

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2018 - 2019 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

1 вариант

1. Несколько факультетов Академии выпускают множество магистров по различным направлениям подготовки).
В 2016 году, в связи с увеличением спроса работодателей на выпускников магистерских программ и на основании анализа современных прикладных научных исследований и разработок, изучения потребностей рынка в высококвалифицированных кадрах Академией было решено открыть пять новых факультетов, которые стали бы готовить таких специалистов для разных секторов экономики.
В результате количество выпускников-магистров Академии сильно выросло в 2018 году и стало равно 2112 человек. Предполагая, что ранее, по 2017 год, ежегодный выпуск составлял 750 профессионалов-магистров, определите, сколько факультетов готовили таких специалистов изначально.
Считайте, что все факультеты всегда выпускают одинаковое количество магистров.

2. Бизнесмен Вячеслав Приколистов привязал к своему счету дополнительную платиновую банковскую карту для своей жены Елены и, уезжая в командировку, оставил жене карту с запиской следующего содержания:
«Дорогая, трать сколько угодно на всё, что угодно, но... ПИН-код придется угадать, а чтобы было проще – цифры ПИН-кода даст решение задачи: нарисуй четырехугольник $PNQM$, он такой замечательный, что в него, если захочется, можно вписать окружность, и около него можно описать окружность. Прямые PM и NQ пересекаются в точке I . Сумма сторон PN и QM равна 12, а произведение равно 35. Найди периметр треугольника PIN . Если ты не забудешь ничего важного, то получишь заветные четыре цифры. Удачи!»
Елена справилась с задачей легко, ведь всего 2 года назад окончила экономический факультет РАНХиГС.
Сможете ли Вы:
 - ✓ Повторить её решение? (чертёж обязателен)
 - ✓ Ответить на вопрос, был ли в удачном шоппинге элемент везения? (какова вероятность того, что Елене удалось верно ввести ПИН-код, ведь решив задачу она узнала просто четыре цифры, а не их последовательность, а после третьей неудачной попытки карта блокируется).

3. Коррупцированный чиновник Никифор из страны Y нечестным трудом заработал на виллу. Против Никифора завели уголовное дело, и его вилла оказалась под угрозой конфискации. В случае конфискации Никифор понесет потери в размере V денежных единиц (ден. ед.). Однако друзья посоветовали Никифору стать депутатом на ближайших выборах и получить абсолютный иммунитет от преследования правоохранителей. В округе, представителем которого может стать Никифор, есть всего 25 избирателей, которые делятся на 3 группы:

1. 20% избирателей при любых обстоятельствах поддержат на выборах Никифора.
2. 20% избирателей при любых обстоятельства поддержат Ратибора, конкурента Никифора.
3. Оставшиеся 60% избирателей не хотели бы видеть своим депутатом ни одного из кандидатов, но при прочих равных готовы за некоторую плату отдать свой голос на выборах за того кандидата, кто предложит им больше денег.

Известно, что если какой-либо кандидат предложит за один голос избирателя по 1 ден. ед., то он получит только одного дополнительного сторонника, если предложит по 2 ден. ед. – то двух дополнительных сторонников, и т.д. Голосование в стране Y является открытым, поэтому только после голосования кандидат точно будет знать всех, кто проголосовал за него, и отдаст избирателям деньги сразу после волеизъявления. Известно также, что кандидатов на выборах только два, что все избиратели обязаны прийти на голосование и не испортят бюллетени, т.е. каждый из двадцати пяти избирателей обязательно проголосует либо за Ратибора, либо за Никифора, либо против всех, а сами кандидаты не имеют права голосовать. Кроме того, Ратибор (как, впрочем, и Никифор) может конкурировать нечестно, но он не богат, поэтому максимальная сумма денег, которую он готов отдать за подкуп избирателей, составляет такую величину, при которой достаточно было бы победить на выборах, если бы конкурент вел себя честно. Никифор знает о положении Ратибора и его возможных расходах, поэтому для подкупа любого избирателя готов всегда заплатить больше, чем предложил бы Ратибор. Для победы любого кандидата на выборах необходимо набрать не менее 50% голосов. Денежные единицы в этой стране могут принимать лишь целые значения.

(а) Выпишите функцию предложения голосов за любого из кандидатов.

(б) Найдите минимальные расходы Никифора на подкуп избирателей для победы на выборах, которые он готов был бы понести, если бы точно знал, что Ратибор не будет конкурировать честно, и если даже после голосования ни один кандидат не может определить, к какой именно группе относился тот или иной избиратель.

(в) Никифор нашел способ до выборов достоверно узнать, какую минимальную сумму денег готов получить каждый избиратель за продажу своего голоса, и теперь кандидат первым сможет договориться со всеми нужными ему избирателями индивидуально. Известно, что избиратели держат слово: если после договоренности с Никифором к ним обратится Ратибор, то никто из них не изменит своего решения отдать свой голос за Никифора, сколько бы Ратибор им не предложил за их голос. Стоимость информации об отдельном избирателе составит F денежных единиц. Какую максимальную сумму F готов будет заплатить Никифор за подобную информацию для победы на выборах?

4. В начальный момент времени на электронном табло игрового автомата отображаются два натуральных числа $a_0 = 3$ и $b_0 = 720$. За нажатие на кнопку автомата игрок должен заплатить 5 рублей. При нажатии кнопки первое из этих чисел заменяется на $a_1 = r_{11}(6 \cdot a_0 + 2)$, а второе число заменяется на $b_1 = r_{2017}(b_0 + 24)$, где $r_x(y)$ – остаток от деления натурального числа y на x . Игрок, нажав кнопку еще раз (предварительно уплатив ту же сумму), получит по таким же закономерностям на табло числа $a_2 = r_{11}(6 \cdot a_1 + 2)$ и $b_2 = r_{2017}(b_1 + 24)$ и так далее. Игрок получает приз в размере 100 тыс. рублей, если при очередном нажатии на табло загорятся числа $a_n = 2$ и $b_n = 6$. Сможет ли игрок на таком игровом автомате оказаться в «плюсе»? Если да, то сколько составит его возможная выгода?
5. Сколько существует целых чисел, удовлетворяющих неравенству?

$$\frac{(-\log_{1/3} 27 - x)(3^x - 9)(|x + 9| - |1 - x|)}{(\sqrt{x + 5} + \sqrt{2019}) \sin(-12 * (18|x^{-1}| + 8|x|)^{-1} - 0,012\pi)} < 0$$

6. Страны А и В граничат друг с другом, но не могут обмениваться трудовыми ресурсами и технологиями производства товаров X и Y, потребителями и производителями которых являются жители этих стран. В обеих странах данные товары производятся только из трудовых ресурсов. В каждой из стран имеется ровно по 10 единиц трудовых ресурсов. Но в стране А товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 1 и 2 соответственно, а в стране В товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 3 и 1 соответственно. Жители каждой страны имеют одинаковые предпочтения относительно товаров X и Y и потребляют их только в наборах, где на одну единицу товара Y приходится ровно 2 единицы товара X. При этом чем больше таких наборов потребляется в стране, тем лучше жителям этой страны.
- (а)** Страны А и В объединились в экономический союз, но обмен технологиями производства внутри этого союза невозможен. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля союза с внешним миром невозможна?
- (б)** Предположим теперь, что торговля союза с внешним миром по-прежнему невозможна, но стал доступен обмен технологиями производства внутри данного союза. Однако этот обмен и обучение жителей новым технологиям влечет дополнительные издержки для каждой из стран. Так обучение новым технологиям сокращает количество трудовых ресурсов в каждой из стран ровно в α ($\alpha > 1$) раз, независимо от того, обучаются ли жители страны новым технологиям или передают знания жителям другой страны. Найдите максимальную величину α_{max} , при которой количество наборов, потребляемых союзом, не сократится по сравнению с пунктом (а).
- (в)** Предположим теперь, что $\alpha = \alpha_{max}$ и образовавшийся экономический союз может торговать товарами X и Y с внешним миром по мировым ценам. Найдите все значения отношения цен товаров X и Y (т.е. величины P_X/P_Y) на мировом рынке, при которых обмен технологиями между странами окажется невыгодным экономическому союзу, т.е. совокупное количество потребляемых этим союзом сократится.

7. Представьте себе, что вы живете в городе, территория которого принимает круглую форму, и ваша квартира находится на расстоянии s_0 от центра города. Вам понадобился один потребительский товар, который продается практически везде в городе, так что можно считать, что купить его можно абсолютно в любой точке города. Самый дальний магазин города расположен на расстоянии $s_{max} = 50$ от центра города. Ваше удовольствие от покупки данного товара определяется функцией $u = v - p - t$, где v – денежная оценка удовольствия от потребления товара, p – цена данного товара, t – транспортные издержки, равные стоимости доставки товара от места покупки до вашей квартиры. Покупка товара в каждом магазине возможна также дистанционно (например, через мобильное приложение магазина), так что вы не несете издержек на проезд до магазина. Известно, что из-за разной стоимости земли цена товара зависит от дальности расположения магазина от центра города и в произвольном магазине равна $p_m = p_{max}(1 - 0,01s_m)$, где $p_{max} = 500$ – цена товара в магазине в самом центре города, s_m – расстояние от магазина до центра города. Стоимость доставки товара определяется как $t = 0,5(\Delta s)^2$, где Δs – расстояние от магазина до вашей квартиры.
- (а)** Определите, в каком магазине вы купите данный товар (т.е. на каком расстоянии он будет находиться от вашей квартиры и от центра города), если вы максимизируете свое удовольствие.
- (б)** Пусть вы решили лично приехать в магазин и совершить покупку непосредственно в нем, поскольку знаете, что в этом случае можете договориться с продавцом о дополнительной скидке на цену товара в 4%. Однако тогда вам придется потратить на проезд до магазина $0,1(\Delta s)^2$. Поедете ли вы в тот же магазин, что выбрали в пункте (а)?
8. Мы часто ожидаем, когда обращаемся к друзьям и знакомым с целью подыскать мастера по ремонту какого-нибудь оборудования, ремонтную бригаду или врача, что сможем найти необходимых специалистов высокой квалификации по цене, которая ниже, чем в среднем по рынку (чем если бы таких специалистов мы искали, воспользовавшись публичными ресурсами). Однако на деле зачастую оказывается так, что найденные через друзей и знакомых специалисты обходятся нам вовсе не дешевле, а дороже. Почему, в тех случаях, когда «скидка» на покупку услуги при посредничестве знакомых не предоставляется, люди, тем не менее, соглашаются на приобретение такой услуги, заплатив за нее подчас больше, чем могли бы, найдя специалистов через публичные ресурсы? Приведите три различных обоснованных аргумента при ответе на вопросы задания.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2018 - 2019 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

2 вариант

1. Несколько факультетов Академии выпускают множество магистров по различным направлениям подготовки.

В 2016 году, в связи с увеличением спроса работодателей на выпускников магистерских программ на основании анализа современных прикладных научных исследований и разработок, изучения потребностей рынка в высококвалифицированных кадрах Академией было решено открыть пять новых факультетов, которые стали бы готовить специалистов для разных секторов экономики.

В результате выпуск магистров Академии сильно вырос в 2018 году и стал равен 2496 человек. Предполагая, что ранее, по 2017 год, ежегодный выпуск составлял 1000 профессионалов-магистров, определите сколько факультетов готовили таких специалистов изначально?

Считайте, что все факультеты всегда выпускают одинаковое количество магистров.

2. Бизнесмен Станислав Весельчаков привязал к своему счету дополнительную платиновую банковскую карту для своей жены Анны и, уезжая в командировку, оставил жене карту с запиской следующего содержания:

«Дорогая, трать сколько угодно на всё, что угодно, но... ПИН-код придется угадать, а чтобы было проще – цифры ПИН-кода даст решение задачи: нарисуй четырехугольник $PNQM$, он такой замечательный, что в него, если захочется, можно вписать окружность, и около него можно описать окружность. Прямые PM и NQ пересекаются в точке I . Сумма сторон PN и QM равна 8, а произведение равно 15. Найди периметр треугольника PII . Если ты не забудешь ничего важного, то получишь заветные четыре цифры. Да, кстати, первая и последняя цифры кода совпадают. Удачи!»

Елена справилась с задачей легко, ведь всего 2 года назад окончила экономический факультет РАНХиГС.

Сможете ли Вы:

- ✓ Повторить её решение? (чертёж обязателен)
- ✓ Ответить на вопрос, был ли в удачном шоппинге элемент везения? (какова вероятность того, что Анне удалось верно ввести ПИН-код, ведь решив задачу она узнала просто четыре цифры, а не их последовательность, а после третьей неудачной попытки карта блокируется)

3. Коррупцированный чиновник Никифор из страны Y нечестным трудом заработал на виллу. Против Никифора завели уголовное дело, и его вилла оказалась под угрозой конфискации. В случае конфискации Никифор понесет потери в размере V денежных единиц (ден. ед.). Однако друзья посоветовали Никифору стать депутатом на ближайших выборах и получить абсолютный иммунитет от преследования правоохранителей. В округе, представителем которого может стать Никифор, есть всего 35 избирателей, которые делятся на 3 группы:

1. 30% избирателей при любых обстоятельствах поддержат на выборах Никифора.
2. 30% избирателей при любых обстоятельствах поддержат Ратибора, конкурента Никифора.

3. Оставшиеся 40% избирателей не хотели бы видеть своим депутатом ни одного из кандидатов, но при прочих равных готовы за некоторую плату отдать свой голос на выборах за того кандидата, кто предложит им больше денег.

Известно, что, если какой-либо кандидат предложит за один голос избирателя по 1 ден. ед., то он получит только одного дополнительного сторонника, если предложит по 2 ден. ед. – то двух дополнительных сторонников, и т.д. Голосование в стране Y является открытым, поэтому только после голосования кандидат точно будет знать всех, кто проголосовал за него, и отдаст избирателям деньги сразу после волеизъявления. Известно также, что кандидатов на выборах только два, что все избиратели обязаны прийти на голосование и не испортят бюллетени, т.е. каждый из тридцати пяти избирателей обязательно проголосует либо за Ратибора, либо за Никифора, либо против всех, а сами кандидаты не имеют права голосовать. Кроме того, Ратибор (как, впрочем, и Никифор) может конкурировать нечестно, но он не богат, поэтому максимальная сумма денег, которую он готов отдать за подкуп избирателей, составляет такую величину, при которой достаточно было бы победить на выборах, если бы конкурент вел себя честно. Никифор знает о положении Ратибора и его возможных расходах, поэтому для подкупа любого избирателя готов всегда заплатить больше, чем предложил бы Ратибор. Для победы любого кандидата на выборах необходимо набрать не менее 50% голосов. Денежные единицы в этой стране могут принимать лишь целые значения.

(а) Выпишите функцию предложения голосов за любого из кандидатов.

(б) Найдите минимальные расходы Никифора на подкуп избирателей для победы на выборах, которые он готов был бы понести, если бы точно знал, что Ратибор не будет конкурировать честно, и если даже после голосования ни один кандидат не может определить, к какой именно группе относился тот или иной избиратель

(в) Никифор нашел способ до выборов достоверно узнать, какую минимальную сумму денег готов получить каждый избиратель за продажу своего голоса, и теперь кандидат первым сможет договориться со всеми нужными ему избирателями индивидуально. Известно, что избиратели держат слово: если после договоренности с Никифором к ним обратится Ратибор, то никто из них не изменит своего решения отдать свой голос за Никифора, сколько бы Ратибор им не предложил за их голос. Стоимость информации об отдельном избирателе составит F денежных единиц. Какую максимальную сумму F готов будет заплатить Никифор за подобную информацию для победы на выборах?

4. В начальный момент времени на электронном табло игрового автомата отображаются два натуральных числа $a_0 = 7$ и $b_0 = 360$. За нажатие на кнопку автомата игрок должен заплатить 5 рублей. При нажатии кнопки первое из этих чисел заменяется на $a_1 = r_{11}(6 \cdot a_0 + 10)$, а второе число заменяется на $b_1 = r_{2017}(b_0 + 72)$, где $r_x(y)$ – остаток от деления натурального числа y на x . Игрок, нажав кнопку еще раз (предварительно уплатив ту же сумму), получит по таким же закономерностям на табло числа $a_2 = r_{11}(6 \cdot a_1 + 10)$ и $b_2 = r_{2017}(b_1 + 72)$ и так далее. Игрок получает приз в размере 100 тыс. рублей, если при очередном нажатии на табло загорятся числа $a_n = 5$ и $b_n = 6$. Сможет ли игрок на таком игровом автомате оказаться в «плюсе»? Если да, то сколько составит его возможная выгода?
5. Сколько существует целых чисел, удовлетворяющих неравенству?

$$\frac{(-\log_{1/2} 8 - x)(7^x - 49)(|x + 9| - |1 - x|)}{(\sqrt{9x + 45} + \sqrt{2089}) \sin(-12 * (18|x^{-1}| + 8|x|)^{-1} - 0,015\pi)} < 0$$

6. Страны А и В граничат друг с другом, но не могут обмениваться трудовыми ресурсами и технологиями производства товаров X и Y, потребителями и производителями которых являются жители этих стран. В обеих странах данные товары производятся только из трудовых ресурсов. В каждой из стран имеется ровно по 5 единиц трудовых ресурсов. Но в стране А товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 6 и 2 соответственно, а в стране В товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 2 и 4 соответственно. Жители каждой страны имеют одинаковые предпочтения относительно товаров X и Y и потребляют их только в наборах, где на одну единицу товара X приходится ровно 3 единицы товара Y. При этом чем больше таких наборов потребляется в стране, тем лучше жителям этой страны.
- (а) Страны А и В объединились в экономический союз, но обмен технологиями производства внутри этого союза невозможен. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля союза с внешним миром невозможна?
- (б) Предположим теперь, что торговля союза с внешним миром по-прежнему невозможна, но стал доступен обмен технологиями производства внутри данного союза. Однако этот обмен и обучение жителей новым технологиям влечет дополнительные издержки для каждой из стран. Так обучение новым технологиям сокращает количество трудовых ресурсов в каждой из стран ровно в α ($\alpha > 1$) раз, независимо от того, обучаются ли жители страны новым технологиям или передают знания жителям другой страны. Найдите максимальную величину α_{max} , при которой количество наборов, потребляемых союзом, не сократится по сравнению с пунктом (а).
- (в) Предположим теперь, что $\alpha = \alpha_{max}$ и образовавшийся экономический союз может торговать товарами X и Y с внешним миром по мировым ценам. Найдите все значения отношения цен товаров X и Y (т.е., величины P_X/P_Y) на мировом рынке, при которых обмен технологиями между странами окажется невыгодным экономическому союзу, т.е. совокупное количество потребляемых этим союзом наборов сократится.

7. Представьте себе, что вы живете в городе, территория которого принимает круглую форму, и ваша квартира находится на расстоянии s_0 от центра города. Вам понадобился один потребительский товар, который продается практически везде в городе, так что можно считать, что купить его можно абсолютно в любой точке города. Самый дальний магазин города расположен на расстоянии $s_{max} = 60$ от центра города. Ваше удовольствие от покупки данного товара определяется функцией $u = v - p - t$, где v – денежная оценка удовольствия от потребления товара, p – цена данного товара, t – транспортные издержки, равные стоимости доставки товара от места покупки до вашей квартиры. Покупка товара в каждом магазине возможна также дистанционно (например, через мобильное приложение магазина), так что вы не несете издержек на проезд до магазина. Известно, что из-за разной стоимости земли цена товара зависит от дальности расположения магазина от центра города и в произвольном магазине равна $p_m = p_{max}(1 - 0,02s_m)$, где $p_{max} = 1000$ – цена товара в магазине в самом центре города, s_m – расстояние от магазина до центра города. Стоимость доставки товара определяется как $t = 0,5(\Delta s)^2$, где Δs – расстояние от магазина до вашей квартиры.
- (а)** Определите, в каком магазине вы купите данный товар (т.е. на каком расстоянии он будет находиться от вашей квартиры и от центра города), если вы максимизируете свое удовольствие.
- (б)** Пусть вы решили лично приехать в магазин и совершить покупку непосредственно в нем, поскольку знаете, что в этом случае можете договориться с продавцом о дополнительной скидке на цену товара в 10%. Однако тогда вам придется потратить на проезд до магазина $0,5(\Delta s)^2$. Поедете ли вы в тот же магазин, что выбрали в пункте (а)?
8. Мы часто ожидаем, когда обращаемся к друзьям и знакомым с целью подыскать мастера по ремонту какого-нибудь оборудования, ремонтную бригаду или врача, что сможем найти необходимых специалистов высокой квалификации по цене, которая ниже, чем в среднем по рынку (чем если бы таких специалистов мы искали, воспользовавшись публичными ресурсами). Однако на деле зачастую оказывается так, что найденные через друзей и знакомых специалисты обходятся нам вовсе не дешевле, а дороже. Почему, в тех случаях, когда «скидка» на покупку услуги при посредничестве знакомых не предоставляется, люди, тем не менее, соглашаются на приобретение такой услуги, заплатив за нее, подчас, больше, чем могли бы, найдя специалистов через публичные ресурсы? Приведите три различных обоснованных аргумента при ответе на вопросы задания.