

Решения

Задач заключительного тура олимпиадной части конкурса. 9 класс

1. (математика) Найти значения a , для которых координаты $(x; y)$ любой точки квадрата $2 \leq x \leq 3, 3 \leq y \leq 4$ удовлетворяют неравенству $(3x - 2y - a)(3x - 2y - a^2) \leq 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; -4]$

Решение: Точки с координатами $(x; y)$ квадрата $2 \leq x \leq 3, 3 \leq y \leq 4$ $ABCD$ лежат в полосе

$$(3x - 2y - a)(3x - 2y - a^2) \leq 0$$

между прямыми $L_1: 3x - 2y - a = 0$ и $L_2: 3x - 2y - a^2 = 0$ (см.

рисунок), если этой полосе принадлежат все вершины квадрата:

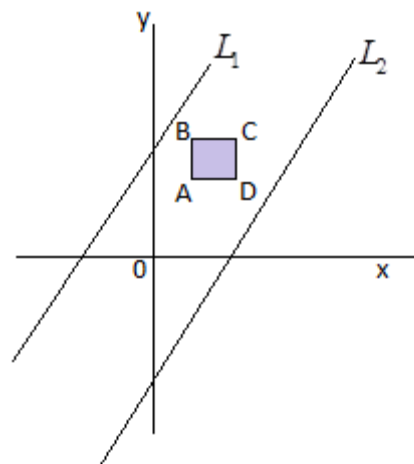
$$A(2; 4) \rightarrow (-2 - a)(-2 - a^2) \leq 0 \rightarrow a \leq -2 \quad (A)$$

$$B(2; 5) \rightarrow (-4 - a)(-4 - a^2) \leq 0 \rightarrow a \leq -4 \quad (B)$$

$$C(3; 5) \rightarrow (-1 - a)(-1 - a^2) \leq 0 \rightarrow a \leq -1 \quad (C)$$

$$D(3; 4) \rightarrow (-3 - a)(-3 - a^2) \leq 0 \rightarrow a \leq -3 \quad (D)$$

Пересекая множества решений неравенств (A) – (D), получим искомые $a \in (-\infty; -4]$.

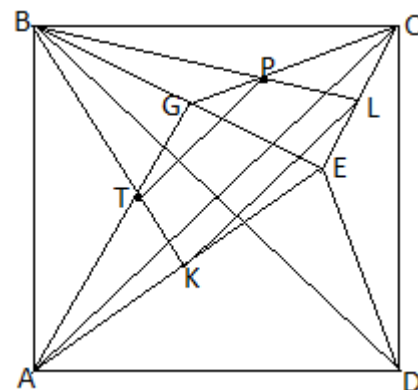


2. (математика) Произвольная точка E внутри квадрата $ABCD$ со стороной 1 соединена отрезками с его вершинами. Точки P, Q, F и T являются точками пересечения медиан треугольников BCE, CDE, DAE и ABE соответственно. Найти площадь четырехугольника $PQFT$.

Ответ: $S = \frac{2}{9}$

Решение: Введем следующие обозначения (см. рисунок): K, L – середины отрезков AE и EC , G – середина отрезка BE . KL параллельна диагонали AC и равна по длине ее половине. Треугольники BPT и BLK подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$ (свойство медиан). Тогда TP параллелен KL и AC .

Более того, $TP = \frac{2}{3} KL = \frac{1}{3} AC$. Аналогичные соотношения справедливы для PQ, QF и FT :



$$PQ = \frac{1}{3}BD, QF = \frac{1}{3}AC, FT = \frac{1}{3}BD.$$

Поскольку диагонали квадрата перпендикулярны и равны друг другу, четырехугольник $PQFT$ –

квадрат со стороной $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и, следовательно, его площадь $S = \frac{2}{9}$.

3. (физика) Два невесомых стакана с различным количеством воды уравновешены на коромысле неравноплечих весов длиной L . Из одного стакана в другой переливают массу воды m , и весы теряют равновесие. Чтобы его восстановить, опору коромысла нужно передвинуть на расстояние l по отношению к ее старому положению. Найти суммарную массу воды в стаканах. Массой коромысла весов пренебречь.

Решение. Пусть масса воды в левом стакане – m_1 , в правом – m_2 , плечи стаканов соответственно равны l_1 и $L - l_1$. Тогда условие равновесия весов в первом случае дает



$$m_1 l_1 = m_2 (L - l_1)$$

Пусть мы перелили массу воды m из левого стакана в правый. Тогда условие равновесия весов во втором случае дает

$$(m_1 - m)(l_1 + l) = (m_2 + m)(L - l_1 - l)$$

Вычитая из второго уравнения первое, найдем суммарную массу воды в стаканах

$$m_1 + m_2 = \frac{mL}{l}$$

4. (физика) Из куска металла массой M выплавлен прямоугольный параллелепипед. Затем к разным парам взаимно противоположных граней параллелепипеда подключают источник постоянного напряжения. Оказалось, что отношение тепловых мощностей, выделяющихся в параллелепипеде при подключениях источника к разным парам граней, равно 1:2:8. Найти длины ребер параллелепипеда. Плотность металла ρ – известна. Подключение параллелепипеда к источнику осуществляется с помощью широких шин, которые обеспечивают контакт источника со всей площадью грани, что позволяет пренебречь эффектами растекания тока.

Решение. Пусть размеры ребер параллелепипеда равны a (самое маленькое), b (среднее) и c (самое большое). Тогда сопротивления параллелепипеда при подключении электрических контактов к граням со сторонами a и b равно

$$R_{ab} = \frac{\rho_0 ab}{c}$$

где ρ_0 – удельное сопротивление металла. Аналогично находим сопротивление параллелепипеда при подключении электрических контактов к другим парам граней

$$R_{ac} = \frac{\rho_0 ac}{b}, \quad R_{bc} = \frac{\rho_0 bc}{a}$$

Очевидно, что величины сопротивлений удовлетворяют следующим неравенствам

$$R_{ab} < R_{ac} < R_{bc}$$

А поскольку к параллелепипеду подключают источник постоянного напряжения, то выделяемая в нем мощность обратно пропорциональна его сопротивлению

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Поэтому для выделяемых в параллелепипеде мощностей при его различных подключениях имеем

$$P_{ab} > P_{ac} > P_{bc}$$

где P_{ab} , P_{ac} и P_{bc} - мощности, выделяемые в параллелепипеде при подключении электрических контактов к граням со сторонами a и b (P_{ab}), a и c (P_{ac}) и b и c (P_{bc}). Поэтому из условия задачи получаем

$$\frac{P_{ac}}{P_{bc}} = \frac{R_{bc}}{R_{ac}} = \frac{b^2}{a^2} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{P_{ab}}{P_{ac}} = \frac{R_{ac}}{R_{ab}} = \frac{c^2}{b^2} = 4$$

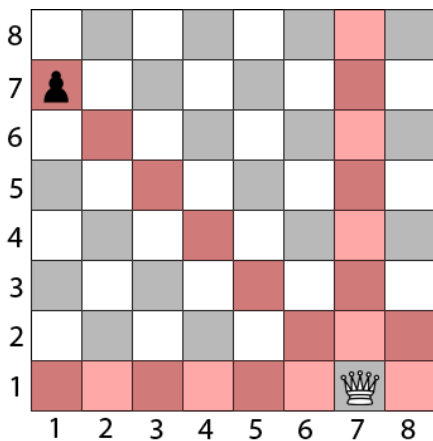
или $b = \sqrt{2}a$, $c = 2b = 2\sqrt{2}a$. А поскольку

$$abc = \frac{M}{\rho}$$

находим

$$a = \left(\frac{M}{4\rho}\right)^{1/3}, \quad b = \sqrt{2}\left(\frac{M}{4\rho}\right)^{1/3}, \quad c = 2\sqrt{2}\left(\frac{M}{4\rho}\right)^{1/3}$$

5. (информатика) На шахматной доске расположены белый ферзь и черная пешка, положение которых задано координатными парами (R_1, C_1) и (R_2, C_2) соответственно, где R – номер строки, C - номер столбца (как обозначено на рисунке ниже). Требуется проверить, бьет ли ферзь пешку. Пример на рисунке соответствует примеру 1 входных данных:



В единственной строке входных данных записаны 4 целых числа, разделенных пробелами: положение ферзя (R_1, C_1) и положение пешки (R_2, C_2) . Гарантируется, все числа лежат в пределах от 1 до 8, а также что положение ферзя и пешки не совпадает. В качестве ответа нужно вывести единственное значение: TRUE, если ферзь бьет пешку, и FALSE, если нет.

Примеры входных данных и результатов работы программы:

<i>Пример входных данных</i>	<i>Пример результата</i>
1 7 7 1	TRUE
1 6 7 1	FALSE
8 4 1 4	TRUE

Комментарии к задаче:

Решением задачи является код программы, написанный на любом традиционном языке программирования, с указанием этого языка. В случае невозможности написать код на традиционном языке программирования, в качестве частичного решения может быть принят правильный алгоритм программы, оформленный в виде блок-схемы или псевдокода.

Программа должна читать входные данные из стандартного потока ввода (так, как будто эти данные вводятся с клавиатуры) и выводить результаты в стандартный поток вывода (так, как будто эти данные печатаются на экран). Программа должна корректно работать на входных данных, описанных в условиях задачи. Корректность входных данных гарантируется, проверять её дополнительно внутри программы не требуется (если в условии задачи сказано, что на вход подается целое число от 0 до 1000, не нужно дополнительно проверять, что введена, например, текстовая строка, или число вне этого диапазона).

Программа должна в результате работы выводить только тот ответ, который требуется по условию (может сопровождаться кратким текстовым оформлением или без него). Любой другой вывод результатов в процессе работы программы будет считаться ошибкой. Для лучшего понимания условий задачи и форматов входных и выходных данных, задача сопровождается несколькими примерами корректных входных данных и правильного результата работы, приведенных в разделе «*примеры входных данных и результатов работы программы*».

Написанная программа должна работать *эффективно*, то есть вычислять правильный ответ, по возможности за наименьшее время. Программы, написанные *существенно неэффективно*, то есть затрачивающие существенно больше времени, чем эффективные решения, будут считаться неполным решением.

Код программы должен быть написан разборчиво, аккуратно, сопровождается отступами и разумным количеством комментариев в коде программы. Допускается несколько несущественных синтаксических ошибок в коде, при условии, что они не влияют на общую возможность чтения и понимания кода. Неаккуратно написанный (нечитаемый) код программы и/или большое количество синтаксических ошибок могут привести к снижению общей оценки за задачу.

Пример оформления решения (кода программы):

```
{pascal} //указание языка, на котором написана программа
programMyProg;
var: ...
begin
  {читываем входные данные} //комментарии в теле программы
  readln(a,b);
  ...
  {основное тело программы}
  ...
  {выводим ответ}
  writeln('Искомое число: ',x);
end.
```

Решение.

```
program prog9;
var r1,c1,r2,c2:integer;
begin
  {читаем входные данные}
  readln(r1,c1,r2,c2);
```

```
if (r1=r2) {проверяем горизонталь}
  or (c1=c2){проверяем вертикаль}
  or ((r1+c1)=(r2+c2)){проверяем диагональ}
  or ((r1-c1)=(r2-c2)){проверяем вторую диагональ}
then
  writeln('TRUE')
else
  writeln('FALSE')
end
```