**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

8 – 9 класс

2021 – 2022 учебный год

Отборочный этап

Задача 1. Максимум 16 баллов

Решить уравнение при $a \neq 0; a \neq \pm 1$

$$\frac{(x-a^2)(x-a^3)}{a(a+1)(a-1)^2} - \frac{(x-a)(x-a^3)}{a(a-1)^2} + \frac{(x-a)(x-a^2)}{(a+1)(a-1)^2} = x^3$$

Решение

Левая часть уравнения – многочлен $P(x)$ степени не выше второй.
Вычислим $P(a) = a;\ P(a^2) = a^2;\ P(a^3) = a^3$.
Заметим, что при $a \neq 0; a \neq \pm 1$ числа $a;\ a^2;\ a^3$ различны.
Отсюда следует, что $P(x) = x$.
Остается решить уравнение $x = x^3$, решениями которого являются
$x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm 1$.

Ответ: $x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm 1$.

Критерии оценки

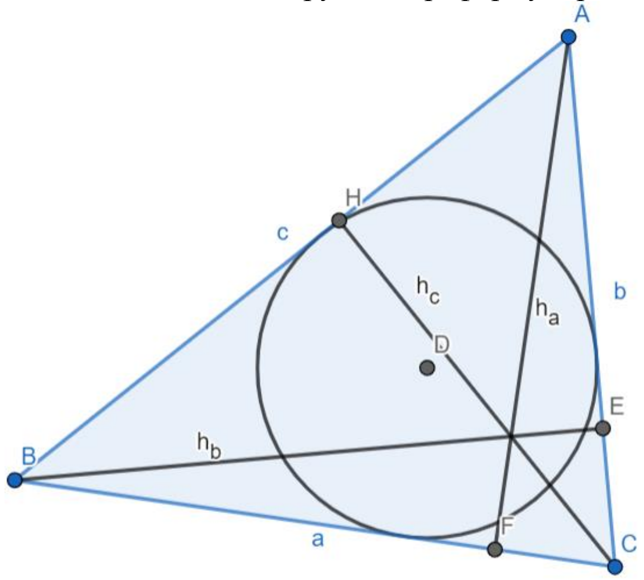
Получен верный ответ, верное обоснование - 16 баллов.
Получен верный ответ, но недостаточно обоснован (например, утверждается, что уравнение принимает вид $x = x^3$ без обоснования) - 8 баллов.
Получен уравнение $x = x^3$, имеется обоснование, но потерян корень $x_1 = 0$ - 6 баллов.
Получено уравнение $x = x^3$, но отсутствует обоснование; если потерян корень $x_1 = 0$ – 3 балла

Задача 2. Максимум 16 баллов

Населенные пункты $A,\ B$ и C соединены прямолинейными дорогами. Расстояние от населенного пункта A до дороги, соединяющей населенные пункты B и C равно 100 км, а сумма расстояний от пункта B до дороги, соединяющей A и C, и от пункта C до дороги, соединяющей A и B, равна 300 км. Известно, что пункт D равноудален от дорог, соединяющих пункты A, B, C и лежит внутри области, ограниченной этими дорогами. Любой житель всех населенных пунктов тратит не более 1 л топлива на каждые 10 км дороги. Какой максимальный объем топлива понадобился бы автомобилисту, которому нужно добраться от населенного пункта D до любой из дорог, соединяющих остальные населенные пункты между собой?

Решение

Населенные пункты образуют треугольник ABC, пункт D при этом, являясь точкой, равноудаленной от сторон треугольника есть инцентр данного треугольника (т.е. центр вписанной окружности). Заметим, что расход топлива будет максимален, когда максимально расстояние от точки D до сторон треугольника ABC, или, что то же самое, когда радиус r вписанной в данный треугольник окружности будет максимален в условиях задачи. Условия задачи нетрудно переформулировать так (см. рис.):



ha=100, hb+hc=300,

где ha, hb, hc – суть высоты треугольника ABC. Несложно установить, что справедливо равенство:

1ha+1hb+1hc=1r.

В самом деле, пусть S – площадь треугольника, тогда

S=12aha=12bhb=12chc=pr.

Отсюда:

ha=2Sa, hb=2Sb, hc=2Sc,r=Sp.

И имеем:

1ha+1hb+1hc=a2S+b2S+c2S=a+b+c2S=pS=1r.

Из условия следует, что

1r=1100+1hb+1hc=1100+1hb+1300-hb=1100+300hb300-hb.

Радиус r максимален, когда сумма, стоящая в правой части равенства, минимальна. Но это равносильно максимальности выражения

hb300-hb.

А это есть квадратичная функция и ее максимум достигается в ее вершине, т.е., как нетрудно понять, при hb=150. Значит, максимальное значение радиуса вписанной окружности находится из равенства

1r=1100+300150300-150=1100+175=7300⇔r=3007 км.

Отсюда наибольший расход топлива составляет:

r10=307 л.

Ответ: 307 л.

Критерии оценки

1. Обосновано получен верный ответ: 16 баллов;
2. Имеется верная цепочка рассуждений и получен верный ответ, однако, не обосновано соотношение между высотами и радиусом вписанной окружности: 8 баллов;
3. Имеется верная цепочка рассуждений и получен верный ответ, однако, не обосновано, что наибольшее значение соответствующей функции будет при hb=150: 8 баллов;
4. Имеется в целом верная цепочка рассуждений, однако, решение задачи не доведено до конца либо имеющиеся обоснования не полны: 4 балла;
5. В остальных случаях: 0 баллов.

Задача 3. Максимум 16 баллов

Итоги торгов акциями компаний «a», «b», «c», «d», «e» прогнозировались двумя гуру финансового анализа. Пытаясь предположить результаты торгов за день, один из аналитиков рассчитал, что стоимости акций на конец дня распределятся по убыванию в последовательности «a», «b», «c», «d», «e». Но оказалось, что он не угадал ни места в рейтинге какой-либо акции, ни какой-либо пары следующих непосредственно друг за другом участников в рейтинге. Другой аналитик расположил стоимости акций по возрастанию, предполагая результат «b», «c», «e», «a», «d», и определил правильно рейтинговые номера двух акций, а также точный рейтинговый порядок для двух пар следующих друг за другом акций (например, для пары «b» и «c», или «c» и «e» и т.д.) Каков был на самом деле результат торгов?

Решение:

Рассмотрим прогноз второго гуру.
Очевидно, если в правильно указанную пару входит один правильно указанный элемент, то и другой элемент пары — правильно указанный.

Последовательность «d», «a», «e», «c», «b» (запишем результат второго гуру по убыванию) содержит четыре пары: da, ae, ec, cb. Две из них угаданы. Допустим, эти две пары содержат общую букву (dae, aec, ecb). Тогда образуется тройка, в которой верно угадан порядок.
Определяемся с двумя верно угаданными местами букв? Если хоть одна такая буква в тройке, то вся тройка состоит из верно угаданных мест букв, а этого не может быть, так как таких букв только две. Если же обе буквы вне тройки, то все 5 букв стоят на своих местах, что тем более не соответствует условию.

Итак, из четырех пар надо выбрать две, не имеющие общей буквы. Очевидно, это можно сделать тремя способами: (da,ec); (da,cb); (ae,cb). В каждом из этих способов одна из двух пар должна содержать верно угаданные буквы, а другая — неверно. Рассмотрев наши три случая, видим, что в первом и третьем возможна только одна последовательность, а во втором — две. Получаем 4 последовательности: dabec – первый способ; edacb и dacbe – второй способ; aedcb - третий способ.

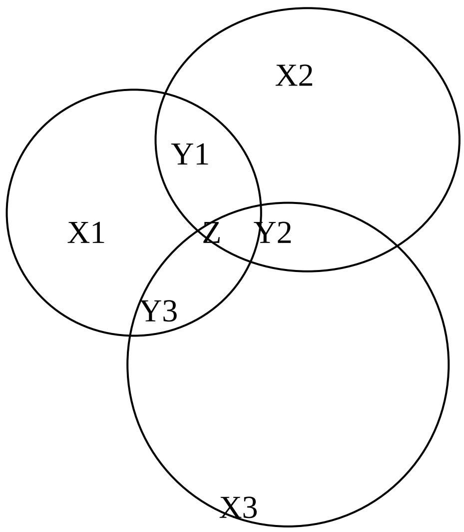
Рассмотрев эти 4 последовательности с позиции первого гуру, видим, что удовлетворяет условиям только одна: edacb.

Критерии оценки:
1. Приведено решение и обоснованный ответ, в котором одна из букв находится на верном месте 3 балла.
Ответ: по убыванию dab**c**e – 3 балла.
2. Приведено решение и обоснованный ответ, в котором на верном месте находятся две буквы 6 баллов.
Ответ: по убыванию dae**cb** – 6 баллов.
3. Приведено решение и обоснованный ответ, в котором на верном месте находятся три буквы – 9 баллов
Ответ: по убыванию de**acb** – 9 баллов.
4. Приведено решение и обоснованный ответ, в котором на верном месте находятся пять букв **(задача решена полностью!)** – 16 баллов.
Ответ: по убыванию **edacb** – 16 баллов.

Задача 4. Максимум 16 баллов

Три аудитора тестировались на знание действующего законодательства. Первый правильно ответил на 55 вопросов, второй – на 50, а третий – на 45. Оказалось, что втроем они правильно ответили на 80 вопросов. Вопрос считался «трудным», если на него правильно ответил только один аудитор. Вопрос считался «легким», если на него правильно отвечали все трое. На сколько больше оказалось «сложных» вопросов, чем «простых»?

Решение
Рассмотрим решение при помощи кругов Эйлера.



Из диаграммы видно, что:
1. Число сложных вопросов X1+X2+X3=X
2. Число простых вопросов Z
3. Число средних вопросов Y1+Y2+Y3=Y
4. Всего задано вопросов X+Y+Z.
Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} X+Y+Z=80 \\ X1+Y1+Y3+Z = 55 \\ X2+Y1+Y2+Z = 50 \\ X3+Y2+Y3+Z = 45 \end{cases}$$

Складывая три последних уравнения, получаем
X+2Y+3Z=55+50+45
X-Z=2*80-55-50-45=10

Ответ: 10

Критерии оценки:
- верно составлена система и получен правильный ответ – 16 баллов,
- система составлена верно, но получен неправильный ответ – 6 баллов,
- система не составлена или составлена неверно, при этом получен правильный ответ – 2 балла,
- система не составлена или составлена неверно, при этом получен неправильный ответ, или ответ отсутствует – 0 баллов.

Задача 5. Максимум 20 баллов

Командир танкового батальона в честь присвоения нового воинского звания решил пригласить военнослужащих на танковый фестиваль, на котором главным лакомством является гречневая каша. Командир обнаружил, что если выстроить солдат по росту, то прослеживается некоторая закономерность в изменении их функций спроса. Спрос на гречневую кашу самого низкого солдата имеет вид $Qd = 510 - 5{,}1P$, спрос следующего по росту $Qd = 520 - 5{,}2P$, следующего – $Qd = 530 - 5{,}3P$ и так далее. Индивидуальный спрос командира на гречневую кашу имеет вид $Qd = 500 - 5P$. Командир батальона всегда старается накормить как можно больше солдат. Кроме командира и приглашенных им солдат, никто не предъявляет спрос на гречневую кашу. На фестивале гречневую кашу предлагают 25 совершенно конкурентных фирм, предложение каждой из которых характеризуется функцией $Qs = 302P$. Командир батальона, посовещавшись со своей семьей, решил сделать сюрприз – первоначально гости и сам командир будут принимать решение о потреблении гречневой каши, полагая, что все будут оплачивать её самостоятельно, но в конце торжества семья командира оплатит общий счет из своих накоплений, которые составляют 2525000 денежных единиц. Если данной суммы будет недостаточно, то командир попросит всех гостей поровну разделить остаток счета. Известно, что равновесная цена установилась на уровне 20 денежных единиц. Считайте, что если гостям, как и командиру, приходится вносить некоторую фиксированную плату, то внесенная оплата не влияет на их спрос на гречневую кашу.

(а) Как задаётся индивидуальный спрос 60-ого солдата, приглашённого на праздник? Как будет задаваться совокупный спрос на гречневую кашу, если командир планирует пригласить 40 солдат и сам не откажется от каши? Объясните построение функции спроса в этом случае.

(б) Сколько солдат командир пригласил на праздник? Пришлось ли гостям оплатить часть счета? Если да, то сколько каждый из них заплатил?

Решение

(a) Командир старается накормить как можно больше солдат, а значит, в первую очередь он будет приглашать относительно низких солдат – при прочих равных, их потребление каши меньше.

Заметим, что индивидуальный спрос солдат определяется по формуле $Q_d = 500 + 10n - (5 + 0{,}1n)P$, где n – порядковый номер солдата. Также заметим, что все потребители готовы приобретать товар при $P \in [0; 100]$, а значит, чтобы найти рыночный спрос достаточно просуммировать функции индивидуального спроса.

Индивидуальный спрос 60-ого солдата имеет вид $Q_d = 1100 - 11P$. Чтобы найти спрос 40 солдат можно воспользоваться формулой арифметической прогрессии:

$$Q_d = \frac{510 - 5{,}1P + 500 + 10n - (5 + 0{,}1n)P)}{2} \cdot n$$

$$Q_d = \frac{1410 - 14{,}1P}{2} \cdot 40$$

$$Q_d = 28200 - 282P$$

Добавив спрос командира, получаем рыночный спрос: $Q_d = 28700 - 287P$.

Ответ: $Q_d = 1100 - 11P$, $Q_d = 28700 - 287P$**.**

(b) Зная индивидуальное предложение одной фирмы, найдём рыночное предложение:

$Q_s = 302P \cdot 25 = 7550P$

Известно, что $Q_s(20) = Q_d(20)$, а значит, $Q_d = 7550 \cdot 20 = 151000$.

Из предыдущего пункта мы знаем, что

$Q_d = 5n^2 + 505n + 500 - (0{,}05n^2 + 5{,}05n + 5)P$

$Q_d(20) = 4n^2 + 404n + 400 = 151000$

$(4n + 1004)(n - 150) = 0$

$n_1 = -251, n_2 = 150.$

Очевидно, что $n > 0$. Командир пригласил 150 гостей.

$TR = 151000 \cdot 20 = 3020000 > 2525000$ – расходы на гречневую кашу превышают бюджет семьи, а значит, солдаты помогут оплатить часть счета. Каждый солдат внесет сумму в размере $\frac{495000}{150} = 3300$ денежных единиц.

Ответ: командир пригласил 150 гостей, каждый из которых внес оплату в 3300 денежных единиц.

Критерии оценки

(a) Сформулирован индивидуальный спрос – (3б), сформулирован рыночный спрос – (5б).

(b) Сформулирована функция рыночного предложения – (2б), определено равновесное количество – (2б), сформулирована функция рыночного спроса в зависимости от количества гостей – (2б), определено максимальное количество гостей – (3б), определено поведение гостей и их оплата счета – (3б).

Штраф в 1 балл за арифметические ошибки, которые не привели к существенному искажению результатов. Альтернативные решения могут быть оценены в полное количество баллов, если содержат правильную и обоснованную последовательность действий.

Задача 6. Максимум 16 баллов

Многие универсальные интернет-магазины, в ассортименте которых может быть несколько миллионов наименований товаров, доставляют заказы своим покупателям бесплатно. При этом большие заказы и заказы, в которых всего два наименования товаров, могут быть разделены и доставлены покупателю двумя партиями, в разные дни. Объясните, почему при бесплатной доставке товаров покупателям интернет-магазинам может быть выгодно осуществлять доставку товаров из одного заказа в разные дни?

Решение

У больших интернет-магазинов, как правило, много складов для хранения товаров, расположенных в разных районах города, регионах страны, а также много пунктов выдачи товаров. На доставку товаров покупателям из интернет-магазина в разные дни может влиять множество разных факторов. Приведем в пример некоторые из них.

1) Разные сроки поступления товаров на склад интернет-магазина от разных поставщиков.
2) Склады, на которые доставляются товары от разных поставщиков, могут находиться в разных районах города.
3) Товары на склады интернет-магазина могут приходить из разных городов, регионов страны.

Расходы на хранение каждого товара на складах, а также расходы на перевозку товаров для объединения всего заказа одного покупателя в одну доставку могут оказаться столь значительными, что компании оказывается более выгодным доставить покупателю товары из одного заказа в разные дни.

Критерии оценки.
Аргументированно указана только одна причина – 8 баллов.
Аргументированно указано не менее двух причин – 16 баллов.