечает любое расположение контактов, антисимметричное относительно центров проводников с сопротивлением $2r$.



Минимальное сопротивление цепи

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные формулы для сложения сопротивлений – 0,5 балла
2. Правильное сопротивление цепи как функции сопротивления между контактами по «верхнему» или «нижнему» проводнику. Правильный ответ для максимального и минимального сопротивления цепи – 0,5 балла
3. Обоснование максимальности или минимальности сопротивления – 0,5 балла
4. Правильное расположение контактов для обеспечения максимального и минимального сопротивления. Перечисление всех случаев подключения с максимальным и минимальным сопротивлением – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Поскольку в процессах 1-2 и 2-3 росла температура газа, а теплоемкость положительна, то газ в этих процессах получал тепло. В процессе 3-1 температура газа уменьшалась, газ отдавал тепло. Это значит, что контакт с нагревателем двигателя был в процессе 1-2-3, с холодильником – в процессе 3-1.

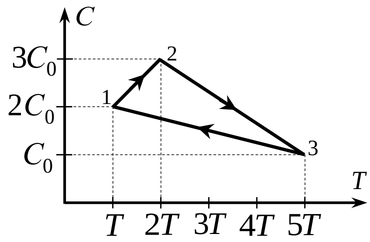
Во всех процессах теплоемкость газа менялась, поэтому для нахождения количеств теплоты, полученного от нагревателя и отданного холодильнику, разобьем интервал изменения температуры на бесконечно малые интервалы ΔT_n, внутри которых теплоемкость можно считать неизменной, для каждого вычислим количество полученной или отданной теплоты δQ_n как

$$\delta Q_n = C_n \delta T_n$$

(C_n - теплоемкость газа на n-ном бесконечно малом интервале) просуммируем эти величины

$$Q = \sum_n \delta Q_n = \sum_n C_n \Delta T_n \qquad (2)$$

Сумма (2) имеет смысл площади под графиком зависимости теплоемкости от температуры - аналогичная сумма вычисляется при вычислении работы упругой силы как площадь под графиком зависимости силы от перемещения. Поэтому количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя $Q_н$, есть площадь под графиком процессов 1-2 и 2-3 (до оси температур), а количество теплоты, отданное газом холодильнику, есть площадь под графиком процесса 3-1 (до оси температур). Поскольку фигуры под графиком – трапеции, то их площади находятся элементарно. Имеем



$$Q_н = \frac{2C_0 + 3C_0}{2} \cdot T + \frac{3C_0 + C_0}{2} \cdot 3T = \frac{17}{2} C_0 T$$

$$Q_x = \frac{2C_0 + C_0}{2} \cdot 4T = \frac{12}{2} C_0 T$$

Отсюда находим работу, совершенную газом за цикл

$$A = Q_н - Q_x = \frac{5}{2} C_0 T$$

и КПД цикла η

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{5}{17} = 0,29$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильный метод нахождения количеств полученной или отданной теплоты (через площади) или через среднюю теплоемкость (с обоснованием) – 0,5 балла
2. Правильные количества полученной и отданной теплоты, работа газа за цикл – 0,5 балла
3. Правильная работа газа за цикл – 0,5 балла
4. Правильный КПД процесса – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: