

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике
2018-2019 учебный год
Отборочный (заочный) этап**

8-9 класс

Уважаемый участник!

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит учесть несколько правил, выполнение которых необходимо:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 по московскому времени 25 ноября 2018 года. Иного таймера нет.
2. Просим не задерживать выполнение: при опоздании даже на 5 секунд система закроет прием работ, и Ваша работа не будет принята к рассмотрению.
3. Работа выполняется ТОЛЬКО самостоятельно. Коллективное выполнение работ запрещено: все одинаковые работы будут аннулированы.
4. Все решения необходимо напечатать, а не писать от руки, затем сохранять файл как PDF и после этого загружать в Личный кабинет. От руки допустимы только расчеты, формулы и чертежи, но в таком случае необходимо внимательно следить за читаемостью решения.
Пример для MS WORD: Файл→Сохранить как...→Тип файла PDF (*.pdf).
5. Прием работы через электронную почту не производится. Только через Личный кабинет.
6. Запрещено «переконвертировать» файл, просто переименовав у него расширение на PDF: в таком виде он не читается и не будет проверен. За него будет выставлена оценка 0 баллов.
7. После загрузки работы Вам будет направлено письмо. У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену. Просим не пренебрегать этой возможностью и проверять загруженный файл, в том числе на отсутствие технических сбоев при загрузке, препятствующих открытию и чтению файла.
8. Необходимо загружать работу только в специально отведенное поле, не путая профили.
9. Запрещено производить заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточником являются труды известных ученых, философов, научные работы, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными. Работы с некорректными заимствованиями будут аннулированы.
10. Запрещено подписывать работы или иным способом указывать на автора. Работа с указанными персональными данными участника будет аннулирована.
11. Необходимо четко выполнять требования к объему работы, если он указан в задании.

1. **Максимум 15 баллов.** Пусть $[x]$ обозначает целую часть числа x (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} [x + y - 3] = 2 - x, \\ [x + 1] + [y - 7] + x = y. \end{cases}$$

Решение:

Поскольку очевидно для любых $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство:

$$[x + n] = [x] + n,$$

постольку система равносильна системе:

$$\begin{cases} [x + y] - 5 = -x, \\ [x] + [y] + x - 6 = y. \end{cases}$$

Из первого уравнения вытекает, что число $x \in \mathbb{Z}$ (достаточно заметить, что каждое слагаемое в левой части первого уравнения – целое). И тогда из второго уравнения вытекает, что число $y \in \mathbb{Z}$. Значит, требуется решить в целых числах систему:

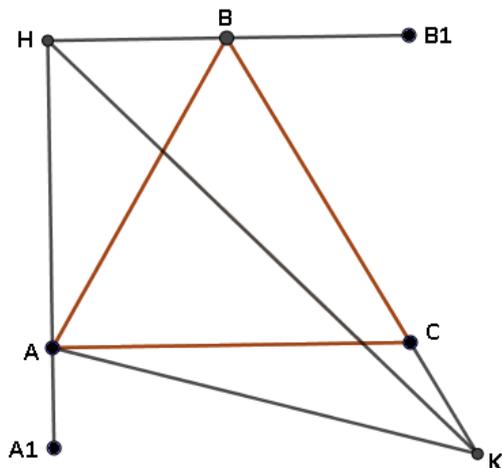
$$\begin{cases} x + y - 5 = -x, \\ x + y + x - 6 = y. \end{cases} \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x = 3. \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: (3; -1)

Критерий	Балл
В результате логически обоснованного алгоритма получен верный ответ	15
В решении присутствуют логические недочеты /не указан переход к равносильной системе уравнений, однако решение в целом является верным и получен верный ответ	10
Алгоритм верный, но в результате арифметической ошибки получен неверный ответ	6
Ответ верный, но нет логического обоснованного алгоритма	2
Решение не соответствует ни одному и представленным критериям	0

2. **Максимум 15 баллов.** На стороне АВ равностороннего треугольника ABC построен прямоугольный треугольник АНВ (Н – вершина прямого угла), такой, что $\angle НВА=60^\circ$. Пусть точка К лежит на луче ВС за точкой С и $\angle САК=15^\circ$. Найти угол между прямой НК и медианой треугольника АНВ, проведенной из вершины Н.

Решение:



Продлим NB и NA за точки B и A соответственно (N-B-B1, N-A-A1)

$$\angle B1BC=60^\circ$$

$$\angle KAA1=75^\circ, \text{ значит } BK - \text{бис } \angle ABB1$$

AK – бис $\angle A1AC$, следовательно, НК – биссектриса угла АНВ, следовательно, надо найти угол между биссектрисой и медианой треугольника АНВ, проведенных из вершины прямого угла

Ответ: 15°

Критерии	Балл
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, получен верный ответ	15
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, но в результате арифметической ошибки неверно вычислен ответ или Ответ верный, но нарушена логика доказательства	6
Алгоритм решения имеет существенные логические ошибки, однако отдельные пункты доказательства верны	2
Решение не соответствует ни одному из представленных критериев	0

3. **Максимум 15 баллов.** Маше подарили сундучок с разноцветными бусинами (цвет каждой бусины уникален, всего в сундучке n бусин). Маша выбрала семь бусин для платья и решила примерить все возможные их сочетания на платье (таким образом, Маша выбирает из множества вариантов пришить какую-то одну или две, или три, четыре, пять, шесть или семь бусин, при этом порядок бусин ей не важен). Затем она посчитала сколько всего получилось вариантов и очень удивилась, что число получилось нечетным.

- 1) Какое у Маши получилось число?
- 2) Верно ли, что при выборе из набора четного числа бусин у Маши могло получиться четное число вариантов?
- 3) Верно ли, что если бы Маше был важен порядок бусин, пришитых на платье, то она могла бы получить как четное, так и нечетное число?

Решение:

1) Рассмотрим одну бусинку. До момента пока Маша не пришила ее на платье, вариантов два: взять бусинку или нет. Если теперь выбрать две бусинки, вариантов становится четыре, которые можно получить, умножив на два, первый вариант. Увеличивая количество бусин, приходим к выводу: общее число всех возможных вариантов для n бусин это 2^n . По условию Маша выбрала 7 бусин, но вариант не пришить ничего не рассматривается, поэтому число вариантов $2^7 - 1 = 127$

2) Число вариантов нечетно (см пункт 1)

3) Верно, достаточно рассмотреть вариант одной и двух бусин. В первом случае число вариантов 1, а во втором 4

Критерий	Балл
В результате логически обоснованного алгоритма получен верный ответ в пунктах 1), 2) и 3)	15
В результате логически обоснованного алгоритма получен правильный ответ только в одном из пунктов	2
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

4. **Максимум 15 баллов.** Компания «Супергерои, Инк» в срочном порядке вызвала Супермена и Флэша выполнить некоторую работу по строительству защитных сооружений от урагана. Известно, что производительность Флэша в два раза больше производительности Супермена. Оплата работы каждого из супергероев зависит только от времени, которое они тратят на ее выполнение, следующим образом: $w = 90/t$, где w – сумма денег, которую получит супергерой, а t – время в минутах, которое он затратит на ее выполнение. Флэш опоздал на 1 минуту к началу строительства, а Супермен успел за это время выполнить 10% от всего объема работ. Остальную часть строительства оба супергероя завершили вместе. Какую сумму денег получил каждый из супергероев за выполненную им работу?

Решение:

9/10 работы супергерои выполнили вместе, причем 3/10 выполнил Супермен и 6/10 – Флэш, поскольку его производительность в два раза выше. Так как 1/10 всей работы Супермен выполнил за 1 минуту, то 3/10 работы он выполнит за 3 минуты. При этом Флэш будет работать тоже 3 минуты, поскольку закончат они работу одновременно. Тогда Супермен получит за свою работу $90/(1+3)=22,5$, а Флэш – $90/3=30$.

Схема оценивания:

Полностью верное решение - 15 баллов.

Верно найдено время работы каждого из супергероев, но не найдена сумма денег – 10 баллов из 15.

Неверно найдено время работы каждого из супергероев, но логика поиска верна – 5 баллов из 15.

5. **Максимум 15 баллов.** Компания «Интеллект, Инк» разработала робота с искусственным интеллектом. Для его изготовления требуется специальный станок, который за 1 час может произвести 1 робота. Компания владеет большим количеством таких станков, но созданный робот настолько умён, что может изготовить точную свою копию ровно за 2 часа. В «Интеллект, Инк» поступил срочный заказ на 3250 роботов, изготовить которых требуется всего за 10 часов. Расходы компании на создание одного робота (вне зависимости от времени его производства и того, создал ли его такой же робот или был привлечен специальный станок) постоянны и составляют 100 ден. ед., а обслуживание одного специального станка во время его работы над изготовлением робота обходится компании в 70 ден. ед. Других расходов на создание роботов «Интеллект, Инк» не несет. Какие минимальные издержки понесет компания при выполнении заказа?

Решение:

Для минимизации издержек компании необходимо найти такое минимальное количество станков, которое позволит ей выполнить заказ в указанные сроки.

Пусть x – количество станков. Тогда за первый час работы они произведут x роботов. Эти x роботов начнут изготавливать новых роботов, и через 3 часа их будет $2x$. При этом станки продолжают свою работу и изготовят новую партию роботов к концу 2 часа, которые также начнут изготавливать себе подобных. Таким образом, через 3 часа работы компании роботов будет $2x + x$. Если учесть, что через 9 часов от начала работы над заказом роботам, производящим себе подобных, уже не успеть изготовить новых к сроку окончания работы над заказом, то через 10 часов работы будет произведено $62x$ роботов.

Также подсчет количества роботов приведен в таблице:

1 час	2 час	3 час	4 час	5 час	6 час	7 час	8 час	9 час	10 час	Итого
x	-	$2x+x$	-	$6x+x$	-	$14x+x$	-	$30x+x$	-	$60x+2x$
-	x	-	$2x+x$	-	$6x+x$	-	$14x+x$	-	$30x+x$	

Остаётся найти x и округлить его до целого в большую сторону (иначе станков не хватит для изготовления нужного количества роботов в указанный срок).

$$x = \frac{3250}{62} \approx 52,42$$

Итого издержки компании на выполнение заказа составят $100 * 3250 + 70 * 53 = 328710$ ден. ед.

Схема оценивания:

Полное верное решение 15 баллов.

Верно найдено количество роботов – 10 баллов из 15.

Верно найдены расходы компании на выполнение заказа – 5 баллов из 15.

Количество роботов найдено неверно, но присутствует верная логика поиска издержек – 2 балла из 15.

Имеет место продвижение в поиске количества роботов, но присутствуют незначительные логические ошибки и количество роботов найдено неверно – 5 баллов из 15.

6. **Максимум 15 баллов.** Преподаватель экономики в школе считает, что крайне важно знать основы как микроэкономики, так и макроэкономики. Поэтому по своей дисциплине он ввел следующую систему итоговой оценки. Сначала из 5 баллов оценивается результат изучения школьником основ микроэкономики ($O_{\text{Микро}}$), а затем из 5 баллов - основ макроэкономики ($O_{\text{Макро}}$). Итоговая оценка по экономике формируется как минимальное значение из двух величин: $0,25*O_{\text{Микро}}+0,75*O_{\text{Макро}}$ и $0,75*O_{\text{Микро}}+0,25*O_{\text{Макро}}$ (итоговая величина округляется до целого значения по правилу математического округления). Школьник Иванов серьезно подошел к планированию времени на подготовку к каждому школьному предмету и решил, что потратит на изучение экономики не более 4,6 временных единиц. Однако изучение основ одного из разделов экономики дается Иванову труднее, чем другого. Так каждая единица времени, затраченная на изучение макроэкономики, повышает его итоговый результат (в баллах) по этому разделу, ровно на 1,5 балла, в то время как та же единица времени, вложенная в подготовку по микроэкономике, повышает итоговый результат по этому разделу на 2,5 балла.

(а) Какую максимальную оценку сможет получить школьник Иванов по экономике?

(б) Объясните, почему итоговая оценка по экономике отражает мнение учителя о том, что крайне важно знать и микроэкономике, и макроэкономике. Всегда ли при такой схеме оценивания получится именно так?

Решение:

(а) Если минимальное значение из двух определяется выражением $0,75*O_{\text{Микро}}+0,25*O_{\text{Макро}}$, т.е. $O_{\text{Микро}} < O_{\text{Макро}}$, то легко заметить, что альтернативная стоимость дополнительного балла по микроэкономике составляет три балла оценки по макроэкономике. Тогда, потратив 1 дополнительную единицу времени на изучение микроэкономики, Иванов увеличит свой результат за этот вид деятельности на $1*2,5*0,75=3,75/2$ балла, а потратив ее на изучение макроэкономики, увеличит свой результат всего на $1*1,5*0,25=0,75/2$. Поэтому, пока оценка будет определяться значением $0,75*O_{\text{Микро}}+0,25*O_{\text{Макро}}$, Иванову выгоднее тратить дополнительную единицу времени на изучение микроэкономики.

Аналогично можно показать, что если минимальное значение из двух определяется выражением $0,25*O_{\text{Микро}}+0,75*O_{\text{Макро}}$, т.е. $O_{\text{Микро}} > O_{\text{Макро}}$, то Иванову выгоднее тратить дополнительную единицу времени на изучение макроэкономики.

Таким образом, для получения наибольшей оценки Иванову не стоит тратить время на изучение лишь одного раздела экономики. Как же правильно распределить время? До тех пор, пока выражения $0,25*O_{\text{Микро}}+0,75*O_{\text{Макро}}$ и $0,75*O_{\text{Микро}}+0,25*O_{\text{Макро}}$ не равны, как показано выше, всегда выгоднее будет переключаться на изучение одного из разделов, повышая результирующую оценку. Поэтому максимум итоговой оценки при полном использовании временного ресурса может быть достигнут, только если время распределено так, что $0,25*O_{\text{Микро}}+0,75*O_{\text{Макро}}=0,75*O_{\text{Микро}}+0,25*O_{\text{Макро}}$. Откуда $O_{\text{Микро}}=O_{\text{Макро}}$. Для этого при полном использовании временного ресурса необходимо $5/8$ всего времени потратить на изучение макроэкономики, а остальное - на изучение микроэкономики. Тогда вычисленная итоговая оценка по экономике будет равна $O_{\text{Микро}}=O_{\text{Макро}}=3*2,5*4,6/8=4,3125$ и после математического округления составит 4 балла.

Следует заметить, что поскольку округление оценки произошло в меньшую сторону, Иванов для получения 4 баллов может использовать не весь запланированный временной ресурс

в 4,6 временных единицы, а немного меньше, потратив остаток времени на другой вид деятельности.

(б) При использовании данной формулы получается, что ученик будет знать и микроэкономику, и макроэкономику. Однако если бы коэффициенты при оценках за знание микроэкономики и/или макроэкономики, коэффициенты трудозатратности изучения обоих разделов экономики были бы другими, то могло бы получиться краевое решение, в котором ученик тратил бы время на подготовку только к одному разделу экономики (например, если бы соотношение трудозатратности было бы 1:5 при той формуле итоговой оценки).

Схема оценивания:

(а) Всего 10 баллов:

- 5 баллов за полное обоснование, что будет внутреннее решение (что $O_{\text{микро}}=O_{\text{макро}}$);
- 5 баллов за нахождение максимальной оценки.

(б) Всего 5 баллов:

- 2 балла за объяснение внутреннего решения;
- 3 балла за объяснение возможности краевого решения.

7. **Максимум 10 баллов.** Многие крупные компании, например, Google или Facebook, строят офисы, где можно не только работать, но и проводить свободное время и даже жить. Для работников делают зоны отдыха, игровые зоны, они могут приходить в офис с детьми. Объясните, приведя три различных аргумента, почему компании идут на дополнительные издержки такого рода и как это помогает им увеличивать прибыль. (Обратите внимание, если Вы указали более трех аргументов, то оцениваться будут лишь первые три из них).

Краткое решение:

В ответе должны содержаться мысли о том, что, во-первых, работник таким образом проводит большую часть своего времени в офисе, не воспринимая работу отдельно от остальной жизни, и соответственно, его мозги всегда работают на компанию.

Ответ на вопрос напрямую связан с тем, что работники таких компаний, как правило, обладают высокой уникальностью. Иными словами, гораздо легче заменить, скажем, рабочего на конвейере, чем специалиста по машинному обучению. Это значит, что для технологических корпораций проблема привлечения новых сотрудников и удержания старых стоит гораздо острее чем, например, для заводов, и нужно идти на дополнительные издержки для решения этой проблемы. На выбор работы влияет не только и не столько заработная плата, поэтому компаниям приходится строить офисы и создавать в них комфортные условия.

Кроме того, в ситуациях, когда сотрудники освобождены от бытовых потребностей — им не нужно убираться, готовить и т.д., если они проводят время в офисе, — они фактически могут посвятить работе всё свое время. При этом в высокотехнологичных компаниях нет нужды в фиксированному графике. Корпорациям от работников нужны решения задач, и редко важно, в какое время суток работники трудятся над этими решениями.

Схема оценивания:

Полное решение (три различных аргумента и обоснование) – 10 баллов;

Неполное решение (один аргумент и обоснование, два аргумента) – 5 баллов.