Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,

профиль «Инженерные науки»,

Решения и критерии оценивания

Задач олимпиадной части финала конкурса 2020-2021 учебного года

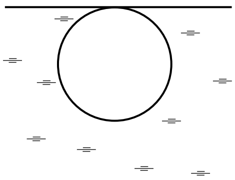
10 класс

1. Сумма абсолютных значений первых 18 членов возрастающей арифметической прогрессии равна 270. Эта сумма не изменится, если к каждому члену прогрессии добавить число 2. Если к каждому члену прогрессии добавить число 3, то сумма также не изменится. Найти первый член и разность прогрессии.

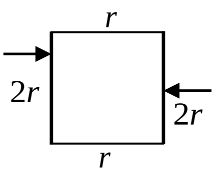
2. При каких значениях a уравнение $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = a$ имеет единственное решение?

3. Точка C расположена вне окружности, построенной на отрезке AB как на диаметре. Прямые AC и BC пересекают окружность в точках P и Q, соответственно. Длина отрезка PQ равна радиусу окружности. Найти угол CAQ.

4. Два двухатомных газа A_2 и B_2, взятые в равном количестве молей, находятся в сосуде под давлением p. Происходит химическая реакция с образованием газообразного соединения A_2B. Известно, что образовалось максимально возможное количество этого газа. Какое давление будет в сосуде при той же температуре после прохождения реакции?



5. Шар радиуса R, изготовленный из материала с плотностью, равной плотности воды, плавает в воде, касаясь ее поверхности (см. рисунок). Найти силу, с которой вода действует на нижнюю половину шара. Плотность воды ρ известна.



6. Из проволоки изготовлен квадрат. Две противоположных стороны имеют одинаковые сопротивления r, две другие – одинаковые сопротивления $2r$. По двум противоположным сторонам с сопротивлением $2r$ могут перемещаться скользящие контакты (см. рисунок; контакты показаны стрелками). Во сколько раз максимальное сопротивление квадрата отличается от минимального? Как нужно подключать контакты, чтобы сопротивление квадрата было минимальным или максимальным. Привести все варианты подключений.

Решения

1.

Ответ: $d=\dfrac{10}{3},\ a_1=t,\ t\in\left[-30;-\dfrac{89}{3}\right]$

Решение

Обозначение: $a_1, a_2, ..., a_{18}$ – последовательные члены арифметической прогрессии,

$$a_{k+1}-a_k=d>0,\ k=1,2,...,17$$

Рассмотрим функцию $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+...+|x-a_{18}|,\ a_1<a_2<...<a_{18}$. Она кусочно-линейная, убывающая на полуоси $(-\infty;a_9]$, возрастающая на полуоси $[a_{10};+\infty)$ и постоянная на отрезке $[a_9,a_{10}]$. По условию $f(-3)=f(-2)=f(0)=270$. Это означает, что точки $x=-3,\ x=-2,\ x=0$ принадлежат отрезку $[a_9,a_{10}]$.

Значение

$$f(a_{10})=|a_{10}-a_1|+|a_{10}-a_2|+...+|a_{10}-a_{18}|=$$

$$=(9d+8d+...+d)+(d+2d+...+8d)=9d+9d\cdot 8=81d=270\to d=\frac{10}{3}$$

Отрезок $[a_9;a_{10}]$ длины $d=\dfrac{10}{3}$ должен содержать точки $x=-3,\ x=-2,\ x=0$. Это бывает, если

$$a_9\in\left[-\frac{10}{3};-3\right]\to a_1+8\cdot\frac{10}{3}\in\left[-\frac{10}{3};-3\right]\to a_1\in\left[-30;-\frac{89}{3}\right]$$

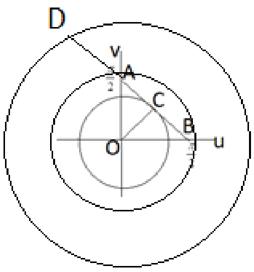
Ответ: $d=\dfrac{10}{3},\ a_1=t,\ t\in\left[-30;-\dfrac{89}{3}\right]$

2.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{\pi^2}{4};\dfrac{5\pi^2}{4}\right]\cup\left\{\dfrac{\pi^2}{8}\right\}$

Решение. Обозначения: $u=\arcsin x,\ v=\arccos x,\ -\dfrac{\pi}{2}\le u\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le v\le\pi$

$$\text{Условие:}\begin{cases}u+v=\dfrac{\pi}{2}\\ u^2+v^2=a\end{cases}$$



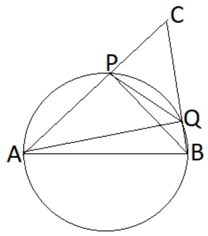
Точки с координатами $(u;v)$ принадлежат отрезку AD. Окружность $u^2+v^2=a$ касается этого отрезка, когда ее радиус равен длине отрезка OC.

$$\sqrt{a}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\to a=\frac{\pi^2}{8}$$

Единственность решения достигается, если окружность пересекает отрезок DB:

$$a\in\left(\frac{\pi^2}{4};\frac{5\pi^2}{4}\right]\cup\left\{\frac{\pi^2}{8}\right\}$$

3.
Ответ: 30^0
Решение



Треугольники QPC и ABC подобные, поскольку имеют общий угол и стороны, образующие этот угол пропорциональны:

$$CA \cdot CP = CB \cdot CQ \to \frac{CA}{CB} = \frac{CQ}{CP} \Leftrightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{CQ}{CA}$$

Отношение третьих сторон $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{2}$ задает коэффициент подобия $k = \frac{1}{2} \to \frac{CP}{CB} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{2}$.

Треугольник AQC прямоугольный и его катет CQ в два раза меньше гипотенузы AC, т.е. угол CAQ равен 30^0.

4. Пусть в сосуде находятся ν молей вещества A_2 и ν молей вещества B_2. Тогда из закона Дальтона для начальной смеси газов следует, что давление в сосуде равно

$$p = \frac{2\nu RT}{V}$$

где V - объем сосуда, T - абсолютная температура.

Далее. Уравнение реакции

$$2A_2 + B_2 = 2A_2B$$

показывает, что каждая молекула газа B_2 реагирует с двумя молекулами газа A_2. Поэтому ν молей газа A_2 полностью прореагирует с половиной всего количества газа B_2 ($\nu/2$ молей). Из уравнения реакции следует также, что после прохождения реакции в сосуде будет столько же молей газа A_2B, сколько молей газа A_2 было в сосуде (ν молей). И еще останется непрореагирующие молекулы газа B_2 ($\nu/2$ молей). Следовательно, после прохождения реакции в сосуде будет находиться $3\nu/2$ моля газов. Из закона Дальтона для конечной смеси имеем

$$p_1 = \frac{1,5\nu RT}{V}$$

Отсюда заключаем, что

$$p_1 = \frac{3}{4}p$$

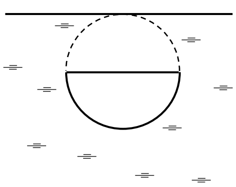
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные формулы для сложения сопротивлений – 0,5 балла
2. Правильное сопротивление цепи как функции сопротивления между контактами по «верхнему» или «нижнему» проводнику – 0,5 балла
3. Правильный ответ для максимального и минимального сопротивления цепи – 0,5 балла

4. Правильное расположение контактов для обеспечения максимального и минимального сопротивления. Перечисление всех случаев – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

5. Очевидно, силы, действующие со стороны воды на разные участки поверхности нижнего полушара, разные и направлены они тоже по-разному. Поэтому вычислить эту силу, суммируя силы, действующие на малые элементы поверхности полушара, достаточно сложно. Но у нас есть и другой способ суммирования. Дело в том, что такие же суммы сил по поверхности тела входят в закон Архимеда. Поэтому если взять такое вспомогательное тело, чтобы нижняя поверхность шара бала его поверхностью, и воспользоваться законом Архимеда, то можно вычислить и искомую силу.

Итак, мысленно отрежем и удалим верхний полушар, т.е. рассмотрим тело в виде только нижнего полушара. С одной стороны, сила Архимеда, действующая на этот полушар со стороны воды нам известна. Это

$$F_A = \rho g V_{п.ш.} = \frac{2}{3}\pi\rho g R^3 \qquad (*)$$



где ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения, $V_{п.ш.} = 2\pi R^3/3$ - объем полушара. С другой стороны, эта сила есть равнодействующая сил, действующих на полушар со стороны жидкости. Поэтому ее можно представить как сумму сил, одна из которых действует на нижнюю поверхность полушара $\vec{F}_{п.ш.}$ (и которую нам и нужно найти), а вторая действует на его плоскую поверхность круга, замыкающего полушар $\vec{F}_{кр}$. Поскольку эти силы направлены противоположно, в выражении для силы Архимеда они вычитаются

$$F_A = F_{п.ш.} - F_{кр} \qquad (**)$$

Последнюю силу легко вычислить. Поскольку замыкающий полушар круг находится в жидкости на глубине R, гидростатическое давление жидкости на этой глубине равно $p = \rho g R$. Поэтому

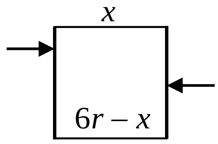
$$F_{кр} = p\pi R^2 = \pi\rho g R^3$$

Отсюда и формул (*), (**) находим

$$F_{п.ш.} = F_A + F_{кр} = \frac{5}{3}\pi\rho g R^3$$

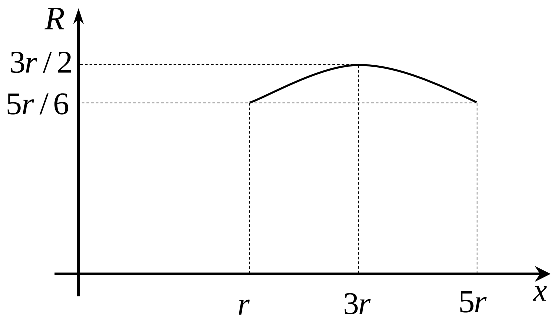
Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные формулы для сложения сопротивлений – 0,5 балла
2. Правильное сопротивление цепи как функции сопротивления между контактами по «верхнему» или «нижнему» проводнику – 0,5 балла
3. Правильный ответ для максимального и минимального сопротивления цепи – 0,5 балла
4. Правильное расположение контактов для обеспечения максимального и минимального сопротивления. Перечисление всех случаев – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

6. Найдем сопротивление квадрата при некотором расположении контактов и исследуем эту величину на максимум и минимум. Очевидно, что при любом расположении контактов на квадрате сумма сопротивлений его верхней и нижней ветви равна сопротивлению проволоки, из которой он изготовлен, т.е. $6r$. Поэтому, если сопротивление верхней ветви квадрата x, то сопротивление его нижней части $6r-x$ (см. рисунок). Причем минимальное сопротивление x равно r (оба контакта вверху), максимальное - $5r$ (оба контакта внизу). Найдем теперь сопротивление квадрата, включенного между скользящими контактами. В этом случае верхняя и нижняя ветви соединены параллельно, и сопротивление квадрата R будет равно отношению произведения сопротивлений верхнего и нижнего участка к их сумме



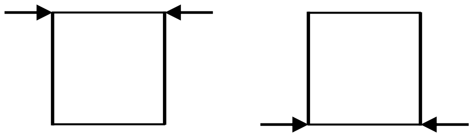
$$R=\frac{x(6r-x)}{6r} \qquad (1)$$

причем x в этой формуле меняется от r до $5r$. График функции $R(x)$ (1) представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, определенную на указанном интервале значений x. Поскольку при $x=r$ и $x=5r$ значения функции (1) одинаковы, то функция (1) симметрична относительно прямой $x=3r$ и достигает максимума при этом значении x (см. рисунок). Отсюда заключаем, что максимальным сопротивление цепи будет при $x=3r$, а минимальным при $x=r$ и $x=5r$. Значения максимального и минимального сопротивлений найдем, подставляя эти значения x в формулу (1):

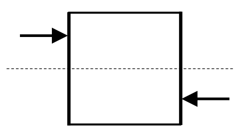


$$R_{\max}=\frac{3}{2}r\,,\ R_{\min}=\frac{5}{6}r$$

Найдем положения скользящих контактов, при которых достигается минимум или максимум сопротивления цепи. Минимум достигается, если сопротивление верхнего участка цепи между контактами $x=r$ или $x=5r$. Такое положение будет иметь место в двух случаях, - если оба контакта вверху, или оба контакта внизу. А вот максимум достигается во многих случаях. Действительно, сопротивление верхнего (и нижнего) участка между контактами будет равно $x=3r$, если оба контакта в центре проводников с сопротивлением $2r$. Но оно останется таким же, если сдвинуть левый контакт на некоторую величину (относительно центра проводника с сопротивлением $2r$) вверх, а правый контакт – на такую же величину вниз. Поэтому максимальному сопротивлению цепи отвечает любое расположение контактов, антисимметричное относительно центров проводников с



Минимальное сопротивление цепи



Минимальное со-противление цепи

сопротивлением $2r$.

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильные формулы для сложения сопротивлений – 0,5 балла
2. Правильное сопротивление цепи как функции сопротивления между контактами по «верхнему» или «нижнему» проводнику. Правильный ответ для максимального и минимального сопротивления цепи – 0,5 балла
3. Обоснование максимальности или минимальности сопротивления – 0,5 балла
4. Правильное расположение контактов для обеспечения максимального и минимального сопротивления. Перечисление всех случаев подключения с максимальным и минимальным сопротивлением – 0,5 балла
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

Оценка работы участника
Итоговая оценка работы равна сумме оценок за каждую задачу (максимальная оценка – 12 баллов). Пересчет на 50-балльную шкалу осуществлялся согласно таблице: