

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
Российская академия народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации**

**Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике**

**2018 - 2019 учебный год**

**Заключительный (очный) этап**

**8 – 9 классы**

**Задание 1 (14 баллов)**

Коррупцированный чиновник Никифор из страны  $Y$  нечестным трудом заработал на виллу. Против Никифора завели уголовное дело, и его вилла оказалась под угрозой конфискации. В случае конфискации Никифор понесет потери в размере  $V$  денежных единиц (ден. ед.). Однако друзья посоветовали Никифору стать депутатом на ближайших выборах и получить абсолютный иммунитет от преследования правоохранителей. В округе, представителем которого может стать Никифор, есть всего 25 избирателей, которые делятся на 3 группы:

1. 20% избирателей при любых обстоятельствах поддержат на выборах Никифора.  
2. 20% избирателей при любых обстоятельства поддержат Ратибора, конкурента Никифора.

3. Оставшиеся 60% избирателей при прочих равных готовы поддержать Ратибора, но, к сожалению, не откажутся за некоторую плату отдать свой голос на выборах за Никифора. Известно, что если Никифор предложит за один голос избирателя по 1 ден. ед., то он получит только одного дополнительного сторонника, если предложит по 2 ден. ед. – то двух дополнительных сторонников, и т.д. Голосование в стране  $Y$  является открытым, поэтому только после голосования Никифор точно будет знать всех, кто проголосовал за него, и отдаст им деньги сразу после волеизъявления. Известно, что кандидатов на выборах только два, что все избиратели ходят на голосование и не портят бюллетени, т.е. каждый из двадцати пяти избирателей обязательно проголосует либо за Ратибора, либо за Никифора, а сами кандидаты не имеют права голосовать. Кроме того, Ратибор беден и не может подкупить ни одного избирателя. Для победы любого кандидата на выборах необходимо набрать не менее 50% голосов. Денежные единицы в этой стране могут принимать лишь целые значения.

(а) Выпишите функцию предложения голосов за Никифора.

(б) Найдите, при каких значениях величины  $V$  Никифор станет подкупать избирателей, чтобы победить на выборах, если даже после голосования он не может определить, к какой именно группе относился тот или иной избиратель.

(в) Никифор нашел способ до выборов достоверно узнать, какую минимальную сумму денег готов получить каждый избиратель за продажу своего голоса, и теперь кандидат сможет договориться со всеми нужными ему избирателями индивидуально. Стоимость информации об отдельном избирателе составляет  $F$  денежных единиц. Какую

максимальную сумму  $F$  готов будет заплатить Никифор за подобную информацию для победы на выборах?

**Решение и схема оценивания:**

**(а) (максимум 4 балла)** 15 избирателей готовы получить денежное вознаграждение от кандидата при голосовании. Остальные 20 избирателей в любом случае голосуют за одного из кандидатов. Выпишем функцию предложения  $Q$  голосов избирателей в зависимости от цены за голос  $P$ . По условию цена может принимать только целые значения. При этом, если Никифор вообще не будет предлагать избирателям денег, то за него проголосуют ровно 5 человек. Значит, если  $P = 0$ , то  $Q = 5$ .

Если Никифор увеличит цену до 1 ед., то за него проголосует ещё один избиратель, и т.д., пока цена не достигнет 15 и число голосов не станет равно 20 (оставшиеся пять человек не хотят продавать голоса ни при каких условиях). Иначе говоря, при  $1 \leq P \leq 15$  предложение голосов имеет вид  $Q=5+P$ . При дальнейшем росте цены величина предложения будет оставаться неизменной и будет равна 20. Совместим три случая в одну функцию предложения:

$$Q = \begin{cases} 5, P = 0 \\ 5 + P, 1 \leq P \leq 15 \\ 20, P > 15 \end{cases}$$

*Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, однако отсутствуют ограничения ее применения в зависимости от цены – выставляется лишь 2 балла из 4 возможных.*

*Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, но не все интервалы цены и ограничения по количеству учтены – выставляется лишь 3 балла из 4 возможных.*

*Верно записана функция предложения голосов – 4 балла из 4 возможных.*

**(б) (максимум 4 балла)** Найдем минимальное значение расходов на подкуп избирателей, которое необходимо Никифору для победы. Кандидату нужно получить минимум 13 голосов (т.е. подкупить дополнительно 8 избирателей). Функция предложения принимает значение  $Q = 13$  при цене  $P = 8$ . Поскольку кандидат не знает предпочтений избирателей, он вынужден платить всем голосовавшим. Таким образом при цене  $P = 8$  минимальные расходы на подкуп составят  $Q \cdot P = 13 \cdot 8 = 104$ . Однако Никифор будет согласен на подкуп избирателей, если его расходы не превысят стоимость виллы (его потери в случае конфискации), т.е. если  $V \geq 104$ .

*Верно использован и обоснован принцип оплаты всем избирателям, проголосовавшим за кандидата, – 4 балла. Верное применение принципа оплаты только тем избирателям, которые голосовали в обмен на вознаграждение оценивается лишь в 1 балл из 4 возможных за эту часть решения.*

**(в) (максимум 6 баллов)** Теперь Никифор за определенную плату может узнать предпочтения всех избирателей, тогда после покупки информации о каждом ему необходимо отсортировать людей по минимальной цене, за которую они готовы продать голос, и выбрать из них 13 первых, заплатив каждому соответствующую индивидуальную минимальную цену. Пять избирателей отдадут свой голос за 0 ден. ед., шестой - за 1 ден. ед., седьмой - за 2, и т.д., и, наконец, тринадцатый – за 8. Но максимальная сумма, которую Никифор должен будет заплатить за подобную информацию составит  $25F$  денежных единиц, то есть получить информацию придется о всех избирателях, ведь информация о

них оказывается раскрытой только после ее покупки. Тогда все расходы на подкуп составят  $1 + 2 + \dots + 8 + 25F = 36 + 25F$  (ден.ед.) Никифору выгодно будет покупать информацию об избирателях, только если  $36 + 25F \leq 104$ , иначе дешевле было бы отказаться от покупки информации. Откуда  $F \leq 2,72$ . Поскольку в стране любая величина расходов в денежных единицах принимает лишь целые значения, Никифор будет готов заплатить максимум по 2 денежные единицы за информацию о каждом избирателе.

*Верно учтено, что купить информацию придется о всех избирателях – 2 балла.*

*Верно учтено, что каждому избирателю можно предложить персонализированную цену за его голос – 3 балла.*

*Верно учтено возникающее из пункта б) ограничение на расходы, связанные с получением информации – 1 балл.*

## Задание 2 (14 баллов)

Страны А и В граничат друг с другом, но не могут обмениваться трудовыми ресурсами и технологиями производства товаров X и Y, потребителями и производителями которых являются жители этих стран. В обеих странах данные товары производятся только из трудовых ресурсов. В стране А имеется ровно 6 единиц трудовых ресурсов, а товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 1 и 4 соответственно. В стране В имеется ровно 4 единицы трудовых ресурсов, а товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 3 и 2 соответственно.

(а) Жители каждой страны имеют одинаковые предпочтения относительно товаров X и Y и потребляют их только в наборах, где на одну единицу товара X приходится ровно 2 единицы товара Y. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля товарами между данными странами и с внешним миром невозможна?

(б) Страны А и В объединились в экономический союз, но обмен технологиями производства внутри этого союза невозможен. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля их с внешним миром по-прежнему невозможна? Сравните полученный результат с предыдущим пунктом. Как вы полагаете, могли бы вы, не проводя расчетов, предсказать полученный результат сравнения? Если да, то обоснуйте. Если нет, то объясните, почему это невозможно.

(в) Предположим теперь, что вступившие в экономический союз страны могут без дополнительных затрат обмениваться технологиями производства друг с другом и вступать в мировую торговлю товарами X и Y. Найдите все соотношения цен товаров X и Y (т.е. величины  $P_X/P_Y$ ) на мировом рынке, при которых торговля с внешним миром не принесет экономическому союзу выигрыша в совокупном объеме потребления наборов по сравнению с пунктом (б).

### Решение и схема оценивания:

(а) (максимум 4 балла) Сначала запишем уравнение КПВ каждой из стран.

КПВ страны А представлено функцией  $X_A + Y_A/4 = 6$ , где  $0 \leq X \leq 6, 0 \leq Y \leq 24$ ,

а КПВ страны В:  $X_B/3 + Y_B/2 = 4$ , где  $0 \leq X \leq 12, 0 \leq Y \leq 8$ .

Учитывая, что в каждой стране на одну единицу товара X приходится ровно 2 единицы товара Y, то есть  $Y=2X$ , в стране А будет потребляться 3 набора, а в стране В – 4 набора. Всего 7 наборов.

*Верно найдена (графически или аналитически) КПВ каждой страны – 1 балл.*

*Верно найдено количество наборов (графически или аналитически) в каждой из стран – 1 балл.*

*Арифметическая ошибка в определении наборов при концептуально верном решении облагается штрафом в 1 балл.*

(б) (максимум 5 баллов) Если обмен технологиями невозможен, то союзу выгоднее будет максимально использовать специализацию каждой из стран в том продукте, в котором у нее наименьшие альтернативные издержки (наибольшая производительность).

Учитывая альтернативные издержки производства товаров в каждой из стран, стандартным образом строим КПВ союза:

$$\begin{cases} X/3 + Y/2 = 16, \text{ где } 0 \leq X \leq 12, 24 \leq Y \leq 32, \\ X + Y/4 = 18, \text{ где } 12 < X \leq 18, 0 \leq Y < 24 \end{cases}$$

Учитывая, что жители союза потребляют наборы, где на одну единицу товара X приходится 2 единицы товара Y, необходимо найти значения X и Y, удовлетворяющие соотношениям  $Y=2X$  и КПВ союза. Откуда находим, что  $X=12$ ,  $Y=24$ . Количество наборов будет определяться количеством товара X (или  $Y/2$ ) и равно 12.

Заметим, что количество наборов при объединении в союз увеличилось. Этот результат можно было предсказать, не проводя расчетов. До объединения каждой из стран приходилось производить оба товара для удовлетворения необходимой пропорции количества товаров в наборах. Объединение в союз позволяет максимально использовать специализацию стран, распределяя ресурсы союза наиболее эффективно и переключая на соответствующие трудовые ресурсы производство того товара, в котором они добиваются наибольшей производительности. В нашем случае, например, страна А специализируется на производстве товара Y, а страна В – на производстве товара X. Такой подход к распределению ресурсов позволяет увеличить совокупное количество наборов.

***Верно найдена (графически или аналитически) КПВ союза, либо верно обоснована специализация стран при производстве товаров – 2 балла.***

***Верно найдено количество наборов– 1 балл.***

***Приведено верно обоснование того, что объединение в союз позволяет увеличить количество потребляемых наборов. – 2 балла.***

**(в) (максимум 5 баллов)** Поскольку затраты ресурсов не требуются на обмен технологиями, то КПВ союза имеет вид:

$$\frac{X}{3} + \frac{Y}{4} = 10, \text{ где } 0 \leq X \leq 30, 0 \leq Y \leq 40$$

То есть страна А воспользовалась бы технологией страны В в производстве товара X, а страна В - технологией страны А в производстве товара Y.

Сразу заметим, что при обмене технологиями прежний потребляемый набор товаров в точности доступен союзу, поскольку без обмена страны строго специализировались в производстве одного из товаров.

Рассмотрим различные интервалы величины  $\frac{P_X}{P_Y}$ .

Если  $\frac{P_X}{P_Y} > 4/3$ , то союзу выгоднее использовать обмен технологиями и специализироваться на производстве товара X. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество производимого союзом товара X (а значит, и увеличить количество потребляемых наборов), на котором союз и специализируется вне зависимости от того, произошел ли обмен технологиями.

Аналогично, если  $\frac{P_X}{P_Y} < 4/3$ , то союзу выгоднее использовать обмен технологиями и специализироваться на производстве товара Y. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество производимого союзом товара Y (а значит, и увеличить количество потребляемых наборов), на котором союз и специализируется вне зависимости от того, произошел ли обмен технологиями.

При  $\frac{P_X}{P_Y} = 4/3$  союзу безразлично обмениваться технологиями или нет, поскольку бюджетное множество союза в условиях обмена технологиями и без него оказывается одинаковым. В этом случае альтернативные издержки производства каждого из товаров при обмене технологиями в точности равны альтернативным издержкам покупки этих товаров на мировом рынке. В то же время при отсутствии обмена технологиями и указанном

отношении цен каждая страна будет специализироваться на том товаре, в производительности которого имеет преимущество по сравнению с другой страной.

Таким образом, при  $\frac{P_X}{P_Y} = 4/3$  союз не выиграет от обмена технологиями (будет потреблять столько же наборов, сколько потреблял бы без обмена технологиями).

***Верно определена (графически или аналитически) КПВ союза при обмене технологиями – 2 балла.***

***Верно и аргументированно рассмотрены все возможные интервалы цен, определено значение их отношения – 3 балла. Приведенный верный ответ без достаточной аргументации оценивается лишь в 1 балл из 3 возможных за данную часть решения.***

### Задание 3 (14 баллов)

Найти решения системы, удовлетворяющие условию  $z \geq 0$ :

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^2 \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x. \end{cases}$$

#### Решение:

Выделим полный квадрат во втором уравнении:

$$\begin{aligned} 2zy + 4z - y^2 - 2y &= 9 + 4y, \\ y^2 + 6y + 9 - 2zy - 4z &= 0, \\ y^2 + 6y + 9 - 2zy - 6z + z^2 &= z^2 - 2z, \\ (y - z + 3)^2 &= z^2 - 2z. \end{aligned}$$

Выделим полный квадрат в третьем уравнении:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 - 4x &= 0, \\ x^2 - 4x + 4 &= 4 - z^2, \\ (x - 2)^2 &= 4 - z^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $z^2 - 2z \geq 0$ ,  $4 - z^2 \geq 0$ . Что одновременно возможно при  $z \geq 0$  только при  $z = 0$  и  $z = 2$ . При  $z = 0$  находим из второго уравнения  $y = -3$  – не удовлетворяют первому уравнению системы. При  $z = 2$  находим  $y = -1$ ,  $x = 2$ . Проверкой убеждаемся в том, что данная тройка удовлетворяет первому уравнению.

Ответ:  $(2; -1; 2)$ .

#### Критерии:

Критерий	Балл
В результате логически обоснованного алгоритма получен верный ответ	14
Алгоритм верный, но в результате арифметической ошибки получен неверный ответ	7
Ответ верный, но нет логического обоснованного алгоритма	1
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

#### Задание 4 (14 баллов)

На сторонах АВ и ВС треугольника ABC выбраны соответственно точки М и N так, что  $AM : MB = 1 : 4$ ,  $BN : NC = 3 : 7$ . На стороне AC выбрана точка К так, что отрезок ВК пересекает отрезок MN в отношении  $2 : 5$ , считая от точки М.

Найдите, в каком отношении точка К делит сторону AC.

#### РЕШЕНИЕ:

Обозначим точку пересечения отрезков ВК и MN через О. Тогда по условию:  $MO : ON = 2 : 5$ .

Треугольники MON и BON имеют общую высоту, поэтому отношение их площадей равно

$$\frac{S_{MOB}}{S_{BON}} = \frac{2}{5}.$$

Поэтому пусть  $S_{MOB} = 2s$ ,  $S_{BON} = 5s$ .

Рассмотрим треугольники AOM и MOB.

Они имеют общую высоту, поэтому отношение их площадей равно:

$$\frac{S_{AOM}}{S_{MOB}} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда,  $S_{AOM} = \frac{s}{2}$  и  $S_{AOB} = \frac{s}{2} + 2s = \frac{5s}{2}$ .

Аналогично имеем отношение

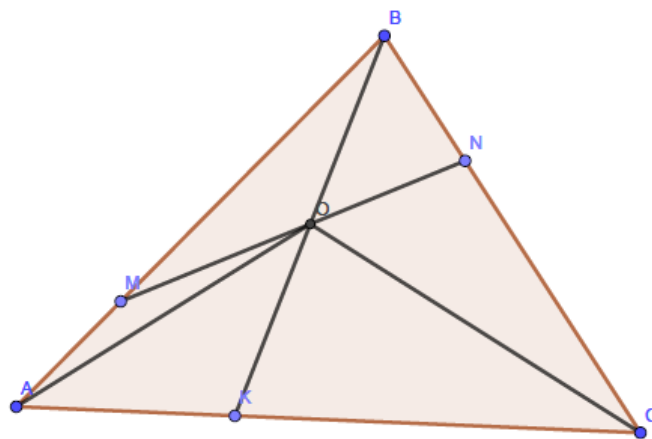
$$\frac{S_{CON}}{S_{BON}} = \frac{7}{3},$$

и отсюда,  $S_{CON} = \frac{35s}{3}$  и  $S_{COB} = 5s + \frac{35s}{3} = \frac{50s}{3}$ . Теперь найдем отношение АК:КС как отношение площадей  $S_{AOB}$  и  $S_{COB}$ :

$$AK : KC = \frac{5s}{2} : \frac{50s}{3} = 3 : 20.$$

В самом деле, площадь треугольника AOB равна разности площадей треугольников ABK и AOK, и площадь треугольника COB равна разности площадей треугольников CBK и COK. Но отношение площадей треугольников ABK и CBK равно отношению АК:КС, как и отношений площадей треугольников AOK и COK.

Ответ: 3:20.





### Задание 5 (14 баллов)

Перед новым годом Анна решила показать Эльзе фокус: для этого она взяла 2018 карточек с различными натуральными числами от 1 до 2018 и сказала: смотри Эльза, сумма всех этих карточек делится на 2019. Эльза удивилась и придумала заколдовать все числа, возведя каждое из них в пятую степень.

- а) Удастся ли теперь фокус Анны?
- б) Могла ли Эльза выбрать такую нечетную натуральную степень, чтобы фокус не удался?
- в) Могла ли Эльза выбрать такую целую степень, чтобы фокус не удался?

#### Решение:

Достаточно разбить слагаемые на пары первый + последний, второй + предпоследний и т.д.

Тогда, применим  $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ .

В каждой из скобок есть множитель 2019, значит – делится

Для доказательства пункта в) достаточно взять  $n = 0$ , очевидно сумма 2018

#### Критерии:

Критерий	Балл
Приведен в пункте а) верный ответ, доказан пункт б) и приведен контрпример в пункте в)	14
Доказан пункт б) но нет верного ответа в пункте а) или нет контрпримера пункта в)	10
Даны верные ответы, но нет обоснования	1
Решение не соответствует ни одному и представленным критериям	0

### Задание 6 (15 баллов)

Представьте себе, что вы живете в городе, территория которого принимает круглую форму, и ваша квартира находится на расстоянии  $s_0$  от центра города. Вам понадобился один потребительский товар, который продается практически везде в городе, так что можно считать, что купить его можно абсолютно в любой точке города. Самый дальний магазин города расположен на расстоянии  $s_{max} = 50$  от центра города. Ваше удовольствие от покупки данного товара определяется функцией  $u = v - p - t$ , где  $v$  – денежная оценка удовольствия от потребления товара,  $p$  – цена данного товара,  $t$  – транспортные издержки, равные стоимости доставки товара от места покупки до вашей квартиры. Покупка товара в каждом магазине возможна также дистанционно (например, через мобильное приложение магазина), так что вы не несете издержек на проезд до магазина. Известно, что из-за разной стоимости земли цена товара зависит от дальности расположения магазина от центра города, и в произвольном магазине равна  $p_m = p_{max}(1 - 0,01s_m)$ , где  $p_{max} = 500$  – цена товара в магазине в самом центре города,  $s_m$  – расстояние от магазина до центра города. Стоимость доставки товара определяется по формуле  $t = 0,5(\Delta s)^2$ , где  $\Delta s$  – расстояние от магазина до вашей квартиры. Определите, в каком магазине вы купите данный товар (т.е. на каком расстоянии он будет находиться от вашей квартиры и от центра города), если вы максимизируете свое удовольствие.

#### Решение и схема оценивания:

(а) 1) Заметим, что выбранный магазин будет находиться на луче, соединяющем центр города и точку, в которой располагается наш дом, причем дальше нашего дома. Это так, поскольку все магазины на одинаковом расстоянии от нашего дома будут иметь одинаковые для нас транспортные издержки, но минимальная цена покупки будет в наиболее удаленном от центра магазине. Таким образом,  $\Delta s = s_m - s_0$ . **Обоснование этого любым способом – 5 баллов;**

2) Тогда наша полезность принимает вид  $u = v - p - t = v - p_{max}(1 - 0,01s_m) - 0,5(s_m - s_0)^2$ . Это парабола с ветвями вниз. Ее максимум достигается в точке  $s_m = s_0 + 5$ . **Нахождение максимума – 5 баллов.**

Таким образом, если наш дом находится на расстоянии не более 45 от центра, то  $s_m = s_0 + 5$ , иначе мы выберем магазин на границе города  $s_m = 50$ . **Нахождение граничного решения – 5 баллов.**

### **Задание 7 (15 баллов)**

Рынок услуг по отделке квартир низкого и среднего ценового сегментов является высоко конкурентным. Зачастую наблюдается следующий феномен: рабочие, выполняющие отделочные работы, выполняют закупку черновых материалов самостоятельно, а заказчик оплачивает им стоимость этих материалов в соответствии с представленным рабочими списком закупленных материалов и их ценой. Заказчик может обратить внимание, что цены на типовые материалы оказываются завышенными по сравнению со средними значениями на рынках соответствующих товаров. Объясните не более чем в 8-10 предложениях для каждого пункта, почему

(а) заказчик может соглашаться с такой ситуацией;

(б) это может быть выгодно бригаде рабочих.

#### **Краткое решение и схема оценивания:**

*Обоснование только для одной стороны – 7 баллов, обоснования второй стороны сделки – 8 баллов. При неполном (половинчатом) объяснении для каждого пункта – половина баллов.*

Примеры объяснений:

(а) Заказчик не тратит своё время на закупку – готов платить больше;

Заказчик хуже разбирается в материалах – готов платить больше за выбор материалов специалистами;

(б) Бригаде выгодно делать ремонт выбранными ими самим материалами – так они могут гарантировать лучшее качество;

Бригада может хотеть заработать на покупке материалов честным (это вид выполняемых работ) или нечестным способом (обман в ценах в списке).