Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2018 - 2019 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

1 вариант

Задание 1 (12 баллов)

Несколько факультетов Академии выпускают множество магистров по различным направлениям подготовки).

В 2016 году, в связи с увеличением спроса работодателей на выпускников магистерских программ и на основании анализа современных прикладных научных исследований и разработок, изучения потребностей рынка в высококвалифицированных кадрах Академией было решено открыть пять новых факультетов, которые стали бы готовить таких специалистов для разных секторов экономики.

В результате количество выпускников-магистров Академии сильно выросло в 2018 году и стало равно 2112 человек. Предполагая, что ранее, по 2017 год, ежегодный выпуск составлял 750 профессионалов-магистров, определите, сколько факультетов готовили таких специалистов изначально.

Считайте, что все факультеты всегда выпускают одинаковое количество магистров.

Решение: Пусть n – изначальное количество факультетов. Заметим, что по условию все факультеты в момент выпуска студентов равнозначны (то есть выпускают одинаковое количество студентов).

Рассмотрим сначала условие выпуска одинакового количества магистров. Возможны следующие варианты:

1) одинаковым является выпуск каждого конкретного факультета, если сравнивать 2017 и 2018 год

2) одинаковым является количество магистров, выпускаемых в каждый конкретный год (то есть «всегда») всеми факультетами. Если сравнивать один факультет в различные годы, то из экономических соображений, очевидно, что если спрос на программу магистратуры возрос, то количество выпускников одного факультета может только возрастать к 2018 году

3) одинаковым является и то и другое.

Пусть k_1 студентов – выпуск одного факультета до увеличения спроса, k_2 студентов – выпуск одного факультета после открытия пяти новых факультетов, тогда из условия получим $n \cdot k_1 = 750$ и $(n + 5) \cdot k_2 = 2112$, причем $k_2 \geq k_1$.

Рассмотрим первый вариант: если $k_2 = k_1$ тогда на пять новых факультетов приходится $2112 - 750 = 1362$ магистра. Заметим, что 1362 не кратно пяти, а так как все пять факультетов были открыты одновременно, количество мест на них было одинаково (в отличие от тех факультетов, которые уже существовали в Академии и, возможно, были открыты в разное время с разным количеством мест). Аналогично не возможен и третий вариант.

Рассмотрим второй вариант. По основной теореме арифметики каждое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно, если не учитывать порядок следования множителей. Тогда воспользуемся разложением чисел 750 и 2112 на простые множители $750 = 5^3 \cdot 2 \cdot 3$, $2112 = 3 \cdot 11 \cdot 2^6$ и получим систему уравнений: $\begin{cases} n \cdot k_1 = 5^3 \cdot 2 \cdot 3 \\ (n+5) \cdot k_2 = 3 \cdot 11 \cdot 2^6 \end{cases}$, где n, k_1 и k_2- натуральные числа, $k_2 > k_1$

Предположим, что n кратно 5, но тогда выражение $n + 5$ тоже кратно 5, но $3 \cdot 11 \cdot 2^6$ не кратно 5, поэтому n не кратно 5. Значит n либо 2, либо 3, либо 6. Рассмотрим каждый из вариантов:

1) $n = 2$, тогда $n + 5 = 7$, но в разложении $3 \cdot 11 \cdot 2^6$ нет 7

2) $n = 3$, тогда $n + 5 = 8$, $k_1 = \frac{750}{3} = 250$ и $k_2 = \frac{2112}{8} = 264$, $264 > 250$ и все условия задачи выполнены

3) $n = 6$, тогда $n + 5 = 11$, $k_1 = \frac{750}{6} = 125$ и $k_2 = \frac{2112}{11} = 192$, $192 > 125$ и все условия задачи выполнены

Ответ: 3 или 6

Критерии	**Балл**
Приведен алгоритм решения, обоснован и получен верный ответ и доказано, что других решений нет	12
Приведен алгоритм решения, но рассмотрены не все возможные случаи или не доказан факт того, что нет других решений	9
Приведен верный пример и обосновано, что утверждение задачи справедливо	3
Приведен алгоритм решения, однако в результате арифметической ошибки получен неверный ответ	3
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 2 (12 баллов)

Бизнесмен Вячеслав Приколистов привязал к своему счету дополнительную платиновую банковскую карту для своей жены Елены и, уезжая в командировку, оставил жене карту с запиской следующего содержания:

«Дорогая, трать сколько угодно на всё, что угодно, но… ПИН-код придется угадать, а чтобы было проще – цифры ПИН-кода даст решение задачи: нарисуй четырехугольник PNQM, он такой замечательный, что в него, если захочется, можно вписать окружность, и около него можно описать окружность. Прямые PM и NQ пересекаются в точке I. Сумма сторон PN и QM равна 12, а произведение равно 35. Найди периметр треугольника PIN. Если ты не забудешь ничего важного, то получишь заветные четыре цифры. Удачи!»

Елена справилась с задачей легко, ведь всего 2 года назад окончила экономический факультет РАНХиГС.

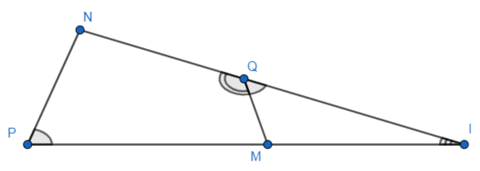
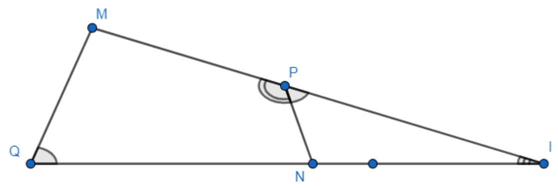
Сможете ли Вы:

✓ Повторить её решение? (чертёж обязателен)

✓ Ответить на вопрос, был ли в удачном шоппинге элемент везения? (какова вероятность того, что Елене удалось верно ввести ПИН-код, ведь решив задачу она узнала просто четыре цифры, а не их последовательность, а после третьей неудачной попытки карта блокируется).

Решение:

1. Сумма сторон PN и QM равна 12, а произведение равно 35. Значит, стороны равны 7 и 5. Вот только не сказано, PN=7, QM=5 или наоборот, поэтому рассмотрим два варианта.

PN=7, QM=5	PN=5, QM=7
	
Из свойства описанного четырехугольника 7+5=PM+NQ (как сумма противолежащих сторон) Из свойства вписанного четырехугольника ∠MPN+∠NQM=180’,но ∠IQM=180’-∠NQM (как смежные), отсюда ∠MPN=∠IQM, отсюда ΔPIN~ ΔQIN по двум углам. Из подобия треугольников следует равенство отношений их элементов $\frac{PN}{MQ} = \frac{7}{5} = k$ (коэф подобия)	Аналогично действуя, получаем периметр **ΔPIN=35**

Периметр ΔQIN= периметр ΔPIN-PM-7-NQ+5= периметр ΔPIN-12-7+5= **периметр ΔPIN -14** Периметры подобных треугольников относятся как коэффициенты подобия $\frac{\text{периметр } \mathbf{\Delta PIN}}{\text{периметр } \mathbf{\Delta PIN} \ \mathbf{-14}} = \frac{7}{5}$ Отсюда периметр **ΔPIN=49**	

2. Цифры получились: 4,9,3,5.
3. Посчитаем вероятность, с которой был введен правильный код.

Шоппинг удался, если код был введен с первого, второго или третьего раза.
Всего перестановок из четырех различных элементов 4! = 1*2*3*4=24.
Нужный вариант 1.

$\frac{1}{24}$ - вероятность ввести верный код с первого раза

$\frac{23}{24} * \frac{1}{23} = \frac{1}{24}$- вероятность ввести верный код со второго раза

$\frac{23}{24} * \frac{22}{23} * \frac{1}{22} = \frac{1}{24}$ вероятность ввести верный код с третьего раза

$\frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 0{,}125$ вероятность ввести верный с трех попыток

Ответ:

1. Цифры кода 4935
2. Елене повезло, вероятность ввести верный код, имея три попытки 0,125. Т е одного решения задачки для 100% гарантии шоппинга недостаточно.

Критерии	**Балл**
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, найдены оба варианта периметров, правильно вычислена вероятность ввода нужного пин-кода	12
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, найдены оба варианта периметров, но неверно вычислена вероятность ввода нужного пин-кода	9
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, но рассмотрен только один из вариантов периметра	6
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 3 (13 баллов)

Коррумпированный чиновник Никифор из страны Y нечестным трудом заработал на виллу. Против Никифора завели уголовное дело, и его вилла оказалась под угрозой конфискации. В случае конфискации Никифор понесет потери в размере V денежных единиц (ден. ед.). Однако друзья посоветовали Никифору стать депутатом на ближайших выборах и получить абсолютный иммунитет от преследования правоохранителей. В округе, представителем которого может стать Никифор, есть всего 25 избирателей, которые делятся на 3 группы:

1. 20% избирателей при любых обстоятельствах поддержат на выборах Никифора.
2. 20% избирателей при любых обстоятельствах поддержат Ратибора, конкурента Никифора.
3. Оставшиеся 60% избирателей не хотели бы видеть своим депутатом ни одного из кандидатов, но при прочих равных готовы за некоторую плату отдать свой голос на выборах за того кандидата, кто предложит им больше денег.

Известно, что, если какой-либо кандидат предложит за один голос избирателя по 1 ден. ед., то он получит только одного дополнительного сторонника, если предложит по 2 ден. ед. – то двух дополнительных сторонников, и т.д. Голосование в стране Y является открытым, поэтому только после голосования кандидат точно будет знать всех, кто проголосовал за него, и отдаст избирателям деньги сразу после волеизъявления. Известно также, что кандидатов на выборах только два, что все избиратели обязаны прийти на голосование и не испортят бюллетени, т.е. каждый из двадцати пяти избирателей обязательно проголосует либо за Ратибора, либо за Никифора, либо против всех, а сами кандидаты не имеют права голосовать. Кроме того, Ратибор (как, впрочем, и Никифор) может конкурировать нечестно, но он не богат, поэтому максимальная сумма денег, которую он готов отдать за подкуп избирателей, составляет такую величину, при которой достаточно было бы победить на выборах, если бы конкурент вел себя честно. Никифор знает о положении Ратибора и его возможных расходах, поэтому для подкупа любого избирателя готов всегда заплатить больше, чем предложил бы Ратибор. Для победы любого кандидата на выборах необходимо набрать не менее 50% голосов. Денежные единицы в этой стране могут принимать лишь целые значения.

(а) Выпишите функцию предложения голосов за любого из кандидатов.

(б) Найдите минимальные расходы Никифора на подкуп избирателей для победы на выборах, которые он готов был бы понести, если бы точно знал, что Ратибор не будет конкурировать честно, и если даже после голосования ни один кандидат не может определить, к какой именно группе относился тот или иной избиратель.

(в) Никифор нашел способ до выборов достоверно узнать, какую минимальную сумму денег готов получить каждый избиратель за продажу своего голоса, и теперь кандидат первым сможет договориться со всеми нужными ему избирателями индивидуально. Известно, что избиратели держат слово: если после договоренности с Никифором к ним обратится Ратибор, то никто из них не изменит своего решения отдать свой голос за Никифора, сколько бы Ратибор им не предложил за их голос. Стоимость информации об отдельном избирателе составит F денежных единиц. Какую максимальную сумму F готов будет заплатить Никифор за подобную информацию для победы на выборах?

Решение и схема оценивания:

(а) (максимум 4 балла) 15 избирателей готовы получить денежное вознаграждение от кандидата при голосовании. Остальные 20 избирателей в любом случае голосуют за одного из кандидатов. Выпишем функцию предложения Q голосов избирателей в зависимости от цены за голос P. По условию цена может принимать только целые значения. При этом, если Никифор вообще не будет предлагать избирателям денег, то за него проголосуют ровно 5 человек. Значит, если P = 0, то Q = 5.

Если Никифор увеличит цену до 1 ед., то за него проголосует ещё один избиратель, и т.д., пока цена не достигнет 15 и число голосов не станет равно 20 (оставшиеся пять человек не хотят продавать голоса ни при каких условиях). Иначе говоря, при $1 \leq P \leq 15$ предложение голосов имеет вид Q=5+P. При дальнейшем росте цены величина предложения будет оставаться неизменной и будет равна 20. Совместим три случая в одну функцию предложения:

$$Q = \begin{cases} 5, P = 0 \\ 5 + P, 1 \leq P \leq 15 \\ 20, P > 15 \end{cases}$$

Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, однако отсутствуют ограничения ее применения в зависимости от цены – выставляется лишь 2 балла из 4 возможных.

Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, но не все интервалы цены и ограничения по количеству учтены – выставляется лишь 3 балла из 4 возможных.

Верно записана функция предложения голосов – 4 балла из 4 возможных.

(б) (максимум 4 балла) Ратибору для победы нужно получить минимум 13 голосов (т.е. подкупить дополнительно 8 избирателей). Функция предложения принимает значение Q = 13 при цене P = 8. Ясно, что Ратибору бесполезно было бы предлагать больше денег за подкуп избирателя, так как он и так выиграл бы выборы при честном поведении конкурента. Поскольку кандидат не знает предпочтений избирателей, он вынужден платить всем голосовавшим. Никифору для победы придется предложить каждому избирателю минимум на 1 ден. ед. больше (при прочих равных каждый избиратель, который готов продать свой голос, предпочтет получить 9 ден. ед. вместо 8). Стоит заметить, что при цене 9 за кандидата проголосовало бы 14 избирателей, но Никифору достаточно лишь 13 голосов. Предполагая, что Никифор минимизирует возможную сумму расходов, достаточную для победы, то он заплатил бы только 13 избирателям из 14 проголосовавших. Таким образом при цене P = 9 минимальные расходы на подкуп составят Q*P = 13*9 = 117. Однако Никифор будет согласен на подкуп избирателей, если его расходы не превысят стоимость виллы (его потери в случае конфискации), т.е. если $V \geq 117$.

Верно использован и обоснован принцип оплаты всем избирателям, проголосовавшим за кандидата, – 3 балла. Верное применение принципа оплаты только тем избирателям, которые голосовали в обмен на вознаграждение оценивается лишь в 1 балл из 3 возможных за эту часть решения.

Верно учтена доплата каждому избирателю в 1 ден. ед. – 1 балл.

(в) (максимум 5 баллов) Теперь Никифор за определенную плату может узнать предпочтения всех избирателей, тогда после покупки информации о каждом ему необходимо отсортировать людей по минимальной цене, за которую они готовы продать голос, и выбрать из них 13 первых, заплатив каждому соответствующую индивидуальную минимальную цену. Пять избирателей отдадут свой голос за 0 ден. ед., шестой - за 1 ден. ед., седьмой - за 2, и т.д., и, наконец, тринадцатый – за 8. Но максимальная сумма, которую Никифор должен будет заплатить за подобную информацию составит 25F денежных единиц, то есть получить информацию придется о всех избирателях, ведь информация о них оказывается раскрытой только после ее покупки. Тогда все расходы на подкуп составят 1 + 2 + ... + 8+25F = 36+25F (ден. ед.) Никифору выгодно будет покупать информацию об избирателях, только если $36 + 25F \leq 117$, иначе дешевле было бы отказаться от покупки информации. Откуда $F \leq 3{,}24$. Но поскольку в стране любая величина расходов в денежных единицах принимает лишь целые значения, Никифор будет готов заплатить максимум по 3 денежные единицы за информацию о каждом избирателе.

Верно учтено, что купить информацию придется о всех избирателях – 2 балла.

Верно учтено, что каждому избирателю можно предложить персонифицированную цену за его голос – 2 балла.

Верно учтено возникающее из пункта б) ограничение на расходы, связанные с получением информации – 1 балл.

Задание 4 (12 баллов)

В начальный момент времени на электронном табло игрового автомата отображаются два натуральных числа $a_0 = 3$ и $b_0 = 720$. За нажатие на кнопку автомата игрок должен заплатить 5 рублей. При нажатии кнопки первое из этих чисел заменяется на $a_1 = r_{11}(6 \cdot a_0 + 2)$, а второе число заменяется на $b_1 = r_{2017}(b_0 + 24)$, где $r_x(y)$ – остаток от деления натурального числа y на x. Игрок, нажав кнопку еще раз (предварительно уплатив ту же сумму), получит по таким же закономерностям на табло числа

$a_2 = r_{11}(6 \cdot a_1 + 2)$ и $b_2 = r_{2017}(b_1 + 24)$ и так далее. Игрок получает приз в размере 100 тыс. рублей, если при очередном нажатии на табло загорятся числа $a_n = 2$ и $b_n = 6$. Сможет ли игрок на таком игровом автомате оказаться в «плюсе»? Если да, то сколько составит его возможная выгода?

Решение:

Выпишем несколько первых членов соответствующей последовательности (a_n): 3,9,1,8,6,5,10,7,0,2,3,9,… Нетрудно понять, что значение каждого члена последовательности a_n (начиная со второго) однозначно вычисляется по значению ее предыдущего члена a_(n-1), это периодическая последовательность с периодом 10, и в ней встречается 2.

Ясно, что в первой последовательности число 2 будет встречаться на местах с номерами вида n=9+10·k, k∈N_0. Определим, на каких местах будет встречаться число 6 во второй последовательности. Вторая последовательность – арифметическая прогрессия, взятая по модулю числа 2017, ее общий член можно задать формулой

b_n=r_2017 (720+24·n), n∈N_0.

Поэтому b_n=6⟺r_2017 (720+24·n) = 6⟺720+24·n=6+2017t, t∈Z. Имеем уравнение в целых числах:

24n-2017t=6-720⟺24n-2017t=-714.

Решив его относительно n, получим: n=1483+2017m, m∈N_0. Теперь найдем, при каких значениях k, m∈N_0

9+10·k=1483+2017m⟺10·k-2017m=1474

Решив данное уравнение в целых числах, получим k=1761+2017·l, l∈N_0. Стало быть, одновременно a_n=2 и b_n=6 при n=9+10·k=9+10·(1761+2017·l) = 17619+20170s, s∈N_0. Значит, выиграть возможно только на 17619-ом нажатии кнопки. Уплаченная в таком случае сумма должна составлять 17619·5=88095 руб. А поскольку выигрыш составляет 100 тыс. рублей, то выгода равна 11905 руб.

Ответ: да, выгода составляет 11905 руб.

Критерии	Балл
Приведен алгоритм, в результате обоснованного решения получен верный ответ и верно вычислена выгода	12
Приведен алгоритм, в результате обоснованного решения получен верный ответ, но в результате арифметической ошибки неверно вычислена выгода	6
Получен верный ответ, но в алгоритме решения есть существенные логические недочеты	3

Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 5 (12 баллов)

Сколько существует целых чисел, удовлетворяющих неравенству?

$$\frac{(-\log_{1/3}27 - x)(3^x - 9)(|x+9| - |1-x|)}{\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{2019}\right)\sin(-12 * (18|x^{-1}| + 8|x|)^{-1} - 0{,}012\pi)} < 0$$

Решение:

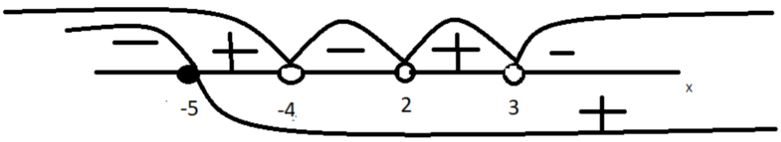
Используя свойства монотонных функций, можно сделать равносильный переход к системе неравенств (с учетом ОДЗ): $\begin{cases} \frac{(3-x)(x-2)(2x+8)}{\sin(\frac{-12}{18|x^{-1}|+8|x|} - 0{,}012\pi)} < 0 \\ x+5 \geq 0, \\ \text{Так как подкоренное выражение} \\ \text{не может отрицательным} \end{cases}$

Обратим внимание, что для аргумента синуса выполнено неравенство (по следствию из неравенства Коши):

$$-1 - 0{,}012\pi \leq \frac{-12}{18|x^{-1}|+8|x|} - 0{,}012\pi \leq -0{,}012\pi$$

поэтому синус отрицателен и на него можно сократить, поменяв знак неравенства на противоположный. Воспользуемся методом интервалов:

$$\begin{cases}(3-x)(x-2)(x+4) > 0 \\ x+5 \geq 0\end{cases}$$



Ясно, что целое число, удовлетворяющее системе неравенств только одно = -5

Ответ: 1

Критерии	Балл
Приведен алгоритм решения, обоснован и получен верный ответ и доказано, что других решений нет	12
Приведен верный алгоритм решения, однако присутствует арифметическая ошибка	9
Приведен алгоритм перехода к методу интервалов, однако неверно отобраны решения	6
Верно описаны свойства входящих в неравенство функций, однако переход к методу интервалов не сделан	3
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 6 (13 баллов)

Страны A и B граничат друг с другом, но не могут обмениваться трудовыми ресурсами и технологиями производства товаров X и Y, потребителями и производителями которых являются жители этих стран. В обеих странах данные товары производятся только из трудовых ресурсов. В каждой из стран имеется ровно по 10 единиц трудовых ресурсов. Но в стране A товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 1 и 2 соответственно, а в стране B товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 3 и 1 соответственно. Жители каждой страны имеют одинаковые предпочтения относительно товаров X и Y и потребляют их только в наборах, где на одну единицу товара Y приходится ровно 2 единицы товара X. При этом чем больше таких наборов потребляется в стране, тем лучше жителям этой страны.

(а) Страны A и B объединились в экономический союз, но обмен технологиями производства внутри этого союза невозможен. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля союза с внешним миром невозможна?

(б) Предположим теперь, что торговля союза с внешним миром по-прежнему невозможна, но стал доступен обмен технологиями производства внутри данного союза. Однако этот обмен и обучение жителей новым технологиям влечет дополнительные издержки для каждой из стран. Так обучение новым технологиям сокращает количество трудовых ресурсов в каждой из стран ровно в α $(\alpha > 1)$ раз, независимо от того, обучаются ли жители страны новым технологиям или передают знания жителям другой страны. Найдите максимальную величину α_{max}, при которой количество наборов, потребляемых союзом, не сократится по сравнению с пунктом (а).

(в) Предположим теперь, что $\alpha = \alpha_{max}$ и образовавшийся экономический союз может торговать товарами X и Y с внешним миром по мировым ценам. Найдите все значения отношения цен товаров X и Y (т.е. величины P_X/P_Y) на мировом рынке, при которых обмен технологиями между странами окажется невыгодным экономическому союзу, т.е. совокупное количество потребляемых этим союзом наборов сократится.

Решение и схема оценивания:

(а) (максимум 3 балла) Сначала построим КПВ союза. Для этого определим КПВ каждой из стран.

КПВ страны A представлено функцией $X_A + Y_A/2 = 10,$ где $0 \leq X \leq 10, 0 \leq Y \leq 20,$, а КПВ страны B: $X_B/3 + Y_B = 10,$ где $0 \leq X \leq 30, 0 \leq Y \leq 10.$

Учитывая альтернативные издержки производства товаров в каждой из стран, стандартным образом строим КПВ союза: $\begin{cases} X/3 + Y = 30, \text{где } 0 \leq X \leq 30, 20 \leq Y \leq 30, \\ X + Y/2 = 40, \text{где } 30 < X \leq 40, 0 \leq Y < 20 \end{cases}$

Учитывая, что страна потребляет наборы, где на одну единицу товара Y приходится 2 единицы товара X, необходимо найти значения X и Y, удовлетворяющие соотношениям X=2Y и КПВ союза. Откуда находим, что X=32, Y=16. Количество наборов будет определяться количеством товара Y (или X/2) и равно 16.

Верно найдена (графически или аналитически) КПВ союза, либо верно обоснована специализация стран при производстве товаров – 2 балла. Верно найдено количество наборов– 1 балл.

(б) (максимум 4 балла) Если возможен обмен технологиями, то союзу выгоднее будет использовать технологии с наибольшей производительностью, поэтому стране A стоит перенять технологию производства товара X, а стране B – технологию производства товара Y. Если бы затраты ресурсов не требовались на обмен технологиями, то КПВ союза имела бы вид:

$$\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}=20, \text{где } 0 \le X \le 60, 0 \le Y \le 40$$

Однако обмен технологиями сокращает количество трудовых ресурсов в α раз. Найдем, такое значение α_{max}, при котором количество наборов останется таким же, как и в союзе, не использующем обмен технологиями (т.е. 16 наборов). Величины X=32 и Y=16 при потреблении 16 наборов должны тогда удовлетворять уравнению КПВ $\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}=20/\alpha_{max}$, таким образом $\alpha_{max}=15/14$. А уравнение КПВ союза при α_{max} будет иметь вид

$$\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}=56/3, \text{где } 0 \le X \le 56, 0 \le Y \le 112/3$$

Верно определена КПВ союза при обмене технологиями – 1 балл. Использован верный подход к определению α_{max} - 2 балла. Верно найдена величина α_{max}– 1 балл.

(в) (максимум 6 баллов) Если обмен технологиями выгоден странам при объединении в союз, то КПВ союза имеет вид

$$\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}=56/3, \text{где } 0 \le X \le 56, 0 \le Y \le 112/3$$

Если же этот обмен невыгоден, то КПВ союза имеет вид

$$\begin{cases} X/3+Y=30, \text{где } 0 \le X \le 30, 20 \le Y \le 30, \\ X+Y/2=40, \text{где } 30 < X \le 40, 0 \le Y < 20 \end{cases}$$

Заметим сразу, что если $\frac{P_X}{P_Y} \ge 2$, то союзу выгоднее специализироваться на производстве товара X и обмен технологиями при найденном α_{max} расширит бюджетное множество союза при выходе на мировой рынок и позволит потреблять больше наборов, чем при отсутствии обмена технологиями. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество товара X, которое может производить союз, специализируясь на нем. Аналогично, если $\frac{P_X}{P_Y} \le 1/3$, то союзу выгоднее специализироваться на производстве товара Y и обмен технологиями при найденном α_{max} расширит бюджетное множество союза при выходе на мировой рынок и позволит потреблять больше наборов, чем при отсутствии обмена технологиями. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество товара Y, которое может производить союз, специализируясь на нем.

Если же $\frac{1}{3} < \frac{P_X}{P_Y} < 2$, то союз, в котором не произошел обмен технологиями, будет производить 30 единиц товара X (страна B будет специализироваться на товаре X) и 20 единиц товара Y (страна A будет специализироваться на производстве товара Y). При этом часть произведенного товара Y будет обмениваться на мировом рынке на товар X.

Если $\frac{P_X}{P_Y} < 2/3$, союз, в котором произошел обмен технологиями, будет специализироваться на производстве товара Y, поскольку покупка товара X на мировом рынке будет обходиться дешевле, чем производство его внутри союза. Если $\frac{2}{3} < \frac{P_X}{P_Y}$, союз будет специализироваться на производстве товара X, поскольку покупка товара Y на мировом рынке будет обходиться дешевле, чем его производство внутри союза.

Учитывая вышесказанное, стоит рассмотреть два интервала цен (с различной специализацией на товарах), при которых возможность обмена технологиями может оказаться невыгодной, а именно: $\frac{1}{3} < \frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3$ и $\frac{2}{3} \leq \frac{P_X}{P_Y} < 2$. Сразу заметим, что при $\frac{P_X}{P_Y} = 2/3$ союзу невыгодно обмениваться технологиями, поскольку для покупки наборов в условиях обмена технологиями союз будет иметь 2*56=3*112/3=112 условных денежных единиц (в этом случае альтернативные издержки производства каждого из товаров в точности равны альтернативным издержкам покупки этих товаров на мировом рынке), а в условиях отсутствия обмена технологиями он будет иметь 2*30+3*20=120 денежных единицы.

Определим теперь, при каком соотношении цен в условиях обмена технологиями союз, специализируясь на производстве товара X, получит в условиях мировой торговли меньше располагаемых денежных средств на покупку наборов, чем в условиях, когда обмен технологиями не произошел:

$$56P_X < 30P_X + 20P_Y, \text{ где } 2/3 \leq \frac{P_X}{P_Y}, \text{откуда } \frac{2}{3} \leq \frac{P_X}{P_Y} < 10/13.$$

Аналогично, определим, при каком соотношении цен в условиях обмена технологиями союз, специализируясь на производстве товара Y, получит в условиях мировой торговли меньше располагаемых денежных средств на покупку наборов, чем в условиях, когда обмен технологиями не произошел:

$$37{,}3P_Y < 30P_X + 20P_Y, \text{ где } \frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3, \text{откуда } 26/45 < \frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3.$$

Таким образом, мы нашли все значения отношения цен товаров X и Y, при которых странам будет невыгодно обмениваться технологиями, так как в этом случае они смогут приобрести наборов меньше, чем в отсутствии такого обмена.

$$\frac{26}{45} < \frac{P_X}{P_Y} < \frac{10}{13}$$

Верно найдена и аргументированно обоснована (графически или аналитически) одна граница интервала цен – по 3 балла за каждую. Наличие арифметической ошибки при концептуально правильном подходе к решению облагается штрафом в 1 балл. Верный ответ при отсутствии аргументированного верного решения не оценивается. Верный ответ при отсутствии полной аргументации, но демонстрации в решении попытки предоставить аргументацию (графическую или аналитическую) оценивается в 1 балл.

Задание 7 (13 баллов)

Представьте себе, что вы живете в городе, территория которого принимает круглую форму, и ваша квартира находится на расстоянии s_0 от центра города. Вам понадобился один потребительский товар, который продается практически везде в городе, так что можно считать, что купить его можно абсолютно в любой точке города. Самый дальний магазин города расположен на расстоянии $s_{max} = 50$ от центра города. Ваше удовольствие от покупки данного товара определяется функцией $u = v - p - t$, где v – денежная оценка удовольствия от потребления товара, $p-$ цена данного товара, t – транспортные издержки, равные стоимости доставки товара от места покупки до вашей квартиры. Покупка товара в каждом магазине возможна также дистанционно (например, через мобильное приложение магазина), так что вы не несете издержек на проезд до магазина. Известно, что из-за разной стоимости земли цена товара зависит от дальности расположения магазина от центра города и в произвольном магазине равна $p_m = p_{max}(1 - 0{,}01 s_m)$, где $p_{max} = 500$ – цена товара в магазине в самом центре города, s_m – расстояние от магазина до центра города. Стоимость доставки товара определяется как $t = 0{,}5(\Delta s)^2$, где Δs – расстояние от магазина до вашей квартиры.

(а) Определите, в каком магазине вы купите данный товар (т.е. на каком расстоянии он будет находиться от вашей квартиры и от центра города), если вы максимизируете свое удовольствие.

(б) Пусть вы решили лично приехать в магазин и совершить покупку непосредственно в нем, поскольку знаете, что в этом случае можете договориться с продавцом о дополнительной скидке на цену товара в 4%. Однако тогда вам придется потратить на проезд до магазина $0{,}1(\Delta s)^2$. Поедете ли вы в тот же магазин, что выбрали в пункте (а)?

Решение и схема оценивания:

(а) 1) Заметим, что выбранный магазин будет находиться на луче, соединяющим центр города и точку, в которой располагается наш дом, причем дальше нашего дома. Это так, поскольку все магазины на одинаковом расстоянии от нашего дома будут иметь одинаковые для нас транспортные издержки, но минимальная цена покупки будет в наиболее удаленном от центра магазине. Таким образом, $\Delta s = s_m - s_0$. ***Обоснование этого любым верным способом – 3 балла;***

2) Тогда наша полезность принимает вид

$$u = v - p - t = v - p_{max}(1 - 0{,}01 s_m) - 0{,}5(s_m - s_0)^2.$$

Это парабола с ветвями вниз. Ее максимум достигается в точке $s_m = s_0 + 5$. ***Нахождение максимума – 4 балла.***

Таким образом, если наш дом находится на расстоянии не более 45 от центра, то $s_m = s_0 + 5$, иначе мы выберем магазин на границе города $s_m = 50$. ***Нахождение граничного решения – 1 балл.***

(б) ***Верно учтена новая цена в функции полезности – 2 балла. Верно учтены дополнительные издержки на проезд в магазин – 2 балла. Получено новое оптимальное расположение магазина – 1 балл.***

$$u = v - p - t = v - 0{,}96 p_{max}(1 - 0{,}01 s_m) - 0{,}6(s_m - s_0)^2.$$

$s_m = s_0 + 4$, если $s_0 \leq 46$, иначе мы выберем магазин на границе города $s_m = 50$. Мы выберем другой магазин, если $s_0 < 46$.

Задание 7 (13 баллов)

Мы часто ожидаем, когда обращаемся к друзьям и знакомым с целью подыскать мастера по ремонту какого-нибудь оборудования, ремонтную бригаду или врача, что сможем найти необходимых специалистов высокой квалификации по цене, которая ниже, чем в среднем по рынку (чем если бы таких специалистов мы искали, воспользовавшись публичными ресурсами). Однако на деле зачастую оказывается так, что найденные через друзей и знакомых специалисты обходятся нам вовсе не дешевле, а дороже. Почему, в тех случаях, когда «скидка» на покупку услуги при посредничестве знакомых не предоставляется, люди, тем не менее, соглашаются на приобретение такой услуги, заплатив за нее подчас больше, чем могли бы, найдя специалистов через публичные ресурсы? Приведите три различных обоснованных аргумента при ответе на вопросы задания.

Решение и схема оценивания:

Оцениваются экономические аргументы. Первые два – по 4 балла, третий – 5 баллов.

Примеры обоснований:

1) Большую цену товара люди часто ассоциируют с лучшим его качеством. Поэтому, согласившись заплатить дороже, полагают, что достоверно получат услугу более высокого качества, чем услугу, которую они получили бы, обратившись к поиску на публичном ресурсе.
2) Покупатель услуги понимает, что на поиск продавца услуги нужного качества он может потратить довольно много ценного времени. А это значит, что при прочих равных он будет готов заплатить больше, если расходы на поиски будут сокращены. Этим и могут пользоваться продавцы, назначая более высокую цену, чем в среднем по рынку.
3) Продавцы услуги понимают, что люди, ищущие их через друзей и знакомых, готовы заплатить некоторую сумму за доверие друг к другу. Подобные взаимоотношения могут неоднократно возникать в жизни людей и могут оказаться обоюдовыгодными при каких-то обстоятельствах. Этим также могут пользоваться продавцы, назначая более высокую цену, чем в среднем по рынку.
4) Покупатели полагают, что, обращаясь к друзьям и знакомым в поисках квалифицированных специалистов, они снижают асимметрию информации, с которой могут столкнуться при поиске их на публичных ресурсах, где могут встретиться как добросовестные, так и недобросовестные продавцы. Как правило, люди готовы заплатить некоторую сумму денег, чтобы добиться этого результата.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2018 - 2019 учебный год

Заключительный (очный) этап

10 – 11 классы

2 вариант

Задание 1 (12 баллов)

Несколько факультетов Академии выпускают множество магистров по различным направлениям подготовки.

В 2016 году, в связи с увеличением спроса работодателей на выпускников магистерских программ на основании анализа современных прикладных научных исследований и разработок, изучения потребностей рынка в высококвалифицированных кадрах Академией было решено открыть пять новых факультетов, которые стали бы готовить специалистов для разных секторов экономики.

В результате выпуск магистров Академии сильно вырос в 2018 году и стал равен 2496 человек. Предполагая, что ранее, по 2017 год, ежегодный выпуск составлял 1000 профессионалов-магистров, определите сколько факультетов готовили таких специалистов изначально?

Считайте, что все факультеты всегда выпускают одинаковое количество магистров.

Решение:

Пусть n – изначальное количество факультетов. Рассмотрим сначала условие выпуска одинакового количества магистров. Возможны следующие варианты:

1) одинаковым является выпуск каждого конкретного факультета, если сравнивать 2017 и 2018 год
2) одинаковым является количество магистров, выпускаемых в каждый конкретный год («всегда») всеми факультетами. Если сравнивать один факультет в различные годы, то из экономических соображений, очевидно, что если спрос на программу магистратуры возрос, то количество выпускников одного факультета может только возрастать к 2018 году
3) одинаковым является и то и другое.

Пусть k_1 студентов – выпуск одного факультета до увеличения спроса, k_2 студентов – выпуск одного факультета после открытия пяти новых факультетов, тогда из условия получим $n \cdot k_1 = 750$ и $(n+5) \cdot k_2 = 2112$, причем $k_2 \geq k_1$.

Рассмотрим первый вариант: если $k_2 = k_1$ тогда на пять новых факультетов приходится $2496 - 1000 = 1496$ магистра. Заметим, что 1496 не кратно пяти, а так как все пять факультетов были открыты одновременно, количество мест на них было одинаково (в отличие от тех факультетов, которые уже существовали в Академии и, возможно, были открыты в разное время с разным количеством мест). Аналогично не возможен и третий вариант.

Пусть k_1 студентов – выпуск одного факультета до увеличения спроса, k_2 студентов – выпуск одного факультета после открытия пяти новых факультетов, тогда из условия получим $n \cdot k_1 = 1000$ и $(n+5) \cdot k_2 = 2496$, причем $k_2 > k_1$

По основной теореме арифметики каждое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно, если не учитывать порядок следования множителей. Тогда воспользуемся разложением чисел 1000 и 2496 на простые множители $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, $2496 = 3 \cdot 13 \cdot 2^6$ и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} n \cdot k_1 = 5^3 \cdot 2^3 \\ (n+5) \cdot k_2 = 3 \cdot 13 \cdot 2^6 \end{cases}, \text{ где } n, k_1 \text{ и } k_2 \text{- натуральные числа, } k_2 > k_1$$

Предположим, что n кратно 5, но тогда выражение $n+5$ тоже кратно 5, но $3 \cdot 13 \cdot 2^6$ не кратно 5, поэтому n не кратно 5. Значит n либо 2, либо 4, либо 8. Рассмотрим каждый из вариантов:

4) $n = 2$, тогда $n + 5 = 7$, но в разложении $3 \cdot 13 \cdot 2^6$ нет 7
5) $n = 4$, тогда $n + 5 = 9$, но в разложении $3 \cdot 13 \cdot 2^6$ нет 9
6) $n = 8$, тогда $n + 5 = 13$, $k_1 = \frac{1000}{8} = 125$ и $k_2 = \frac{2496}{13} = 192$, $192 > 125$ и все условия задачи выполнены

Ответ: 8

Критерии	**Балл**
Приведен алгоритм решения, обоснован и получен верный ответ и доказано, что других решений нет	12
Приведен алгоритм решения, но рассмотрены не все возможные случаи или не доказан факт того, что нет других решений	9
Приведен верный пример и обосновано, что утверждение задачи справедливо	3
Приведен алгоритм решения, однако в результате арифметической ошибки получен неверный ответ	3
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 2 (12 баллов)

Бизнесмен Станислав Весельчаков привязал к своему счету дополнительную платиновую банковскую карту для своей жены Анны и, уезжая в командировку, оставил жене карту с запиской следующего содержания:

«Дорогая, трать сколько угодно на всё, что угодно, но… ПИН-код придется угадать, а чтобы было проще – цифры ПИН-кода даст решение задачи: нарисуй четырехугольник PNQM, он такой замечательный, что в него, если захочется, можно вписать окружность, и около него можно описать окружность. Прямые PM и NQ пересекаются в точке I. Сумма сторон PN и QM равна 8, а произведение равно 15. Найди периметр треугольника PIN. Если ты не забудешь ничего важного, то получишь заветные четыре цифры. Да, кстати, первая и последняя цифры кода совпадают. Удачи!»

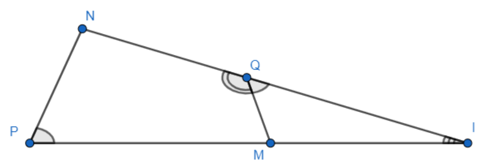
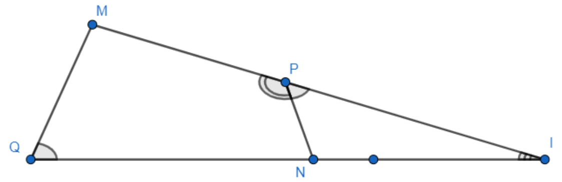
Елена справилась с задачей легко, ведь всего 2 года назад окончила экономический факультет РАНХиГС.

Сможете ли Вы:

- ✓ Повторить её решение? (чертёж обязателен)
- ✓ Ответить на вопрос, был ли в удачном шоппинге элемент везения? (какова вероятность того, что Анне удалось верно ввести ПИН-код, ведь решив задачу она узнала просто четыре цифры, а не их последовательность, а после третьей неудачной попытки карта блокируется)

Решение:

1. Сумма сторон PN и QM равна 8, а произведение равно 15. Значит стороны равны 5 и 3. Вот только не сказано, PN=7, QM=5 или наоборот, поэтому рассмотрим два варианта.

PN=5, QM=3	PN=3, QM=5
	
Из свойства описанного четырехугольника 3+5=PM+NQ (как сумма противолежащих сторон) Из свойства вписанного четырехугольника ∠MPN+∠NQM=180’,но ∠IQM=180’-∠NQM (как смежные), отсюда ∠MPN=∠IQM, отсюда ΔPIN~ ΔQIN по двум углам. Из подобия треугольников следует равенство отношений их элементов $\frac{PN}{MQ}=\frac{5}{3}=k$ (коэф подобия) Периметр ΔQIN= периметр ΔPIN-PM-5-NQ+3= периметр ΔPIN-8-5+3=	Аналогично действуя, получаем периметр **ΔPIN**=15

периметр ΔPIN -10 Периметры подобных треугольников относятся как коэффициенты подобия $$\frac{\text{периметр } \mathbf{\Delta PIN}}{\text{периметр } \mathbf{\Delta PIN} \; \mathbf{-10}} = \frac{5}{3}$$ Отсюда периметр **ΔPIN=25**	

2. Цифры получились: 2,5,1,5.
3. Посчитаем вероятность, с которой был введен правильный код.

Шоппинг удался, если код был введен с первого, второго или третьего раза.
Известно, что первая и вторая цифры совпадают, соответственно, это цифра 5
Нужный вариант 1.
ПИН будет иметь вид 5 12 5 или 5 215
Вероятность 0,5
Соответственно, всего два варианта, а попыток – три.
Анне достаточно решить задачу, чтобы гарантировать себе шоппинг

Ответ:

1. Цифры кода 2,5,1,5
2. Вероятность ввести верный код 0,5. Имея три попытки Анне достаточно решить задачу, чтобы гарантировать себе шоппинг

Критерии	**Балл**
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, найдены оба варианта периметров, правильно вычислена вероятность ввода нужного пин-кода	12
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, найдены оба варианта периметров, но неверно вычислена вероятность ввода нужного пин-кода	9
Приведен алгоритм решения, чертеж верен, но рассмотрен только один из вариантов периметра	6
Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 3 (13 баллов)

Коррумпированный чиновник Никифор из страны Y нечестным трудом заработал на виллу. Против Никифора завели уголовное дело, и его вилла оказалась под угрозой конфискации. В случае конфискации Никифор понесет потери в размере V денежных единиц (ден. ед.). Однако друзья посоветовали Никифору стать депутатом на ближайших выборах и получить абсолютный иммунитет от преследования правоохранителей. В округе, представителем которого может стать Никифор, есть всего 35 избирателей, которые делятся на 3 группы:

1. 30% избирателей при любых обстоятельствах поддержат на выборах Никифора.
2. 30% избирателей при любых обстоятельствах поддержат Ратибора, конкурента Никифора.
3. Оставшиеся 40% избирателей не хотели бы видеть своим депутатом ни одного из кандидатов, но при прочих равных готовы за некоторую плату отдать свой голос на выборах за того кандидата, кто предложит им больше денег.

Известно, что, если какой-либо кандидат предложит за один голос избирателя по 1 ден. ед., то он получит только одного дополнительного сторонника, если предложит по 2 ден. ед. – то двух дополнительных сторонников, и т.д. Голосование в стране Y является открытым, поэтому только после голосования кандидат точно будет знать всех, кто проголосовал за него, и отдаст избирателям деньги сразу после волеизъявления. Известно также, что кандидатов на выборах только два, что все избиратели обязаны прийти на голосование и не испортят бюллетени, т.е. каждый из тридцати пяти избирателей обязательно проголосует либо за Ратибора, либо за Никифора, либо против всех, а сами кандидаты не имеют права голосовать. Кроме того, Ратибор (как, впрочем, и Никифор) может конкурировать нечестно, но он не богат, поэтому максимальная сумма денег, которую он готов отдать за подкуп избирателей, составляет такую величину, при которой достаточно было бы победить на выборах, если бы конкурент вел себя честно. Никифор знает о положении Ратибора и его возможных расходах, поэтому для подкупа любого избирателя готов всегда заплатить больше, чем предложил бы Ратибор. Для победы любого кандидата на выборах необходимо набрать не менее 50% голосов. Денежные единицы в этой стране могут принимать лишь целые значения.

(а) Выпишите функцию предложения голосов за любого из кандидатов.

(б) Найдите минимальные расходы Никифора на подкуп избирателей для победы на выборах, которые он готов был бы понести, если бы точно знал, что Ратибор не будет конкурировать честно, и если даже после голосования ни один кандидат не может определить, к какой именно группе относился тот или иной избиратель

(в) Никифор нашел способ до выборов достоверно узнать, какую минимальную сумму денег готов получить каждый избиратель за продажу своего голоса, и теперь кандидат первым сможет договориться со всеми нужными ему избирателями индивидуально. Известно, что избиратели держат слово: если после договоренности с Никифором к ним обратится Ратибор, то никто из них не изменит своего решения отдать свой голос за Никифора, сколько бы Ратибор им не предложил за их голос. Стоимость информации об отдельном избирателе составит F денежных единиц. Какую максимальную сумму F готов будет заплатить Никифор за подобную информацию для победы на выборах?

Решение:

(а) (максимум 4 балла) 14 избирателей готовы получить денежное вознаграждение от кандидата при голосовании. Остальные 21 избирателя в любом случае голосуют за одного из кандидатов. При округлении доли проголосовавших мы будем считать, что 10 избирателей голосуют за одного из кандидатов и 11 за другого. Приведем решение, когда за Никифора готовы проголосовать 10 избирателей, а за Ратибора – 11. Решение, при котором за Никифора готовы проголосовать 11 избирателей, а за Ратибора 10, аналогично. Выпишем функцию предложения Q голосов избирателей в зависимости от цены за голос P. По условию цена может принимать только целые значения. При этом, если Никифор вообще не будет предлагать избирателям денег, то за него проголосуют 10 человек. Значит, если P = 0, то Q = 10.

Если Никифор увеличит цену до 1 ед., то за него проголосует ещё один избиратель, и т.д., пока цена не достигнет 14 и число голосов не станет равно 24 (оставшиеся избиратели не хотят продавать голоса ни при каких условиях). Иначе говоря, при $1 \leq P \leq 14$ предложение голосов имеет вид Q=10+P. При дальнейшем росте цены величина предложения будет оставаться неизменной и будет равна 24. Совместим три случая в одну функцию предложения:

$$Q = \begin{cases} 10, P = 0 \\ 10 + P, 1 \leq P \leq 14 \\ 24, P > 14 \end{cases}$$

Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, однако отсутствуют ограничения ее применения в зависимости от цены – выставляется лишь 2 балла из 4 возможных.

Верно записана функциональная зависимость предложения голосов, но не все интервалы цены и ограничения по количеству учтены – выставляется лишь 3 балла из 4 возможных.

Верно записана функция предложения голосов – 4 балла из 4 возможных.

(б) (максимум 4 балла) Ратибору для победы нужно получить минимум 18 голосов (т.е. подкупить дополнительно 8 избирателей). Функция предложения принимает значение

Q = 18 при цене P = 8. Ясно, что Ратибору бесполезно было бы предлагать больше денег за подкуп избирателей, так как он и так выиграл бы выборы при честном поведении конкурента. Никифору для победы придется заплатить каждому избирателю минимум на 1 ден. ед. больше (при прочих равных каждый избиратель, который готов продать свой голос, предпочтет получить 9 ден. ед. вместо 8). Стоит заметить, что при цене 9 за кандидата проголосовало бы 19 избирателей, но Никифору достаточно лишь 18 голосов. Предполагая, что Никифор минимизирует возможную сумму расходов, достаточную для победы, то он заплатил бы только 18 избирателям из 19 проголосовавших. Таким образом при цене P = 9 минимальные расходы на подкуп составят Q*P = 18*9 = 162. Однако Никифор будет согласен на подкуп избирателей, если его расходы не превысят стоимость виллы (его потери в случае конфискации), т.е. если $V \geq 162$.

Верно использован и обоснован принцип оплаты всем избирателям, проголосовавшим за кандидата, – 3 балла. Верное применение принципа оплаты только тем избирателям, которые голосовали в обмен на вознаграждение оценивается лишь в 1 балл из 3 возможных за эту часть решения.

Верно учтена доплата каждому избирателю в 1 ден.ед. – 1 балл.

(в) (максимум 5 баллов) Теперь Никифор за определенную плату может узнать предпочтения всех избирателей, тогда после покупки информации о каждом ему необходимо отсортировать людей по минимальной цене, за которую они готовы продать голос, и выбрать из них 18 первых, заплатив каждому соответствующую индивидуальную минимальную цену. Десять избирателей отдадут свой голос за 0 ден. ед., одиннадцатый - за 1 ден. ед., двенадцатый - за 2, и т.д., и, наконец, восемнадцатый – за 8. Но максимальная сумма, которую Никифор должен будет заплатить за подобную информацию составит 35F денежных единиц, то есть получить информацию придется о всех избирателях, ведь информация о них оказывается раскрытой только после ее покупки. Тогда все расходы на подкуп составят 1 + 2 + ... + 8+35F = 36+35F (ден. ед.) Никифору выгодно будет покупать информацию об избирателях, только если $36 + 35F \leq 162$, иначе дешевле было бы отказаться от покупки информации. Откуда $F \leq 3{,}6$. Но поскольку в стране любая величина расходов в денежных единицах принимает лишь целые значения, Никифор будет готов заплатить максимум по 3 денежные единицы за информацию о каждом избирателе.

Верно учтено, что купить информацию придется о всех избирателях – 2 балла.

Верно учтено, что каждому избирателю можно предложить персонифицированную цену за его голос – 2 балла.

Верно учтено возникающее из пункта б) ограничение на расходы, связанные с получением информации – 1 балл.

Задание 4 (12 баллов)

В начальный момент времени на электронном табло игрового автомата отображаются два натуральных числа $a_0 = 7$ и $b_0 = 360$. За нажатие на кнопку автомата игрок должен заплатить 5 рублей. При нажатии кнопки первое из этих чисел заменяется на $a_1 = r_{11}(6 \cdot a_0 + 10)$, а второе число заменяется на $b_1 = r_{2017}(b_0 + 72)$, где $r_x(y)$ – остаток от деления натурального числа y на x. Игрок, нажав кнопку еще раз (предварительно уплатив ту же сумму), получит по таким же закономерностям на табло числа
$a_2 = r_{11}(6 \cdot a_1 + 10)$ и $b_2 = r_{2017}(b_1 + 72)$ и так далее. Игрок получает приз в размере 100 тыс. рублей, если при очередном нажатии на табло загорятся числа $a_n = 5$ и $b_n = 6$. Сможет ли игрок на таком игровом автомате оказаться в «плюсе»? Если да, то сколько составит его возможная выгода?

Решение:

Выпишем несколько первых членов соответствующей последовательности (a_n): 7,8,3,6,2,0,10,4,1,5,7,8,… Нетрудно понять, что значение каждого члена последовательности a_n (начиная со второго) однозначно вычисляется по значению ее предыдущего члена a_(n-1), это периодическая последовательность с периодом 10, и в ней встречается 5.

Ясно, что в первой последовательности число 5 будет встречаться на местах с номерами вида n=9+10·k, k∈N_0. Определим, на каких местах будет встречаться число 6 во второй последовательности. Вторая последовательность – арифметическая прогрессия, взятая по модулю числа 2017, ее общий член можно задать формулой

b_n=r_2017 (360+72·n), n∈N_0.

Поэтому b_n=6⟺r_2017 (360+72·n) = 6⟺360+72·n=6+2017t, t∈Z. Имеем уравнение в целых числах:

72n-2017t=6-360⟺72n-2017t=-354.

Решив его относительно n, получим: n=1844+2017m, m∈N_0. Теперь найдем, при каких значениях k, m∈N_0

9+10·k=1844+2017m⟺10·k-2017m=1835

Решив данное уравнение в целых числах, получим k=1192+2017·l, l∈N_0. Стало быть, одновременно a_n=2 и b_n=6 при n=9+10·k=9+10·(1192+2017·l) = 11929+20170s, s∈N_0. Значит, выиграть возможно только на 11929-ом нажатии кнопки. Уплаченная в таком случае сумма должна составлять 11929·5=59645 руб. А поскольку выигрыш составляет 100 тыс. рублей, то выгода равна 40355 руб.

Ответ: да, выгода составляет 40355 руб.

Критерии	Балл
Приведен алгоритм, в результате обоснованного решения получен верный ответ и верно вычислена выгода	12
Приведен алгоритм, в результате обоснованного решения получен верный ответ, но в результате арифметической ошибки неверно вычислена выгода	6
Получен верный ответ, но в алгоритме решения есть существенные логические недочеты	3

Решение не соответствует ни одному и представленных критериев	0

Задание 5 (12 баллов)

Сколько существует целых чисел, удовлетворяющих неравенству?

$$\frac{(-\log_{1/2} 8 - x)(7^x - 49)(|x+9| - |1-x|)}{\left(\sqrt{9x+45}+\sqrt{2089}\right)\sin(-12 * (18|x^{-1}| + 8|x|)^{-1} - 0{,}015\pi)} < 0$$

Решение:

Используя свойства монотонных функций, можно сделать равносильный переход к системе неравенств (с учетом ОДЗ):

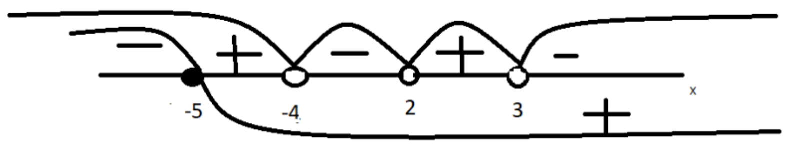
$$\begin{cases} \dfrac{(3-x)(x-2)(2x+8)}{\sin(\dfrac{-12}{18|x^{-1}|+8|x|} - 0{,}012\pi)} < 0 \\ x+5 \ge 0, \\ \text{Так как подкоренное выражение} \\ \text{не может отрицательным} \end{cases}$$

Обратим внимание, что для аргумента синуса выполнено неравенство (по следствию из неравенства Коши):

$$-1 - 0{,}012\pi \le \frac{-12}{18|x^{-1}| + 8|x|} - 0{,}012\pi \le -0{,}012\pi$$

поэтому синус отрицателен и на него можно сократить, поменяв знак неравенства на противоположный. Воспользуемся методом интервалов:

$$\begin{cases} (3-x)(x-2)(x+4) > 0 \\ x+5 \ge 0 \end{cases}$$



Ясно, что целое число, удовлетворяющее системе неравенств только одно = -5

Ответ: 1

Критерии	Балл
Приведен алгоритм решения, обоснован и получен верный ответ и доказано, что других решений нет	12
Приведен верный алгоритм решения, однако присутствует арифметическая ошибка	9
Приведен алгоритм перехода к методу интервалов, однако неверно отобраны решения	6
Верно описаны свойства входящих в неравенство функций, однако переход к методу интервалов не сделан	3

Задание 6 (13 баллов)

Страны A и B граничат друг с другом, но не могут обмениваться трудовыми ресурсами и технологиями производства товаров X и Y, потребителями и производителями которых являются жители этих стран. В обеих странах данные товары производятся только из трудовых ресурсов. В каждой из стран имеется ровно по 5 единиц трудовых ресурсов. Но в стране A товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 6 и 2 соответственно, а в стране B товары X и Y производятся с постоянными средними производительностями, равными 2 и 4 соответственно. Жители каждой страны имеют одинаковые предпочтения относительно товаров X и Y и потребляют их только в наборах, где на одну единицу товара X приходится ровно 3 единицы товара Y. При этом чем больше таких наборов потребляется в стране, тем лучше жителям этой страны.

(а) Страны A и B объединились в экономический союз, но обмен технологиями производства внутри этого союза невозможен. Какое совокупное количество наборов будут потреблять жители этих стран, если торговля союза с внешним миром невозможна?

(б) Предположим теперь, что торговля союза с внешним миром по-прежнему невозможна, но стал доступен обмен технологиями производства внутри данного союза. Однако этот обмен и обучение жителей новым технологиям влечет дополнительные издержки для каждой из стран. Так обучение новым технологиям сокращает количество трудовых ресурсов в каждой из стран ровно в α $(\alpha > 1)$ раз, независимо от того, обучаются ли жители страны новым технологиям или передают знания жителям другой страны. Найдите максимальную величину α_{max}, при которой количество наборов, потребляемых союзом, не сократится по сравнению с пунктом (а).

(в) Предположим теперь, что $\alpha = \alpha_{max}$ и образовавшийся экономический союз может торговать товарами X и Y с внешним миром по мировым ценам. Найдите все значения отношения цен товаров X и Y (т.е., величины P_X/P_Y) на мировом рынке, при которых обмен технологиями между странами окажется невыгодным экономическому союзу, т.е. совокупное количество потребляемых этим союзом наборов сократится.

Решение и схема оценивания:

(а) (максимум 3 балла) Сначала построим КПВ союза. Для этого определим КПВ каждой из стран.

КПВ страны A представлено функцией $X_A/6 + Y_A/2 = 5,$ где $0 \le X \le 30, 0 \le Y \le 10$, , а КПВ страны B: $X_B/2 + Y_B/4 = 5,$ где $0 \le X \le 10, 0 \le Y \le 20$.

Учитывая альтернативные издержки производства товаров в каждой из стран, стандартным образом строим КПВ союза: $\begin{cases} X/6 + Y/2 = 15, \text{где } 0 \le X \le 30, 20 \le Y \le 30, \\ X/2 + Y/4 = 20, \text{где } 30 < X \le 40, 0 \le Y < 20 \end{cases}$

Учитывая, что страна потребляет наборы, где на одну единицу товара X приходится 3 единицы товара Y, необходимо найти значения X и Y, удовлетворяющие соотношениям Y=3X и КПВ союза. Откуда находим, что X=9, Y=27. Количество наборов будет определяться количеством товара X (или Y/3) и равно 9.

Верно найдена (графически или аналитически) КПВ союза, либо верно обоснована специализация стран при производстве товаров – 2 балла. Верно найдено количество наборов– 1 балл.

(б) (максимум 4 балла) Если возможен обмен технологиями, то союзу выгоднее будет использовать технологии с наибольшей производительностью, поэтому стране В стоит перенять технологию производства товара X, а стране А – технологию производства товара Y. Если бы затраты ресурсов не требовались на обмен технологиями, то КПВ союза имела бы вид:

$$\frac{X}{6}+\frac{Y}{4}=10, \text{где } 0 \le X \le 60, 0 \le Y \le 40$$

Однако обмен технологиями сокращает количество трудовых ресурсов в α раз. Найдем, такое значение α_{max}, при котором количество наборов останется таким же, как и в союзе, не использующем обмен технологиями (т.е. 9 наборов). Величины X=9 и Y=27 при потреблении 9 наборов должны тогда удовлетворять уравнению КПВ $\frac{X}{6}+\frac{Y}{4}=10/\alpha_{max}$, таким образом $\alpha_{max}=40/33$. А уравнение КПВ союза при α_{max} будет иметь вид

$$\frac{X}{6}+\frac{Y}{4}=8{,}25, \text{где } 0 \le X \le 49{,}5, \qquad 0 \le Y \le 33$$

Верно определена КПВ союза при обмене технологиями – 1 балл. Использован верный подход к определению α_{max} - 2 балла. Верно найдена величина α_{max}– 1 балл.

(в) (максимум 6 баллов) Если обмен технологиями выгоден странам при объединении в союз, то КПВ союза имеет вид

$$\frac{X}{6}+\frac{Y}{4}=8{,}25, \text{где } 0 \le X \le 49{,}5\ , 0 \le Y \le 33$$

Если же этот обмен невыгоден, то КПВ союза имеет вид

$$\begin{cases} X/6+Y/2=15, \text{где } 0 \le X \le 30, 20 \le Y \le 30, \\ X/2+Y/4=20, \text{где } 30 < X \le 40, 0 \le Y < 20 \end{cases}$$

Заметим сразу, что если $\frac{P_X}{P_Y} \ge 2$, то союзу выгоднее специализироваться на производстве товара X и обмен технологиями при найденном α_{max} расширит бюджетное множество союза при выходе на мировой рынок и позволит потреблять больше наборов, чем при отсутствии обмена технологиями. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество товара X, которое может производить союз, специализируясь на нем. Аналогично, если $\frac{P_X}{P_Y} \le 1/3$, то союзу выгоднее специализироваться на производстве товара Y и обмен технологиями при найденном α_{max} расширит бюджетное множество союза при выходе на мировой рынок и позволит потреблять больше наборов, чем при отсутствии обмена технологиями. Это связано с тем, что обмен технологиями в данном случае позволяет увеличить максимальное количество товара Y, которое может производить союз, специализируясь на нем.

Если же $\frac{1}{3} < \frac{P_X}{P_Y} < 2$, то союз, в котором не произошел обмен технологиями, будет производить 30 единиц товара X (страна А будет специализироваться на товаре X) и 20 единиц товара Y (страна В будет специализироваться на производстве товара Y). При этом часть произведенного товара X будет обмениваться на мировом рынке на товар Y.

Если $\frac{P_X}{P_Y} < 2/3$, союз, в котором произошел обмен технологиями, будет специализироваться на производстве товара Y, поскольку покупка товара X на мировом рынке будет обходиться дешевле, чем производство его внутри союза. Если $\frac{2}{3} < \frac{P_X}{P_Y}$, союз будет специализироваться на производстве товара X, поскольку покупка товара Y на мировом рынке будет обходиться дешевле, чем его производство внутри союза.

Учитывая вышесказанное, стоит рассмотреть два интервала цен (с различной специализацией на товарах), при которых возможность обмена технологиями может оказаться невыгодной, а именно: $\frac{1}{3} < \frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3$ и $\frac{2}{3} \leq \frac{P_X}{P_Y} < 2$. Сразу заметим, что при $\frac{P_X}{P_Y} = 2/3$ союзу невыгодно обмениваться технологиями, поскольку для покупки наборов в условиях обмена технологиями союз будет иметь 2*49,5=3*33=99 условных денежных единиц (в этом случае альтернативные издержки производства каждого из товаров в точности равны альтернативным издержкам покупки этих товаров на мировом рынке), а в условиях отсутствия обмена технологиями он будет иметь 2*30+3*20=120 денежных единицы.

Определим теперь, при каком соотношении цен в условиях обмена технологиями союз, специализируясь на производстве товара X, получит в условиях мировой торговли меньше располагаемых денежных средств на покупку наборов, чем в условиях, когда обмен технологиями не произошел:

$49{,}5P_X < 30P_X + 20P_Y$, где $2/3 \leq \frac{P_X}{P_Y}$, откуда $\frac{2}{3} \leq \frac{P_X}{P_Y} < 40/39$.

Аналогично, определим, при каком соотношении цен в условиях обмена технологиями союз, специализируясь на производстве товара Y, получит в условиях мировой торговли меньше располагаемых денежных средств на покупку наборов, чем в условиях, когда обмен технологиями не произошел:

$33P_Y < 30P_X + 20P_Y$, где $\frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3$, откуда $13/30 < \frac{P_X}{P_Y} \leq 2/3$.

Таким образом, мы нашли все значения отношения цен товаров X и Y, при которых странам будет невыгодно обмениваться технологиями, так как в этом случае они смогут приобрести наборов меньше, чем в отсутствии такого обмена.

$$\frac{13}{30} < \frac{P_X}{P_Y} < \frac{40}{39}$$

Верно найдена и аргументированно обоснована (графически или аналитически) одна граница интервала цен – по 3 балла за каждую. Наличие арифметической ошибки при концептуально правильном подходе к решению облагается штрафом в 1 балл. Верный ответ при отсутствии аргументированного верного решения не оценивается. Верный ответ при отсутствии полной аргументации, но демонстрации в решении попытки предоставить аргументацию (графическую или аналитическую) оценивается в 1 балл.

Задание 7 (13 баллов)

Представьте себе, что вы живете в городе, территория которого принимает круглую форму, и ваша квартира находится на расстоянии s_0 от центра города. Вам понадобился один потребительский товар, который продается практически везде в городе, так что можно считать, что купить его можно абсолютно в любой точке города. Самый дальний магазин города расположен на расстоянии $s_{max} = 60$ от центра города. Ваше удовольствие от покупки данного товара определяется функцией $u = v - p - t$, где v – денежная оценка удовольствия от потребления товара, $p -$ цена данного товара, t – транспортные издержки, равные стоимости доставки товара от места покупки до вашей квартиры. Покупка товара в каждом магазине возможна также дистанционно (например, через мобильное приложение магазина), так что вы не несете издержек на проезд до магазина. Известно, что из-за разной стоимости земли цена товара зависит от дальности расположения магазина от центра города и в произвольном магазине равна $p_m = p_{max}(1 - 0{,}02s_m)$, где $p_{max} = 1000$ – цена товара в магазине в самом центре города, s_m – расстояние от магазина до центра города. Стоимость доставки товара определяется как $t = 0{,}5(\Delta s)^2$, где Δs – расстояние от магазина до вашей квартиры.

(а) Определите, в каком магазине вы купите данный товар (т.е. на каком расстоянии он будет находиться от вашей квартиры и от центра города), если вы максимизируете свое удовольствие.

(б) Пусть вы решили лично приехать в магазин и совершить покупку непосредственно в нем, поскольку знаете, что в этом случае можете договориться с продавцом о дополнительной скидке на цену товара в *10*%. Однако тогда вам придется потратить на проезд до магазина $0{,}5(\Delta s)^2$. Поедете ли вы в тот же магазин, что выбрали в пункте (а)?

Решение и схема оценивания:

(а) 1) Заметим, что выбранный магазин будет находиться на луче, соединяющим центр города и точку, в которой располагается наш дом, причем дальше нашего дома. Это так, поскольку все магазины на одинаковом расстоянии от нашего дома будут иметь одинаковые для нас транспортные издержки, но минимальная цена покупки будет в наиболее удаленном от центра магазине. Таким образом, $\Delta s = s_m - s_0$. ***Обоснование этого любым верным способом – 3 балла;***

2) Тогда наша полезность принимает вид

$$u = v - p - t = v - p_{max}(1 - 0{,}02s_m) - 0{,}5(s_m - s_0)^2.$$

Это парабола с ветвями вниз. Ее максимум достигается в точке $s_m = s_0 + 20$. ***Нахождение максимума – 4 балла.***

Таким образом, если наш дом находится на расстоянии не более 40 от центра, то $s_m = s_0 + 20$, иначе мы выберем магазин на границе города $s_m = 60$. ***Нахождение граничного решения – 1 балл.***

(б) ***Верно учтена новая цена в функции полезности – 2 балла. Верно учтены дополнительные издержки на проезд в магазин – 2 балла. Получено новое оптимальное расположение магазина – 1 балл.***

$$u = v - p - t = v - 0{,}9p_{max}(1 - 0{,}01s_m) - (s_m - s_0)^2.$$

$s_m = s_0 + 9$, если $s_0 \leq 51$, иначе мы выберем магазин на границе города $s_m = 60$. Мы выберем другой магазин, если $s_0 < 51$.

Задание 8 (13 баллов)

Мы часто ожидаем, когда обращаемся к друзьям и знакомым с целью подыскать мастера по ремонту какого-нибудь оборудования, ремонтную бригаду или врача, что сможем найти необходимых специалистов высокой квалификации по цене, которая ниже, чем в среднем по рынку (чем если бы таких специалистов мы искали, воспользовавшись публичными ресурсами). Однако на деле зачастую оказывается так, что найденные через друзей и знакомых специалисты обходятся нам вовсе не дешевле, а дороже. Почему, в тех случаях, когда «скидка» на покупку услуги при посредничестве знакомых не предоставляется, люди, тем не менее, соглашаются на приобретение такой услуги, заплатив за нее, подчас, больше, чем могли бы, найдя специалистов через публичные ресурсы? Приведите три различных обоснованных аргумента при ответе на вопросы задания.

Решение и схема оценивания:

Оцениваются экономические аргументы. Первые два – по 4 балла, третий – 5 баллов.

Примеры обоснований:

1) Большую цену товара люди часто ассоциируют с лучшим его качеством. Поэтому, согласившись заплатить дороже, полагают, что достоверно получат услугу более высокого качества, чем услугу, которую они получили бы, обратившись к поиску на публичном ресурсе.
2) Покупатель услуги понимает, что на поиск продавца услуги нужного качества он может потратить довольно много ценного времени. А это значит, что при прочих равных он будет готов заплатить больше, если расходы на поиски будут сокращены. Этим и могут пользоваться продавцы, назначая более высокую цену, чем в среднем по рынку.
3) Продавцы услуги понимают, что люди, ищущие их через друзей и знакомых, готовы заплатить некоторую сумму за доверие друг к другу. Подобные взаимоотношения могут неоднократно возникать в жизни людей и могут оказаться обоюдовыгодными при каких-то обстоятельствах. Этим также могут пользоваться продавцы, назначая более высокую цену, чем в среднем по рынку.
4) Покупатели полагают, что, обращаясь к друзьям и знакомым в поисках квалифицированных специалистов, они снижают асимметрию информации, с которой могут столкнуться при поиске их на публичных ресурсах, где могут встретиться как добросовестные, так и недобросовестные продавцы. Как правило, люди готовы заплатить некоторую сумму денег, чтобы добиться этого результата.