Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике
2020 - 2021 учебный год
Заключительный этап

8 – 9 класс

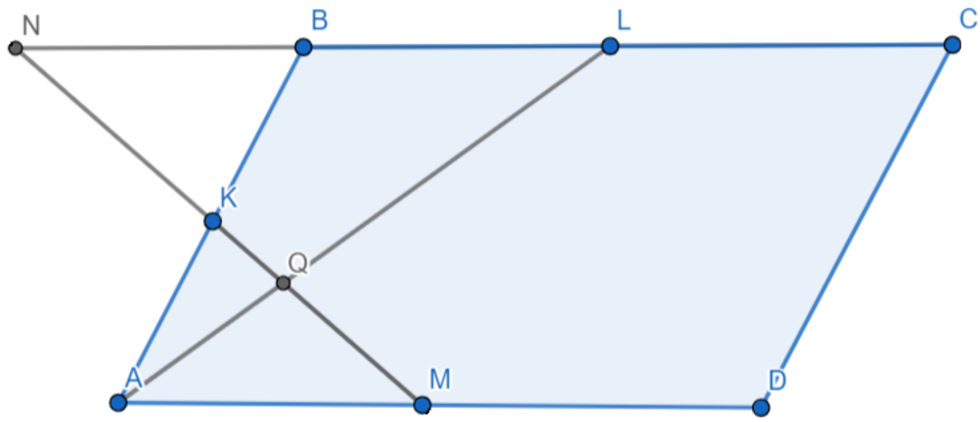
Задание 1. Максимум 20 баллов

На сторонах AB, AD, BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K, M, L соответственно так, что $AK:KB=\alpha$, $AM:MD=\beta$, $BL:LC=\gamma$. Отрезок KM пересекает AL в точке Q. Найдите отношение $AQ:QL$ и $KQ:QM$. Если $\alpha=1:3$, $\beta=2:3$, $\gamma=4:1$.

Запишите развернутое решение и ответ на листе А4. Загрузите скан-копию/фотографию выполненного задания.

1. $\alpha=1:3,\ \beta=2:3,\ \gamma=4:1.$
2. $\alpha=1:3,\ \beta=3:2,\ \gamma=4:1.$
3. $\alpha=1:3,\ \beta=2:3,\ \gamma=1:4.$
4. $\alpha=1:3,\ \beta=3:2,\ \gamma=1:4.$

Решение:



1. Проведем KM до пересечения с CB в точке N. Положим $AM=2y$, $MD=3y$, $AK=x$, $KB=3x$. Тогда $BL=4y$, $LC=y$. Треугольники AKM и NKB подобны, отсюда $NB=6y$, т.к. $AK:KB=1:3$. Следовательно, $NL=6y+4y=10y$. Треугольники NQL и AQM подобны, следовательно, $AQ:QL=AM:NL=2y:10y=1:5$. В то же время $NQ:QM=5:1$ и $NK:KM=3:1$. Положим $NK=3t, KM=t, NQ=5p, QM=p$. Отсюда

$$4t=6p \Rightarrow t=\frac{3}{2}p.$$

Значит, $KQ=NQ-NK=5p-3t=5p-\frac{9}{2}p=\frac{1}{2}p$, $QM=p$. Стало быть, $KQ:QM=1:2$.

Ответ: 1. 1:5, 1:2. **2.** 3:13, 1:3. **3.** 2:7, 1:8. **4.** 3:10, 1:12.

Критерии оценивания:

Все решено верно – 20 баллов.
Сделано дополнительное построение, доказано подобие треугольников– от 5 до 10 баллов.
В остальных случаях – 0 баллов.

Задание 2. Максимум 20 баллов

Решить уравнение $(x+a)(x+1+a)(x+2+a)(x+3+a)=3$, если а = 2

Запишите развернутое решение и ответ на листе А4. Загрузите скан-копию/фотографию выполненного задания.

Вариант 1.

Данные: $a = 2$

Вариант 2.

Данные: $a = -2$

Вариант 3.

Данные: $a = 3$

Вариант 4.

Данные: $a = -3$

Решение:

$$(x+a)(x+1+a)(x+2+a)(x+3+a)=3$$

$$(x^2+x(2a+3)+a^2+3a)(x^2+x(2a+3)+a^2+3a+2)=3$$

$$\mathrm{t} = x^2+x(2a+3)+a^2+3a+1 \Rightarrow (\mathrm{t}-1)(\mathrm{t}+1)=3$$

$$t^2=4 \Rightarrow t_1=2,\ x^2+x(2a+3)+a^2+3a-1=0$$

$$D=13$$

$$x_{1,2}=\frac{-2a-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$t_2=-2,\ x^2+x(2a+3)+a^2+3a+3=0$$

$$D=-3 \rightarrow \emptyset$$

Вар 1.

а = 2, $x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$

Вар 2.

а = - 2, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

Вар 3.

a = 3, $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{13}}{2}$

Вар 4.

a = - 3, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Критерии оценки
Верное решение – 20 баллов
Уравнение сведено к квадратному, но допущены арифметические ошибки при получении ответа – от 5 до 10 баллов
В остальных случаях – 0 баллов

Задание 3. Максимум 20 баллов

В корзинке лежат шары разного цвета: a красных, b синих, c черных, d белых и e зеленых. Найти наименьшее количество шаров, которые надо вытащить из этой корзинки, чтобы среди них было бы не менее N шаров одного цвета.

Если $a = 12;\ \ b = 11;\ \ c = 10;\ \ d = 9;\ \ e = 8;\ \ N = 8.$

Запишите развернутое решение и ответ на листе А4. Загрузите скан-копию/фотографию выполненного задания.

Вариант 1.

Данные: $a = 12;\ \ b = 11;\ \ c = 10;\ \ d = 9;\ \ e = 8;\ \ N = 8.$

Вариант 2.

Данные: $a = 13;\ \ b = 12;\ \ c = 11;\ \ d = 10;\ \ e = 9,\ N = 9$

Вариант 3.

Данные: $a = 14;\ \ b = 13;\ \ c = 12;\ \ d = 11;\ \ e = 10,\ N = \ 10$

Вариант 4.

Данные: $a = 15;\ \ b = 14;\ \ c = 13;\ \ d = 12;\ \ e = 11,\ N = 11$

Решение:

Принцип Дирихле: если n содержат (nk + 1) элементов (n, k – натуральные числа), то хотя бы одно множество содержит (k + 1) элемент.

Пусть вытащено 5(N – 1) шар. В худшем случае может оказаться так, что в этом наборе окажется (N – 1) шаров каждого цвета. Следовательно, надо вытащить 5(N -1) + 1 шар.

Вар. 1

5*7 + 1 = 36

Вар. 2

5*8 + 1 = 41

Вар. 3

5*9 + 1 = 46

Вар. 4

5*10 + 1 = 51

Критерии оценки

Все решено верно, решение обосновано – 20 баллов.
Применен верный метод, нет достаточных объяснений, но получен верный ответ – от 5 до 10 баллов.
Применен верный метод, нет достаточных объяснений, ответ не получен – до 5 баллов.
В остальных случаях – 0 баллов.

Задание 4. Максимум 20 баллов

Вариант 1

В школе проходит заочный этап командного турнира по геометрии, на котором результат участников оценивается по количеству баллов, полученных за полностью решенную задачу. Полное решение задачи по планиметрии оценивается в 7 баллов, а задачи по стереометрии – в 12 баллов. Победителем турнира становится команда, набравшая наибольшее количество баллов. Андрей организовывает свою команду из 3 человек, в которой он будет капитаном. Он размышляет над тем, пригласить ли в команду Володю и Жанну, **либо** Петю и Галину. Поэтому он попросил всех претендентов честно указать в таблице информацию о своих возможностях по решению задач за отведенный на этот этап турнира период. Известно, что альтернативные издержки каждого школьника по решению задач по планиметрии и стереометрии всегда постоянны.

Имя	Максимальное количество задач по стереометрии, если будет решать только их	Максимальное количество задач по планиметрии, если будет решать только их
Андрей	7	7
Володя	6	3
Жанна	3	18
Петя	12	3
Галина	7	14

Помогите Андрею определиться, какую пару школьников стоит взять себе в команду, если единственной целью команды является победа в турнире.

Решение:
Найдем, какой максимальный результат могла бы получить команда: Андрей, Володя, Жанна.
Андрей вместо 1 задачи по планиметрии может решать 1 задачу по стереометрии. Поскольку задача по стереометрии «стоит» дороже, ему необходимо специализироваться на задачах по стереометрии, заработав для команды 12*7=84 баллов.
Володя вместо 1 задачи по планиметрии может решать 2 задачи по стереометрии. Поскольку 1 задача по планиметрии «стоит» дешевле 2 задач по стереометрии, ему

необходимо специализироваться на задачах по стереометрии, заработав для команды 12*6=72 балла.
Жанна вместо 1 задачи по стереометрии может решать 6 задачи по планиметрии. Поскольку 1 задача по стереометрии «стоит» дешевле 6 задач по планиметрии, ей необходимо специализироваться на задачах по планиметрии, заработав для команды 7*18=126 баллов.
Итого, команда Андрей, Володя, Жанна максимально может заработать 84+72+126=282 балла.

Найдем, какой максимальный результат могла бы получить команда: Андрей, Петя, Галина.
Петя вместо 1 задачи по планиметрии может решать 4 задачи по стереометрии. Поскольку 1 задача по планиметрии «стоит» дешевле 4 задач по стереометрии, ему необходимо специализироваться на задачах по стереометрии, заработав для команды 12*12=144 балла.
Галина вместо 1 задачи по стереометрии может решать 2 задачи по планиметрии. Поскольку 1 задача по стереометрии «стоит» дешевле 2 задач по планиметрии, ей необходимо специализироваться на задачах по планиметрии, заработав для команды 7*14=98 балла.
Итого, команда Андрей, Петя, Галина максимально может заработать 84+144+98=326 баллов.
Таким образом, в команду Андрею стоит взять Петю и Галину.

Критерии оценивания:
Для сравнения выгоды от формирования каждой команды достаточно сравнить вклады только четверых участников: Володи, Жанны, Пети и Галины.
Проведенный любым корректным способом верный подсчет баллов, который каждый из них может принести команде – 4 балла.
Верный подсчет суммарного количества баллов (команды в целом или пары участников, которых Андрей пригласит в команду) – 2 балла.
Сравнение выгоды от каждой пары участников и верный ответ – 2 балла.
Любая арифметическая ошибка, которая не привела к существенному искажению результатов, штрафуется 1 баллом.
Любая арифметическая ошибка, которая привела к существенному искажению результатов, штрафуется 5 баллами.

Вариант 2

В школе проходит заочный этап командного турнира по физике, на котором результат участников оценивается по количеству баллов, полученных за полностью решенную задачу. Полное решение задачи по кинематике оценивается в 14 баллов, а задачи по термодинамике – в 24 балла. Победителем турнира становится команда, набравшая наибольшее количество баллов. Володя организовывает свою команду из 3 человек, в которой он будет капитаном. Он размышляет над тем, пригласить ли в команду Андрея и Татьяну, **либо** Семена и Марию. Поэтому он попросил всех претендентов честно указать в таблице информацию о своих возможностях по решению задач за отведенный на этот этап турнира период. Известно, что альтернативные издержки каждого школьника по решению задач по кинематике и термодинамике всегда постоянны.

Имя	Максимальное количество задач по кинематике, если будет решать только их	Максимальное количество задач по термодинамике, если будет решать только их
Володя	7	7
Семен	4	8
Мария	8	2
Андрей	2	12
Татьяна	2	1

Помогите Володе определиться, какую пару школьников стоит взять себе в команду, если единственной целью команды является победа в турнире.

Решение:

Найдем, какой максимальный результат могла бы получить команда: Володя, Семен, Мария.

Володя вместо 1 задачи по термодинамике может решать 1 задачу по кинематике. Поскольку задача по термодинамике «стоит» дороже, ему необходимо специализироваться на задачах по термодинамике, заработав для команды 24*7=168 баллов.

Семен вместо 1 задачи по кинематике может решать 2 задачи по термодинамике. Поскольку 1 задача по кинематике «стоит» дешевле 2 задач по термодинамике, ему необходимо специализироваться на задачах по термодинамике, заработав для команды 24*8=192 балла.

Мария вместо 1 задачи по термодинамике может решать 4 задачи по кинематике. Поскольку 1 задача по термодинамике «стоит» дешевле 4 задач по кинематике, ей необходимо специализироваться на задачах по кинематике, заработав для команды 14*8=112 баллов.

Итого, команда Володя, Семен, Мария максимально может заработать 168+192+112=472 балла.

Найдем, какой максимальный результат могла бы получить команда: Володя, Андрей, Татьяна.

Андрей вместо 1 задачи по кинематике может решать 6 задач по термодинамике. Поскольку 1 задача по кинематике «стоит» дешевле 6 задач по термодинамике, ему необходимо специализироваться на задачах по термодинамике, заработав для команды 24*12=288 баллов.

Татьяна вместо 1 задачи по термодинамике может решать 2 задачи по кинематике. Поскольку 1 задача по термодинамике «стоит» дешевле 2 задач по кинематике, ей необходимо специализироваться на задачах по кинематике, заработав для команды 14*2=28 баллов.

Итого, команда Володя, Андрей, Татьяна максимально может заработать 168+288+28=484 балла.

Таким образом, в команду Володе стоит взять Андрея и Татьяну.

Критерии оценивания:

Для сравнения выгоды от формирования каждой команды достаточно сравнить вклады только четверых участников: Семена, Марии, Андрея и Татьяны.

Проведенный любым корректным способом верный подсчет баллов, который каждый из них может принести команде – 4 балла.

Верный подсчет суммарного количества баллов (команды в целом или пары участников, которых Володя пригласит в команду) – 2 балла.

Сравнение выгоды от каждой пары участников и верный ответ – 2 балла.

Любая арифметическая ошибка, которая не привела к существенному искажению результатов, штрафуется 1 баллом.
Любая арифметическая ошибка, которая привела к существенному искажению результатов, штрафуется 5 баллами.

Задание 5. Максимум 20 баллов

В городе Эйфьядль продают рунные камни. Известно, что первый торговец предлагает фиксированную скидку в n% за покупку каждого 5 камня, а второй торговец увеличивает скидку на 1% за каждый следующий купленный камень (за 1 камень - 0%, за 4 камень - 3% и так далее), но не более 20%. Поступил заказ на 100 рунных камней. Считайте, что все камни нужно покупать только у одного торговца.
а) Найдите минимальный размер скидки n первого торговца, чтобы покупателю было выгоднее именно у него купить все камни.
б) Какое наибольшее количество рунных камней выгоднее купить у первого торговца со скидкой, найденной в пункте а)?
в) Допустим теперь, что покупатель увеличил заказ до 175 камней. Узнав это, второй торговец увеличил лимит скидки до 30% и прирост скидки до 2%. Может ли первый торговец конкурировать со вторым?

Решение и критерии оценивания:

а) Примем стоимость одного рунного камня без скидки за 1 д.е. Найдём среднюю стоимость рунного камня у первого торговца:

(20(1-n)+80)/100=(100-20n)/100
У второго торговца:
(1+0,99+0,98+...+0,81+0,8*80)/100=82,1/100

Тогда:
100-20n<82,1
n>17,9/20 n>0,895
Тогда n=90%
Ответ: 90%.

Критерии оценивания:
логически обоснованное решение - 5 баллов, за логически обоснованное решение с арифметической ошибкой - 0 баллов

б) Найдём среднюю стоимость рунного камня у второго торговца:
(1+0,98+...+0,72+0,7*159)/175=125,06/175
А у первого торговца:
(35*(1-n)+140)/175=(175-35n)/175
Тогда:
125,06>175-35n
n>49,94/35
n>1,427, что невозможно, т.к. максимальная скидка составляет 100%, а доплачивать за покупку камня серьёзно сказывается на издержках торговца. Ответ - нет, n>100%

Критерии оценивания:
логически обоснованное решение - 7баллов,
обоснованное решение с арифметической ошибкой - 3,5 балла,
неверный ответ - 0 баллов

в) Обозначим количество камней за X. Запишем общее уравнение средней стоимости камня первого и второго торговца:
1: (x/5*(1-0,9)+(x-x/5))/x
2: (18,1+0,8*(x-20))/x
Получим:
0,1x/5+x-x/5<18,1+0,8*(x-20)
x-0,18x-0,8x<2,1
0,02x<2,1
x<105
Тогда: x=104 камня.
Ответ: 104.

Критерии оценивания:
логически обоснованное решение - 8 баллов,
решение с арифметической ошибкой - 0 баллов,
не решенный пункт а) - 0 баллов.