Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

10 – 11 класс

2020 – 2021 учебный год

Отборочный этап

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит познакомиться с инструкцией:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 по московскому времени 16 ноября 2020 года. Иного таймера нет.
2. Рекомендуем загрузить работу не менее чем за 1 час до окончания приема работ: в 00:00 по московскому времени 17 ноября 2020 года система заблокирует прием работ автоматически.
3. Порядок оформления работы:
   3.1. Создать новый файл в текстовом редакторе (например, MS Word).
   3.2. Настроить шрифт Times New Roman, Arial или другой общеупотребимый, кегль 12 либо 14, междустрочный интервал 1,15 либо 1,5, абзацный отступ 1,25.
   3.3. Внести ответы и решения (где это необходимо), соблюдая порядок, указанный в заданиях
   3.4. Проверить соблюдение требований к объему, если они указаны в задании.
   3.5. Выделить номера заданий полужирным шрифтом.
   3.6. Также можно написать решения на белых листах формата А4 разборчиво яркой пастой синего либо черного цвета, отсканировать либо сфотографировать в высоком качестве и объединить листы в 1 файл.
4. Порядок сохранения работы:
   4.1. Проверить, что в файле с ответами и решениями все корректно.
   4.2. Сохранить файл в формате PDF. Например, для MS WORD: Файл→Сохранить как…→Тип файла PDF (*pdf).
   4.3. Открыть созданный файл в формате PDF. Проверить, что при сохранении не изменилось отображение элементов текста и графики (при наличии).
5. Порядок загрузки работы на сайт:
   5.1. Зайти в Личный кабинет: https://olymp.ranepa.ru/shkolnik/olimpiada/lichnyj-kabinet по своему логину и паролю.
   5.2. Нажать кнопку «Загрузить ответы» в разделе профиля олимпиады.
   5.3. Выбрать файл с ответами и решениями в формате PDF для загрузки.
   5.4. Проверить получение автоматического письма, направляемого системой на электронную почту при загрузке работы.
   5.5. Нажать CTRL+F5 для обновления страницы Личного кабинета.
   5.6. Открыть загруженный файл и проверить корректность его отображения.

6. Замена файла при некорректной загрузке:
   У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену.
7. По каждому профилю загрузить можно только 1 файл. При замене файла ранее загруженный будет удален и заменен на новый.
8. Прием работ осуществляется только через Личный кабинет. Работы, направленные любым другим способ, в том числе по электронной почте, не оцениваются.
9. Обращаем ваше внимание, что файл простым изменением расширения на PDF системой не читается. За такую работу будет выставлена оценка 0 баллов.
10. Работа выполняется только самостоятельно. Коллективно выполненные работы будут аннулированы.
11. Работа аннулируется за использование заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточники: научные работы, статьи, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными.
12. Работа с любыми указанными персональными данными участника, в том числе подписанная, будет аннулирована.

Задача 1.

К олимпиаде 2064 года группа архитекторов нашла территорию под строительство двух стадионов, объединённых одной концепцией, территории стадионов не являются кругами. На этой территории две природные возвышенности (можно считать их точечными). Границей стадионов было решено сделать линию, для каждой точки которой произведение расстояний до данных возвышенностей постоянно и равно квадрату половины расстояния между выбранными возвышенностями.

Вы – член проектной команды. Необходимо:

1. Вывести математическое уравнение, задающее данную линию в декартовой системе координат.
2. Считая, что площадь, ограниченная данной линией равна двум квадратам половины расстояния между возвышенностями, определить допустимый диапазон этого расстояния, при условии, что общая площадь стадионов не может быть меньше 162 тыс. кв. м. и больше 200 тыс. кв. м.
3. В рамках ограничений пункта 2, с учетом того, что по экологическим требованиям необходимо на одно посадочное место выделить не менее 2 кв. м. площади, а для проведения соревнований необходимо оставить не менее 40 тыс. кв. м. площади на один стадион, найти максимальную сумму, на которую можно продать билеты в рамках одного мероприятия, если 60 % от всех посадочных мест не могут стоить дороже 50 у.е., 30 % - дороже 100 у.е., остальные билеты – дороже 200 у.е.

Решение:

1.Рассмотрим простейший случай: если расстояние между возвышенностями 2c, расположены они на оси OX, и начало координат делит отрезок между ними пополам, то в прямоугольных координатах:

F1(- c; 0) и F2(c; 0). Возьмём произвольную точку M(x; y). Произведение расстояний от возвышенностей до точки M есть,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и по определению оно равно c^2:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2+y^2} = c^2$$

Возводим в квадрат обе части равенства:

$$\left((x+c)^2+y^2\right) \cdot \left((x-c)^2+y^2\right) = c^4$$

Раскрываем скобки, упрощаем, получаем:

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$$

2. Найдем ограничения на c.

$$81000 \ \leq c^2 \leq 100000$$

$$90\sqrt{10} \ \leq A \leq 100\sqrt{10}$$

200-40=160

160:2=80

80000*0,6*50=2 400 000

80000*0,3*100= 2 400 000

80000*0,1*200= 1 600 000

Итого 6 400 000

Критерии:

1. Задача решена полностью, с обоснованием, план нарисован, границы обоснованы, (принимается как вывод через ГМТ, так и «угадывание» по определению лемнискаты), все пункты решены верно – 100% выделенных на задачу баллов.
2. За каждую счетную задачу (п. 2-4) не более 25% выделенных на задачу баллов.
3. В задаче не дано объяснений – 0% выделенных на задачу баллов.
4. За верные идеи, которые не были доведены до конца – не более 25% выделенных на задачу баллов.

Задача 2.

Найти все положительные x, y, z, при которых выражение

$$\frac{x^2yz}{324} + \frac{144y}{xz} + \frac{9}{4xy^2}$$

принимает наименьшее значение и среди всех таких x, y, z выражение

$$\frac{z}{16y} + \frac{x}{9}$$

тоже минимально.

Решение:

Согласно неравенству Коши

$$\frac{x^2yz}{324} + \frac{144y}{xz} + \frac{9}{4xy^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2yz}{324} \cdot \frac{144y}{xz} \cdot \frac{9}{4xy^2}} = 3.$$

При этом равенство возможно только в том случае, когда

$$\frac{x^2yz}{324} = \frac{144y}{xz} = \frac{9}{4xy^2}.$$

Отсюда

$$x^3z^2 = 46656, \qquad 64y^3 = z.$$

Следовательно, $x^3(64y^3)^2 = 46656 \Longrightarrow 64x^3y^6 = 729 \Rightarrow 4xy^2 = 9$.

В итоге: $x = \frac{9}{4y^2},\ z = 64y^3$. Подставив полученное в выражение

$$\frac{z}{16y} + \frac{x}{9},$$

придем к выражению

$$4y^2 + \frac{1}{4y^2} \geq 2\sqrt{4y^2 \cdot \frac{1}{4y^2}} = 2.$$

При этом наименьшее значение достигается, когда $4y^2 = 1$, т.е. $y = \frac{1}{2}$. Следовательно, $x = 9,\ z = 16$.

Ответ: $x = 9, y = \frac{1}{2}, z = 16$.

Задача 3.
Точка M лежит на параболе $y = 2x^2 - 3x + 4$, а точка F на прямой $y = 3x - 4$.
Найдите наименьшее значение MF.

Решение
Проведем к параболе касательную параллельную прямой $\boldsymbol{y = 3x - 4}$. Найдем абсциссу точки касания:

$$f'(x) = 4x - 3 = 3 \Rightarrow x = 1{,}5.$$

Точка $A(1{,}5; 4)$ – точка касания параболы с прямой параллельной $y = 3x - 4$. Найдем расстояние от точки A до прямой $y = 3x - 4$ по формуле:

$$d = \frac{|4 - 3 \cdot 1{,}5 + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Задача 4.
Волшебник Магус придумал заклинание для увеличения своих запасов золота. Он взял х золотых монет, прибавил к ним величину, обратную этому количеству, а затем произнес: «В квадратум сумус возводитус!» (после чего данная сумма возвелась в квадрат) и забыл обо всем на 2020 дней. Он рассчитывал на то, что каждый день его запасы будут увеличиваться на эту же величину, т е каждый день к имеющимся накоплениям будет прибавляться еще один квадрат указанного выражения. Но заклинание не было четким, поэтому Вселенная распорядилась им по-своему.
Помимо возведения суммы в квадрат, х в обоих слагаемых каждый день возводилось в степень, равную порядковому номеру дня.
В конце 2020 дня Магус вспомнил про заклинание, посмотрел на сумму и ахнул. Хотел применить заклинание «Упроститус», но вспомнил, что тратить магическую силу не стоит, особенно если владеешь элементарными математическими знаниями. И быстренько упростил полученное выражение.

Не пользуясь магией, напишите:
1. Какое выражение увидел Магус в конце 2020 дня?
2. Как Магус его упростил?
3. На родине Магуса налог в размере 13 % платится только с той части средств, которая не зависит от объема вложений. В каком объеме Магус заплатит налог?

Решение задачи:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \dots + \left(x^{2020} + \frac{1}{x^{2020}}\right)^2 =$$

$$= \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + \left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right) + \dots + \left(x^{4040} + 2 + \frac{1}{x^{4040}}\right) =$$

Количество скобок равно 2020

$$= 2 \cdot 2020 + \left(\frac{1}{x^{4040}} + \frac{1}{x^{4038}} + \frac{1}{x^{4036}} + \dots + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} + 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{4040}\right) - 1 =$$

Добавили и вычли 1, в скобке образовалась сумма $(2 \cdot 2020 + 1) = 4041$ членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{x^{4040}}$, знаменателем x^2

$$= 4039 + \frac{\frac{1}{x^{4040}}\left(x^{2(4041)} - 1\right)}{x^2 - 1} = 4039 + \frac{(x^{8082} - 1)}{x^{4040}(x^2 - 1)}$$

Ответ: $4039 + \frac{(x^{8082}-1)}{x^{4040}(x^2-1)}$

Критерии оценки:
Если не дошли до геометрической прогрессии, то 0%;
Если вычислена сумма геометрической прогрессии, но допущены арифметические ошибки, то 50%;
Если ответ совпал, то 100%.

Задача 5.

В Преуспевающем государстве с индексом Джини, равным 0,1, живут только две равночисленные группы населения - бедные и богатые. Внутри каждой группы жители не отличаются своими доходами. После проведения экономических реформ в Преуспевающем в стране возник средний класс (жители со средним доходом), численность которого оказалась равной численности бедных и богатых. Внутри каждой группы жители по-прежнему не отличаются своими доходами. При этом доля дохода бедных в общем доходе жителей страны сократилась вдвое, а индекс Джини не изменился.
Определите, если это возможно, во сколько раз изменилась доля доходов богатых в Преуспевающем, либо обоснуйте, почему невозможно определить эту величину.

Решение:

Пусть до проведения реформы X – доля бедных в населении государства, а Y- доля доходов бедных в совокупных доходах жителей государства. Тогда коэффициент Джини можно рассчитать по формуле:

$$G_0 = \frac{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}XY + \frac{1}{2}(Y+1)(1-X)\right]}{\frac{1}{2}} = X - Y.$$

Так как известно, что $G_0 = 0{,}1$, а $X = 0{,}5$, то $Y = 0{,}4$.
Тогда после проведения реформы доля бедных стала равна доле средних и доле богатых и равна 1/3. А доля доходов бедных в общей доле доходов жителей стала бы равна 0,2. Пусть Z - доля доходов жителей со средним доходом в общем объеме доходов жителей страны. Тогда коэффициент Джини после проведения реформы можно было бы рассчитать по формуле:

$$G = \frac{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}0{,}2 * \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(0{,}2 + 0{,}2 + Z) * \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(0{,}2 + Z + 1) * \frac{1}{3}\right]}{\frac{1}{2}} = 0{,}1.$$

Откуда находим, что $Z = 0{,}45$, что противоречит тому, что кривая Лоренца является выпуклой линией. Это означает, что провести такую реформу с сохранением индекса неравенства доходов в государстве невозможно.

Критерии оценивания:
Верно вычислена доля доходов бедных до проведения реформы – 3 балла.
Верно вычислена доля доходов бедных после проведения реформы – 1 балл.
Верно вычислена возможная доля среднего (или богатого) населения при условии, что такая реформа была бы возможна – 5 баллов.
Дан аргументированный верный ответ о невозможности проведения такой реформы – 4 балла.

Арифметическая ошибка, которая не привела к искажению результатов по существу, штрафуется 1 баллом.
Арифметическая ошибка, которая привела к искажению результатов по существу, штрафуется 4 баллами.

Задача 6.
Студент Иванов длительное время изучал работу единственного на территории студенческого кампуса кафе «Бридж» и выяснил, что «Бридж» каждый день продает 20 кг воздушной кукурузы по цене 100 ден.ед. за кг, причем ценовая эластичность спроса при этом объеме продаж равна (-5), средние издержки производства кукурузы постоянны, а функция спроса на воздушную кукурузу убывающая и линейная. Иванов готов предложить «Бриджу» революционную технологию производства воздушной кукурузы, сокращающую издержки изготовления каждого ее килограмма в 2 раза по сравнению с текущим производством. Все расходы на внедрение новой технологии студент берет на себя, однако предлагает «Бриджу» выплачивать ему за это ежемесячную компенсацию в течение одного года.

1. Какова ежедневная прибыль кафе «Бридж» до использования новой технологии?
2. Какую максимальную долю прибыли кафе «Бридж» готово будет отдавать студенту в виде компенсации?
3. Какой максимальный годовой доход (в %) от вложенных средств может получить Иванов, если его затраты на внедрение новой технологии составили 5000 ден.ед.? Считайте, что никакие иные способы «пустить деньги в рост» Иванов не использует.

Решение:
1. Найдем сначала функцию спроса на воздушную кукурузу. В общем виде она имеет вид $Q(p) = a - bp$. Известно, что при цене 100 и количестве 20 ценовая эластичность спроса равна -5, т. е. $\varepsilon = \frac{\Delta Q}{\Delta p} * \frac{p}{Q}$, или $-5 = \frac{\Delta Q}{\Delta p} * \frac{100}{20}$. Откуда $\frac{\Delta Q}{\Delta p} = -1$. Так как функция спроса линейная, то $\frac{\Delta Q}{\Delta p} = -b = -1$. Тогда $b = 1$, а учитывая, что при $Q = 20, p = 100$, $a = 20 + 100 = 120$. Функция спроса, следовательно, имеет вид $Q(p) = 120 - p$. Обратная функция спроса $p(Q) = 120 - Q$.
Так как конкурент до появления кафе «Бридж» являлся монополистом, а средние издержки кафе постоянны, то он максимизировал свою прибыль $\pi = (120 - Q)Q - cQ$, где $c -$ средние (и предельные) издержки кафе. Данная функция прибыли представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз. Значит, максимум прибыли будет достигаться при $Q = \frac{(120-c)}{2}$. Известно, что кафе каждый день продает по 20 кг кукурузы, следовательно $Q = 20$ – выпуск, максимизирующий его прибыль. Тогда $\frac{(120-c)}{2} = 20, c = 80$.
Таким образом, ежедневная прибыль кафе составит $\pi = pQ - cQ = (p - c)Q = (100 - 80) * 20 = 400$ ден.ед.

2. Так как благодаря новой технологии средние издержки производства сократятся вдвое, то теперь они будут равны $80/2 = 40$. Прибыль кафе «Бридж» без выплаты компенсации студенту при этом равна $\pi = (120 - Q)Q - 40Q$. Решая задачу монополиста аналогично пункту 1, найдем, что кафе, используя новую технологию будет выпускать 40 кг кукурузы по цене 80 ден.ед. Без выплаты студенту прибыль кафе составит тогда 1600 ден.ед. «Бридж» примет предложение студента, только если прибыль от использования новой технологии не уменьшится. Тогда максимальная доля прибыли, которую кафе готово потратить на выплату компенсации составит (1600-400)/1600=0,75.

3. Если ежедневный доход студента в качестве компенсации будет равен 1200 ден.ед,, то его годовой доход на вложенные 5000 ден.ед. составит 1200*365*100/5000=8760%.

Критерии оценивания:

1. Верно найдена функция спроса – 2 балла.

Верно обоснован максимум функции прибыли – 1 балл.

Верно найдены средние (и предельные) издержки кафе – 1 балл.

Верно найдена ежедневная прибыль кафе – 1 балл.

Арифметическая ошибка, которая не привела к искажению результатов по существу, штрафуется 1 баллом.

Арифметическая ошибка, которая привела к искажению результатов по существу, штрафуется 3 баллами.

2. Верно найдены средние (и предельные) издержки кафе после внедрения новой технологии – 1 балл.

Верно решена задача максимизации монополиста и найдено равновесие – 2 балла.

Верно найдена ежедневная прибыль кафе после внедрения новой технологии – 1 балл.

Верно найдена доля прибыли, которую кафе будет готово выплачивать

Арифметическая ошибка, которая не привела к искажению результатов по существу, штрафуется 1 баллом.

Арифметическая ошибка, которая привела к искажению результатов по существу, штрафуется 3 баллами.

Задача 7.

Спрос на туристические путевки в живописном развивающемся регионе Релаксандия описывается функцией Q(p)=10000-2p, а предложение функцией Q(p)=2p, где Q – количество дней, которые туристы путешествуют по Релаксандии, а p – цена одного дня путешествия в регионе. Власти Релаксандии решили привлечь внимание туристов к региону и объявили о том, что каждый турист, посетивший Релаксандию, получит компенсацию в размере S % от стоимости каждого дня путешествия по региону. Объявление о такой поддержке путешественников привело к тому, что в регионе появилось много новых туристических компаний, предлагающих свои услуги путешественникам. Вследствие этого предложение путевок в регионе выросло в полтора раза.

1. Какую совокупную выручку получали продавцы путевок в Релаксандии до объявления о компенсации?
2. Смогут ли власти региона установить такую компенсацию S, чтобы совокупная выручка продавцов путевок не уменьшилась? Если да, то найдите минимальное значение S, удовлетворяющее этому условию.
3. Проиллюстрируйте решение пунктов (1) и (2) графически на одном рисунке.
4. Предположим, власти региона установили минимальную компенсацию, найденную вами в пункте (2). Как изменилась при этом, в среднем, прибыль каждой компании, продающей путевки?

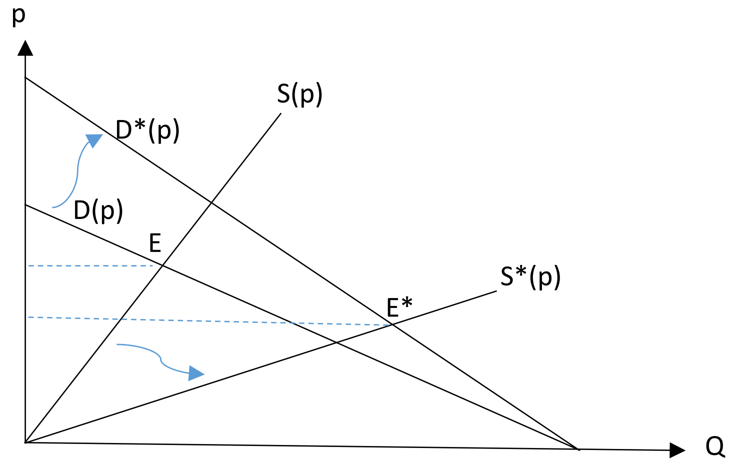
Решение:

1. До объявления о компенсации равновесие в отрасли найдем, приравняв спрос и предложение: 10000-2p=2p, откуда находим Q=5000, p=2500. Тогда совокупная выручка туристических компаний составит 2500*5000=12500000.

2. После введения поддержки путешественников функцию спроса с учетом компенсации можно описать как Q(p)=10000-2p(1-S/100), где p- цена продажи путевки. Совокупное предложение фирм изменилось, и стало Q(p)=1,5*2p=3p. Если в новом равновесии количество дней равно Q*, а цена p*, то 10000-2p*(1-S/100)=3p*, откуда p*=10000/(5-0,02S) и Q*=3000/(5-0,02S), а совокупная выручка компаний составит p*Q*.

Заметим (см. также рисунок ниже), что при повышении ставки субсидии равновесные объем продаж и цена возрастают. Поэтому минимальная ставка субсидии, которая позволит достичь той же совокупной выручки, что до введения политики поддержки путешественников, однозначно будет определяться соотношением: p*Q*=12500000. Откуда находим, что примерно S=5%.

3. На рисунке изображены кривые спроса и предложения до и после введения субсидии для путешественников, а также равновесия, соответствующие этим ситуациям.



4. Заметим, что поскольку совокупная выручка компаний не изменилась при введении указанной компенсации, а количество компаний возросло, то средняя выручка компаний снизилась. Также заметим, что на рынке есть два типа фирм: первый тип – фирмы, которые существовали в отрасли и до применения политики субсидирования; второй тип – фирмы, которые вошли в отрасль вследствие применения такой политики.
Рассмотрим сначала первый тип фирм. Используя рисунок выше, можно видеть, что объем продаж фирм, которые и ранее были на рынке, сократился, следовательно совокупные издержки, приходящиеся в среднем на одну фирму, снизились. Таким образом, снижение (в среднем) выручки этих компаний и снижение (в среднем) их издержек могло привести как к росту (в среднем) их прибыли, так и к снижению (в среднем) их прибыли. В этом случае однозначный вывод об изменении (в среднем) прибыли каждой компании сделать невозможно.
Рассмотрим теперь второй тип фирм. Если фирмы вышли на указанный рынок путевок, то (в рамках рационального поведения экономических агентов) можно полагать, что такие фирмы отказались от каких-то менее выгодных альтернатив. Следовательно, прибыль таких фирм, как минимум, не уменьшилась.

Критерии оценивания:
1. Верно найдено равновесие на рынке – 1 балл.
Верно найдена совокупная выручка компаний – 1 балл.
Арифметическая ошибка, которая не привела к искажению результатов по существу, штрафуется 1 баллом.
2. Верно найдено новое предложение отрасли – 1 балл.
Верно найдена новая функция спроса – 1 балл.
Верно найдено значение S – 2 балла.
Верно объяснено, почему это минимальное значение S – 1 балл.
Арифметическая ошибка, которая не привела к искажению результатов по существу, штрафуется 1 баллом.

Арифметическая ошибка, которая привела к искажению результатов по существу, штрафуется 3 баллами.
3. Верно изображено равновесие до введения поддержки путешественников – 1 балл.
Верно изображено равновесие после введения поддержки путешественников – 1 балл.
4. Есть предположение о том, что невозможно сделать однозначный вывод об изменении (в среднем) прибыли каждой компании – 1 балл.
Аргументированно обосновано, что прибыль компаний могла как возрасти, так и уменьшиться – 3 балла.

Задача 8.
В некоторых европейских странах иностранные граждане в вузах могут обучаться либо совершенно бесплатно, либо за незначительную плату. Приведите по меньшей мере два различных экономических аргумента, объясняющих причину такой политики государства в области образования.

Решение:
Приведем две различные причины, которые, конечно, не исчерпывают весь список возможных обоснований такой политики стран.
1) Подобная государственная программа часто осуществляется в рамках соглашений между странами. Эти соглашения позволяют стране, бесплатно обучающей иностранных граждан, пользоваться рядом преимуществ, напрямую связанных с экономикой этой страны, например, льготами на кредитование, бесплатное обучение ее студентов в других странах.
2) Население некоторых стран Европы заметно стареет. В таких обстоятельствах страны хотели бы привлечь как можно больше молодежи, среди которой, конечно, они хотели бы иметь немалую долю образованных молодых людей. Впоследствии эта молодежь будет заниматься более квалифицированным трудом, будет платить больше налогов. Таким образом, понесенные на образование иностранцев расходы государство считает вполне оправданным.

Критерии оценивания:
Аргументированно и корректно приведена (любая) первая причина – 4 балла.
Аргументированно и корректно приведена (любая) вторая причина – 5 баллов.