

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2019 - 2020 учебный год

Заключительный (очный) этап

8 – 9 классы

Задание 1

Максимум 15 б

В волшебной стране Кабайо лошадь является священным животным. Поэтому по закону страны, иметь у себя в хозяйстве лошадь можно только если на каждую лошадку приходится не менее 3 га земли. Хуан мечтает о лошадях. Границы поля, находящегося в его собственности, описывает линия (площадь в га):

$$2|2|x| - 1| + |6|y| + 3| = 12$$

Сколько лошадей может позволить себе завести Хуан, не нарушая закон страны?

Решение

Рассмотрим границы поля.

Сначала в области $x > 0$, $y > 0$, затем отобразим фигуру симметрично. Тогда

$$2|2x - 1| + |6y + 3| = 12$$

Если $2x - 1 > 0$, $x > 1/2$ и $6y + 3 > 0$, $y > -1/2$, то граница поля в указанном интервале определяется линией:

$$4x - 2 + 6y + 3 = 12$$

$$6y + 4x = 11$$

$$y = -\frac{4}{6}x + \frac{11}{6}. \text{ Если при этом } y = 0, \text{ то } x = 11/4.$$

Если $2x - 1 < 0$, $x < 1/2$, то граница поля в указанном интервале определяется линией:

$$2 - 4x - 2 + 6y + 3 = 12$$

$$6y - 4x = 7$$

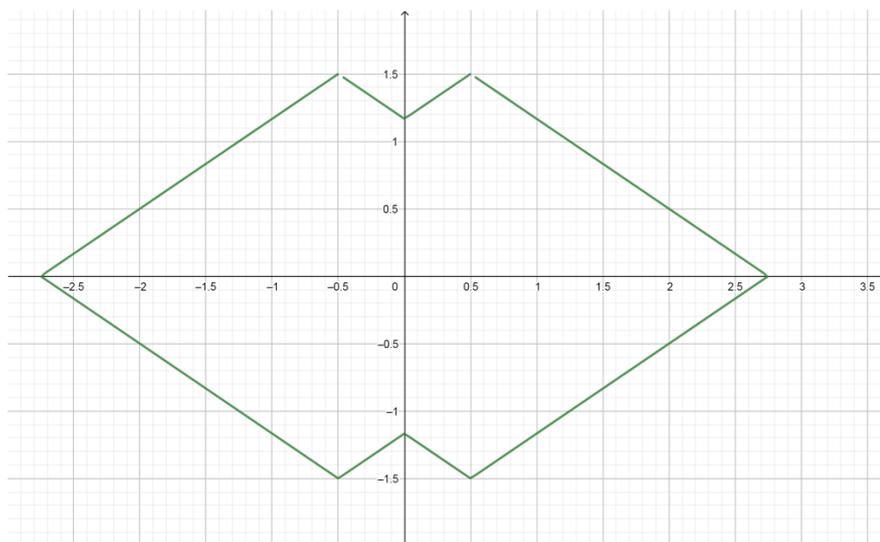
$$y = \frac{4}{6}x + \frac{7}{6}. \text{ Если при этом } x = 0, \text{ то } y = 7/6.$$

Построим границы поля, отобразив симметрично получившуюся фигуру относительно полуосей (см. рисунок).

Посчитаем площадь всего поля:

$$S = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6} \right) \right) \right) = 9 \frac{5}{12} \text{ (га)}$$

Тогда Хуан сможет разместить $9 \frac{5}{12} : 3 \approx 3$ лошади.



Критерии проверки:

1. Получен верный ответ на основе логически верного решения – **15 баллов**.
2. Задание решено логически верно, но допущены арифметические ошибки – **до 10 баллов**.
3. Присутствует верное схематичное изображение границ поля, задание не доведено до ответа – **до 5 баллов**.
4. В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 2

Максимум 15 б

Решить неравенство:

$$\left|4x^2 - \frac{32}{x}\right| + \left|x^2 + \frac{5}{x^2 - 6}\right| \leq \left|3x^2 - \frac{5}{x^2 - 6} - \frac{32}{x}\right|$$

Решение

Нетрудно заметить, что данное неравенство имеет вид:

$$|a - b| \geq |a| + |b|,$$

где $a = 4x^2 - \frac{32}{x}$, $b = x^2 + \frac{5}{x^2 - 6}$. Однако, как известно

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$. Поэтому данное неравенство справедливо только в случае равенства

$$|a - b| = |a| + |b|,$$

что возможно тогда и только тогда, когда $ab \leq 0$. Имеем неравенство:

$$\left(4x^2 - \frac{32}{x}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{5}{x^2 - 6}\right) \leq 0,$$

$$\left(\frac{x^3 - 8}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^4 - 6x^2 + 5}{x^2 - 6}\right) \leq 0,$$

$$\frac{(x - 2)(x^2 - 1)(x^2 - 5)}{x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})} \leq 0,$$

$$\frac{(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})} \leq 0,$$

решая его методом интервалов получим

Ответ: $(-\sqrt{6}; -\sqrt{5}] \cup [-1; 0) \cup [1; 2] \cup [\sqrt{5}; \sqrt{6})$.

Критерии проверки:

1. Получен верный ответ на основе логически верного решения – **15 баллов**.
2. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, но получен верный ответ – **до 10 баллов**.
3. Применен верный метод, нет достаточных объяснений, ответ не получен – **до 5 баллов**.
4. В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 3

Максимум 20 б

После долгих январских выходных в первый рабочий день 36 печальных офисных сотрудников решили поиграть в мяч. Условия игры такие: печальный сотрудник, попавший мячом в другого печального сотрудника, становится бодрым и больше уже не печалится. Сотрудник, в которого попали, выбывает из игры. Через два часа в игре остался один сотрудник. Каких сотрудников к этому моменту больше выбыло из игры – печальных или бодрых? Дайте ответ и докажите

Решение:

Предположим, бодрых сотрудников выбыло больше. Чтобы стать бодрым сотрудником, каждый должен был попасть в печального сотрудника, который бы выбыл из игры. Следовательно, на любой момент времени печальных выбывших не меньше бодрых в принципе, в том числе и выбывших. Но так как выбыло в итоге нечетное число сотрудников, то печальных среди них больше.

Критерии проверки:

1. Получен верный ответ на основе логически верного решения – **20 баллов**.
2. Получен верный ответ, присутствует верная идея его доказательства, но доказательство не доведено – **до 10 баллов**.
3. Получен верный ответ, но его обоснование недостаточно – **до 5 баллов**.
4. В остальных случаях – **0 баллов**.

Задание 4

В этом году Иван Петрович зарегистрировался как самозанятый гражданин, и теперь сам выбирает, сколько времени ежедневно он будет работать. Он блестяще преподает изобразительное искусство младшим школьникам и ведет групповые занятия с детьми в доме культуры. Стоимость одного урока (60 мин) Ивана Петровича – 3 тыс. рублей (после вычета всех налогов). Помимо доходов от преподавания у него есть постоянный доход от сдачи жилья в аренду, который составляет 14 тыс. рублей в месяц (после вычета всех налогов). Выходные дни Иван Петрович полностью посвящает семье и не работает. Иван Петрович очень дисциплинированный, строго следит за распределением своего времени и доходов и в каждый рабочий день распределяет время абсолютно одинаково. В рабочие дни, которых в каждом месяце ровно 21, восемь часов в сутки он спит, некоторое время работает, часть времени посвящает своему хобби – вырезанию игрушек из дерева, а остальное время тратит на отдых и домашние дела. Занятие хобби он считает важной составляющей своей жизни, поэтому если в день он работает L часов, то на вырезание игрушек из дерева обязательно потратит $2L$ часов. Деревянные игрушки он не продает, а дарит друзьям и знакомым. Помимо этого, Иван Петрович является активным благотворителем и перечисляет деньги в благотворительный фонд. Каждый рабочий день он откладывает на благотворительность ровно $k/3$ тыс. рублей, если в этот день на отдых и домашние дела он потратил всего k часов. На все бытовые расходы, хобби и ведение домашнего хозяйства (кроме расходов на благотворительность) Иван Петрович тратит 70 тыс. рублей в месяц, других расходов у него нет. Уже давно Иван Петрович позаботился о «черных

днях», которые могут наступить, и отложил на будущее некоторую денежную сумму, к которой не притронется, пока такие дни не настанут. Поэтому ежемесячно он полностью тратит все деньги, которые получает в этот месяц.

(а) Сколько уроков ежедневно проводит Иван Петрович?

(б) Сколько денег ежемесячно перечисляет Иван Петрович на благотворительность?

Решение и схема оценивания:

Ежедневно Иван Петрович работает $(24 - 8 - 2L - k)$ часов в день.

Тогда $24 - 8 - 2L - k = L$, или $16 - 3L = k$.

Его ежедневный заработок от уроков равен $3L = 16 - k$.

За месяц в тыс. руб. Иван Петрович зарабатывает $3L \times 21 + 14 = 21(16 - k) + 14$.

При этом его ежемесячные расходы составляют $70 + \frac{21k}{3} = 70 + 7k$.

Поскольку он тратит все заработанные деньги, то

$21(16 - k) + 14 = 70 + 7k$, откуда и находим, что $k = 10$.

В этом случае ежедневно Иван Петрович работает 2 часа.

На благотворительность Иван Петрович перечисляет $7k = 70$ тыс. рублей.

Верное обоснование ответа только на первый вопрос – 10 баллов, на оба вопроса – 15 баллов.

Если верно выписаны только уравнения без решения – 2 балла.

Задание 5

Девочке Маше родители подарили красивую квадратную картину для рисования по номерам со стороной 2 метра, которую после раскрашивания девочка планирует повесить в детской на стену напротив кровати. Чтобы дочери было интереснее рисовать, родители разрешили ей приглашать в гости подружек ежедневно до тех пор, пока они не закончат раскрашивание.

Известно, что с каждым днем рисовать менее интересно, поэтому всё сложнее и сложнее: если в первый день работы каждая из девочек сможет закрасить $\frac{1}{2}$ м², то в каждый следующий в два раза меньшую площадь (на второй день $\frac{1}{4}$ м², на третий $\frac{1}{8}$ м² и так далее). Чтобы накормить девочек, родителям нужно будет потратить на обед каждой 2 денежные единицы, а чтобы присматривать за девочками, одному из родителей придется меньше работать, и он потеряет 6 ден. ед. зарплаты за каждый день присмотра.

Пусть девочки договорились ответственно отнестись к рисованию, так что, если кто-то согласился участвовать – участвует с первого дня и до завершения работы над картиной.

(а) Какое минимальное число подружек нужно позвать, чтобы вместе с Машей они смогли раскрасить всю картину полностью?

(б) Если родители планируют потратить на присмотр за девочками только один день, то каким должно быть минимальное число приглашенных подружек?

(в) Если родители минимизирует свои издержки на организацию данного досуга Маши, то какое количество подружек они пригласят для раскрашивания картины и сколько дней девочки будут ее раскрашивать?

(а) Ответ: 4.

Докажем от противного, что никакое меньшее число подружек не справится с заданием. Пусть n девочек (учитывая Машу) раскрасили картину за k дней, где $n \leq 4$. Тогда каждая из них закрасила не более

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

квадратных метров картины, что строго меньше 1.

Значит, в сумме они закрасили не более

$$n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) = n - \frac{n}{2^k} \leq 4 - \frac{4}{2^k} < 4$$

квадратных метров картины, что строго меньше площади всей картины. Противоречие. Значит, меньше 4 девочек не справятся с раскраской всей картины.

Нетрудно убедиться также, что 5 девочек сумеют раскрасить всю картину не более чем за 3 дня, поскольку

$$5 \left(1 - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{5 * 7}{8} > 4$$

Значит, 4 — минимальное число подружек, которых необходимо позвать на помощь.

Полное обоснование – 5 баллов.

(б) Ответ: 7.

В первый день каждая девочка закрашивает $\frac{1}{2}$ квадратных метра картины, а значит, для обработки всей картины потребуется $4 : \frac{1}{2} = 8$ девочек.

Полное обоснование – 5 баллов.

(в) Ответ: 7 подружек на 1 день

Если родители договорятся с n подружками на k дней, то их издержки составят $2k(n + 1) + 6k$ ден.ед.

Из пункта (а) следует, что компания из любого количества девочек, которая может в принципе закрасить всю картину, сделает это не более чем за 3 дня. Значит, для решения задачи достаточно найти минимальные издержки для $k = 1, 2, 3$.

При $k = 3$ потребуется не менее 5 девочек. Тогда издержки составят не менее

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 = 48 \text{ ден.ед.}$$

При $k = 2$ потребуется не менее 4: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{4*4}{3} = 6$ девочек. Тогда издержки составят не менее $2 \cdot 2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 36$ ден.ед.

При $k = 1$ потребуется не менее 8 девочек (см. решение пункта (б)). Тогда издержки составят не менее $2 \cdot 1 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 22$ ден.ед.

Значит, издержки компании составят не менее 22 ден.ед. Значит, родителям лучше пригласить 7 подружек на 1 день.

Полное обоснование – 5 баллов.

Задание 6

Журналисту Иванову поручили ознакомиться со статистическими данными и предоставить для публикации в местной газете статью, отражающую результаты динамики численности выпускников образовательных организаций (Выпускником считается человек, окончивший учебное заведение в отчетном году. В следующем году этот же человек уже не является выпускником и учитывается в статистике как тот, кто имеет образование соответствующего уровня). На одном из ресурсов он нашел результаты мониторинга численности выпускников образовательных организаций, зарегистрированных в органах государственной службы занятости за некоторый период времени. Внимательно изучив статистику в представленной ниже таблице, Иванов сделал следующие выводы, которые и планирует опубликовать:

- 1) Численность безработных выпускников профессиональных образовательных организаций, сначала ежегодно росла до 2005 года, а затем снижалась вплоть до 2015 года, когда она снова продемонстрировала рост по сравнению с показателями предыдущего года.
- 2) Уровень безработицы среди выпускников образовательных организаций снизился примерно в 1,83 раза в 2015 году по сравнению с 2005 годом.
- 3) Доля безработных женщин среди безработных выпускников образовательных организаций высшего образования снизилась примерно на 11% в 2015 году по сравнению с 2000 годом.
- 4) Количество безработных, не являющихся выпускниками общеобразовательных, профессиональных образовательных или образовательных организаций высшего образования, сократилось почти в 1,7 раза в 2015 году по сравнению с 2005 годом. Этот факт свидетельствует о повышении популярности образования в нашей стране и увеличении доли людей, продолживших образование после средней школы.

Относительно каждого вывода, сделанного Ивановым, укажите, согласны ли Вы с ним. Если согласны, то подтвердите вывод расчетами, если не согласны, то аргументированно объясните, почему выводы Иванова ошибочны.

Решение и схема оценивания:

Сразу заметим, что оценивать справедливость выводов Иванова мы будем лишь на основании приведенной таблицы. Искомые статистические данные в любой стране могут отличаться от тех, что приведены в различных статистических сборниках.

- 1) Утверждение 1) в задании неверное. В таблице пропущены статистические данные 2001, 2002, 2003 и 2004 годов. Поэтому по приведенным данным невозможно определить, как вела себя численность безработных выпускников. **Полное обоснование – 5 баллов.**
- 2) Утверждение 2) в задании неверное. Уровень безработицы (в долях) среди выпускников образовательных организаций в данный год может быть рассчитан, как отношение численности безработных выпускников образовательных организаций к общей численности выпускников этих организаций. В таблице отсутствуют данные об общей численности выпускников данного года. Поэтому по имеющимся данным невозможно определить уровень безработицы выпускников образовательных организаций в данный год и сравнить его с уровнем другого года. **Полное обоснование – 5 баллов.**
- 3) Утверждение 3) в задании верно относительно тех выпускников, которые зарегистрированы в органах государственной службы занятости. Согласно данным таблицы, доля безработных женщин среди безработных выпускников образовательных организация высшего образования в 2000 году составляла $7,6/9,5=0,8$. Эта же величина в 2015 году составляла $6,2/8,7=0,713$. Таким образом, эта доля снизилась на $(0,8-0,713)*100/0,8=10,9\%$, то есть, эта доля снизилась примерно на 11%. Стоит заметить, что приведенная в таблице статистика не учитывает тех людей, которые по разным причинам не зарегистрированы в государственной службе занятости, поэтому оценку искомой величины, строго говоря, нельзя считать абсолютно верной. **Полное обоснование – 5 баллов.**
- 4) В задании 4) имеется два утверждения, одно из которых является верным, а другое – нет. Количество безработных, не являющихся в 2005 году выпускниками указанных образовательных организаций, согласно таблице, составляло $1830,1-57,8-87,9-24,7=1659,7$. Эта же величина в 2015 году была равна $1001,1-2,8-10,6-8,7=979$. Таким образом, количество таких безработных, действительно, сократилось почти в 1,7 раз: $1659,7/979=1,69$. **Полное обоснование – 3 балла.** Однако этот факт напрямую не может сигнализировать о повышении популярности образования и увеличении доли людей, продолживших образование после средней школы. Например, в указанный период менялась численность населения страны, поэтому без дополнительной информации по имеющимся в таблице данным невозможно вычислить, как изменилась доля населения, которая продолжила образование после средней школы. Помимо этого, в указанный период времени могло измениться качество самого образования и, как следствие, доверие работодателей к дипломам различного уровня образования. Что также могло привести к сокращению доли безработных, имеющих образование разного уровня. **Обоснование – 2 балла.**

2.19. ЧИСЛЕННОСТЬ ВЫПУСКНИКОВ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ, ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ В ОРГАНАХ ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ЗАНЯТОСТИ*

(на конец года; тысячи человек)

	2000	2005	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Численность безработных – всего	1037.0	1830.1	1589.4	1285.6	1064.7	917.7	883.3	1001.1
Мужчины	322.2	630.5	698.4	559.6	471.7	415.9	403.8	465.8
Женщины	714.8	1199.5	891.0	725.9	593.0	501.8	479.5	535.4
Из них выпускники:								
общеобразовательных организаций	21.6	57.8	3.4	2.8
мужчины	6.5	22.8	1.6	1.4
женщины	15.1	34.9	1.8	1.5
профессиональных образовательных организаций	44.7	87.9	34.4	16.7	12.9	11.1	9.1	10.6
мужчины	35.8	28.5	14.3	6.5	5.0	4.4	3.6	4.3
женщины	8.9	59.4	20.1	10.2	7.9	6.7	5.5	6.2
образовательных организаций высшего образования (обучение по программам бакалавриата, специалитета, магистратуры)	9.5	24.7	15.5	10.2	7.4	5.9	4.5	8.7
мужчины	1.9	6.6	5.0	3.2	2.3	1.9	1.5	2.6
женщины	7.6	18.1	10.5	7.0	5.1	4.0	3.1	6.2

* По данным Федеральной службы по труду и занятости.