Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике
2017-2018 учебный год
Заочный этап
8-9 классы

Уважаемый участник!

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит учесть несколько правил, выполнение которых необходимо:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 часов по московскому времени 26 ноября 2017 года. Иного таймера нет.
2. Просим не задерживать выполнение: при опоздании даже на 5 секунд система закроет прием работ, и Ваша работа не будет принята к рассмотрению.
3. Работа выполняется ТОЛЬКО самостоятельно. Коллективное выполнение работ запрещено: все одинаковые работы будут аннулированы.
4. Все решения необходимо печатать, а не писать от руки, затем сохранять файл как PDF и после этого загружать в Личный кабинет. Пример для MS WORD: Файл→Сохранить как…→Тип файла PDF (*pdf).
5. Прием работы через электронную почту не производится. Только через Личный кабинет.
6. Запрещено «переконвертировать» файл, просто переименовав у него расширение на PDF: в таком виде он не читается и не будет проверен. За него будет выставлена оценка 0 баллов.
7. После загрузки работы Вам будет направлено письмо. У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену. Просим не пренебрегать этой возможностью и проверять загруженный файл, в том числе на отсутствие технических сбоев при загрузке, препятствующих открытию и чтению файла.
8. Необходимо загружать работу только в специально отведенное поле, не путая профили.
9. Запрещено производить заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточником являются труды известных ученых, философов, научные работы, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными. Работы с некорректными заимствованиями будут аннулированы.
10. Запрещено подписывать работы или иным способом указывать на автора. Работа с указанными персональными данными участника будет аннулирована.
11. Необходимо четко выполнять требования к объему работы, если он указан в задании.

1. В племя Тумба-Юмба с населением 30 человек приезжает торговец. Изучив обычаи племени, торговец предлагает сыграть в игру. За каждую операцию натурального обмена товаров, проводимую на рынке двумя туземцами, торговец отдает каждому из участников операции по одной золотой монете. Если к концу дня у двух разных туземцев окажется одинаковое число монет, все товары и монеты достаются торговцу. Туземец меняет товары только с другим знакомым туземцем, и хитрый торговец об этом знает. К концу дня торговец находит группу туземцев с одинаковым числом монет. Туземцы потрясены, торговец счастлив, провинившихся туземцев выгоняют с базара. И тут появляется Вождь и предлагает торговцу Игру – реванш. Пусть торговец раздаст 270 монет между оставшимися туземцами и ни разу не повторится (то есть у каждого туземца должно оказаться уникальное количество монет). Если торговец не сможет это сделать, то все монеты и товары остаются в племени.
   - Верно ли, что в изначальной игре у туземцев не было шанса?
   - Верно ли, что вождь сможет вернуть все товары и золото?
   - Верно ли, что вождь знал, сколько туземцев выгнали с рынка?
   - Какое максимальное число туземцев нужно было выгнать, чтобы вождь выиграл?
   - Верно ли, что если бы в первой игре торговец проиграл, туземцы могли бы проиграть вторую игру?

     Обоснуйте ответы.

   Решение: В любой компании количество людей имеющих одинаковое число знакомых как минимум двое. Поэтому у туземцев не было шанса. Вождь предложил раздать 270 монет, значит он знал, что туземцев удалят. Пусть удалили x человек. Тогда чтобы раздать всем разное количество монет нужно взять $\frac{0+30-x-1}{2}(30-x)$ монет, и Вождь должен сделать так, чтобы 270 монет не хватило. Тогда туземцев должно остаться минимум 24 человека, тогда 24*23/2 = 276 монет нужно чтобы ни разу не повториться. Так как 23*11 = 253 <270, следовательно, больше, чем x = 6 туземцев нельзя выгнать. Да, вождь об этом знал. Неверно, если бы торговец проиграл в первой, туземцы выиграли бы и вторую игру.

Критерии оценивания задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение либо не до конца обосновано, либо содержит арифметическую ошибку, не влияющую на результат. Получен верный ответ на 2, 3 или 4 вопроса	5
Получен и обоснован верный ответ только на один из вопросов в задаче	2
Ответ либо неверен, либо угадан, обоснования ответа нет	0

2. Дима и Сережа решили устроить соревнование на круглом озере. Они одновременно стартуют из одной точки. Сережа едет на моторной лодке с постоянной скоростью 20 км/ч и каким-то образом пересекает озеро (не обязательно по диаметру), в течение 30 минут. В это время Дима бежит вдоль берега озера сначала 15 минут со скоростью 6 км/ч, а остальное время с постоянной скоростью плывет на катере на другой берег, параллельно с траекторией движения Сережи. После одновременного прибытия на другой берег мальчики бегут навстречу друг другу. Во время всей игры мальчики

бегают с постоянными и равными скоростями. Через сколько времени после расставания они встретятся?

Решение: Трапецию можно вписать в окружность, только, если она равнобедренная. Длина сегмента, опирающегося на хорду такой же длины, в такой же окружности одинакова. Дима бежит вдоль озера 1,5 километра. Значит они должны вместе пробежать 1,5 километра, со скоростью сближения 12 км/ч, то есть 7, 5 минут. Итого от момента расставания пройдет 37,5 минут.

Критерии оценивания задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение либо не до конца обосновано, либо содержит арифметическую ошибку, не влияющую на результат	5
Ответ либо неверен, либо угадан, обоснования ответа нет	0

3. В последние годы использование молодыми семьями ипотечного кредита стало довольно популярным. Рассмотрите возможность получения ипотечного кредита с постоянной, фиксированной процентной ставкой. Считайте, что погашение долга по такому кредиту осуществляется равномерными (аннуитетными) платежами в конце каждого обусловленного договором платежного периода. Предположим, что по условиям ипотечного договора без штрафных санкций возможно частичное досрочное погашение данного кредита на любую сумму в пределах задолженности по кредиту на дату частичного досрочного погашения.
Пусть у ипотечного заемщика в середине одного из платежных периодов появились дополнительные денежные средства в размере текущего ежемесячного платежа, которые в дополнение к аннуитетной выплате он решил потратить на погашение задолженности. Стоит ли заемщику осуществить частичное досрочное погашение немедленно (т.е. в середине платежного периода) или же стоит дождаться конца периода и осуществить выплату одновременно с аннуитетным платежом? Считайте для простоты, что во втором случае дополнительные средства будут лежать до конца периода на текущем счете с нулевой доходностью. Дайте интуитивное объяснение и подтвердите свои размышления аналитически.
Подсказка: для ответа на поставленный вопрос задания вам придется воспользоваться дополнительной информацией об ипотечном кредитовании и распределении средств на выплату процентов и основного долга при частично досрочном погашении.

Решение: Если заемщик направит средства на частично досрочное погашение немедленно, то в этом случае часть этих средств пойдет на погашение начисленных процентов за половину периода, остальные – на погашение основного долга. В результате из-за снижения суммы основного долга за вторую половину периода будет начислено меньше процентов на остаток задолженности. В конце периода обычный размер аннуитетной выплаты будет разделен на выплату накопленных процентов за вторую половину периода и на погашение основного долга.
Если заемщик подождет до конца периода, то вся дополнительная сумма пойдет на погашение основного долга, а т.к. средства будут лежать на текущем счете с нулевой доходностью, то никаких дополнительных эффектов это решение не вызовет.

Запишем это аналитически.
Пусть T – сумма денег, которую заемщик выплачивает банку ежемесячно, а S – сумма долга на начало периода и r – процентная ставка за период.
Тогда в первом случае при дополнительной выплате T в середине периода величина долга снизится на $T-0{,}5rS>0$, поэтому за вторую половину периода проценты составят ($0{,}5r(S-T+0{,}5rS)$ и сумма задолженности на конец периода составит $S-T+0{,}5rS-T+0{,}5r(S-T+0{,}5rS)=S-2T+rS-0{,}5rT+(0{,}5rS)^2$.
Если дополнительная выплата будет происходить в конце периода, то остаток долга составит $S-T+rS-T=S-2T+rS$, что больше, чем в первом случае.
Таким образом, при прочих равных, выгоднее заплатить сразу.

Критерии:
5 баллов – интуитивное обоснование;
10 баллов – интуитивное обоснование + обоснование на частном примере;
15 баллов – интуитивное обоснование + обоснование в общем виде.

4. В городке М-ске живут 3 типа людей: толстые, тонкие (и тех и других поровну) и в меру упитанные, которые составляют четвертую часть населения городка. Однажды на вокзале встретились старые друзья - один тонкий и один толстый. Начав обсуждать былые времена, они, как это частой и бывает, перешли к обсуждению острых социальных вопросов и чуть не поссорились: тонкий утверждал, что зарплаты в М-ске очень маленькие, так как он, как и все 42 тонких, зарабатывают всего 17 биткоинов в месяц и могут позволить себе разве что купить джинсы с подворотами. На что толстый отвечал, что зарплаты очень даже неплохие, ведь все толстые в городке, по его данным, зарабатывают по 85 биткоинов в месяц, что позволяет им даже посещать барбершопы. Заработная плата в меру упитанных при этом равна среднему значению между зарплатой толстых и тонких.
Помогите друзьям оценить уровень социального неравенства в М-ске любыми известными вам способами, исходя из данных задачи. Приведите количественную оценку и дайте ее интерпретацию.

Решение:
Приведены возможные критерии оценки.

1) Коэффициент R/P 10% или децильный коэффициент: $K_D=\frac{85}{17}=5$ - доходы 10 % самых богатых в пять раз больше доходов 10 % самых бедных
2) Коэффициент Лоренца: $L=\frac{1}{2}\sum|w_i-d_i|$, где w_i - доля населения i-ой группы, а d_i - доля дохода i-ой группы в общем доходе.
Всего население $N=43/0{,}1=430$, из них в меру упитанных $430-2\cdot 43=344$, а их заработная плата $\frac{17+85}{2}=51$

Показатель	Тонкие	В меру упитанные	Толстые
Число человек в группе	43	344	43
Доля группы	0,1	0,8	0,1
Доход группы	731	17544	3655
Доля дохода группы	0,03(3)	0,8	0,1(6)

Тогда $L = 0{,}5 \cdot [(0{,}1 - 0{,}03(3)) + (0{,}8 - 0{,}8) + (0{,}1(6) - 0{,}1)] = 0{,}06(6)$ - показывает насколько отличается распределение дохода от распределения населения по группам. Чем ближе к нулю, тем ближе распределения.

3) Коэффициент Джини: $G = \sum p_i q_{i+1} - \sum p_{i+1} q_i$, где p_i - накопленная доля населения, а q_i - накопленная доля дохода.

Показатель	Тонкие	В меру упитанные	Толстые
Накопленная доля населения	0,1	0,9	1
Накопленная доля дохода	0,03(3)	0,8(3)	1

$G = 0{,}1 \cdot 0{,}8(3) + 0{,}9 \cdot 1 - 0{,}03(3) \cdot 0{,}9 - 0{,}8(3) \cdot 1 = 0{,}12$ - описывает равномерность распределения доходов по группам. Чем ближе к нулю, тем равномернее.

Критерии оценивания:
2 балла – попытка сравнить с помощью средних величин.
От 1 до 5 баллов (в зависимости от полноты объяснений и точности расчетов) за пояснения и расчет каждого из трех коэффициентов (максимум 15 баллов).

5. В некотором королевстве рабочую силу составляют только клан гномов и клан эльфов. Так уж исторически сложилось в этом королевстве, что гномы и эльфы всегда трудились отдельно и ни одно предприятие не позволяло себе нанять одновременно и тех и других. Совокупное предложение трудовых ресурсов гномов представлено функцией $w^S_{гном} = 1 + L/3$, а совокупное предложение трудовых ресурсов эльфов $w^S_{эльф} = 3 + L$. При этом обратная функция совокупного спроса на труд гномов имеет вид $w^D_{гном} = 10 - 2L/3$, а обратная функция совокупного спроса на труд эльфов: $w^D_{эльф} = 18 - 2L$. Взошедший недавно на престол король очень обеспокоился тем, что ставка оплаты труда его подданных различна, поэтому издал закон, по которому заработная плата эльфов и гномов должна быть одинакова и работники королевства не должны быть дискриминированы по признаку принадлежности к кланам. При этом король считает, что нормативное регулирование ставки заработной платы в целом отрицательно скажется на экономике его королевства и обязывает всех своих подданных вести себя совершенно конкурентно. Во сколько раз увеличится заработная плата той группы работников, чья заработная плата до вмешательства короля была ниже, если фирмам в королевстве безразлично, нанимать ли эльфов или гномов?

Решение:

До введения закона заработная плата эльфов и гномов определялась условием равенства спроса и предложения на каждом рынке:

$w^S_{\text{гном}} = w^D_{\text{гном}}$, откуда $1 + \frac{L}{3} = 10 - 2L/3$ и $L_{\text{гном}} = 9$ и $w_{\text{гном}} = 4$

$w^S_{\text{эльф}} = w^D_{\text{эльф}}$, откуда $3 + L = 18 - 2L$ и $L_{\text{эльф}} = 5$ $w_{\text{эльф}} = 8$

После введения закона все участники рынка должны вести себя совершенно конкурентно и совокупный спрос на трудовые ресурсы должен быть равен совокупному предложению трудовых ресурсов. Поэтому

$L^S_{\text{гном}} + L^S_{\text{эльф}} = L^D_{\text{эльф}} + L^D_{\text{гном}}$, где

$$L^S_{\text{гном}} + L^S_{\text{эльф}} = \begin{cases} 3w - 3, \text{если } w \le 3 \\ 4w - 6, \text{если } w > 3 \end{cases}$$

$$L^D_{\text{эльф}} + L^D_{\text{гном}} = \begin{cases} 9 - w/2, \text{если } w \ge 10 \\ 24 - 2w, \text{если } w < 10 \end{cases}.$$

Откуда находим, что равновесие достигается при

$4w - 6 = 24 - 2w$, и $w = 5$

Таким образом, заработная плата гномов, чья оплата до вмешательства короля была меньше, возросла в 5/4=1,25 раз.

Ответ: в 1,25 раз.

Критерии:

Промежуточные баллы при неполном решении:

2 балла – найдена часть старого равновесия

4 баллов – полностью найдено первоначальное равновесие

6 баллов – попытка нахождения общего спроса или предложения

Полностью обоснованное верное решение – 15 баллов.

6. Число 2458710411 написали 98 раз подряд, при этом получилось 980-значное число. Из этого числа требуется вычеркнуть 4 цифры. Чему равно количество способов, которыми это можно сделать так, чтобы вновь полученное 976-значное число делилось нацело на 6?

Решение. Если число делится на 6, то оно делится на 3 и на 2. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётная. Полученное в условии 980-значное число заканчивается на 2458710411, то есть имеет вид …2458710411. Для того, чтобы данное число делилось на 2, необходимо зачеркнуть последние 2 единицы, чтобы число заканчивалось на чётную цифру. Полученное число будет иметь вид 2458710411…245871041124587104. Теперь необходимо, чтобы оно делилось на 3. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Сумма цифр полученного числа равна:

(2+4+5+8+7+1+0+4+1+1)*97+(2+4+5+8+7+1+0+4)=33*97+31=3232.

Остаток от деления числа 3232 на 3 равен 1. Это означает, что числа надо зачёркивать таким образом, чтобы их сумма делилась на 3 и в остатке давала 1. Тогда при вычитании будет получаться число, сумма цифр которого будет в точности делиться на 3. Максимальную сумму, которую можно получить, вычёркивая цифры, равна 16 (8+8). Значит необходимо рассмотреть все числа от 0 до 16, которые делятся на 3 и в

остатке дают 1, и все возможные комбинации их получения. Эти числа: 1, 4, 7, 10, 13, 16. Комбинации, которыми их можно получить, устроены следующим образом:
1 (0+1); 4 (0+4, 2+2); 7 (2+5, 7+0); 10 (5+5, 2+8); 13 (8+5); 16 (8+8).
Осталось лишь для каждой комбинации посчитать количество способов, которыми эту комбинацию можно получить. Первую комбинацию можно получить, вычеркнув одну 1 и один 0. Единиц в нашем числе 97*3+1 = 292, а нулей 98. Значит количество способов, которыми это можно сделать, равно (97*3+1)*98 = 28616. Для последующих комбинаций получим.
(0+4): 98*98 = 9604;
(2+2): 98*97/2 = 4753;
(2+5): 98*98 = 9604;
(7+0): 98*98 = 9604;
(5+5): 98*97/2 = 4753;
(2+8): 98*98 = 9604;
(5+8): 98*98 = 9604;
(8+8): 98*97/2 = 4753.
Суммируя все полученные комбинации получим число способов 90895. Однако стоит учесть, что один из предложенных способов нам не подходит. Если мы зачеркнём последние цифры 0 и 4, то наше число будет заканчивать на 1, то есть не будет делиться на 2, следовательно, не будет делиться на 6. Значит искомое число комбинаций равно 90895-1 = 90894 (способа).

Ответ: 90 894 способа.

Критерии оценки выполнения задания	Баллы
Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.	**10**
Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора комбинаций чисел (например, не учтено одно лишнее решение (0+4), комбинации парных цифр не поделены на 2 и т.д.) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	**6**
Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, учтена и верно посчитана часть комбинаций); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, не учтено большинство комбинаций или учтены лишние комбинации, комбинации неправильно посчитаны, не учтены случаи вычёркивания одной и той же цифры (2+2, 5+5, 8+8) и т. д.); При этом решение может быть не завершено.	**3**

Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 3 и 6 баллов.	**0**

7. В трапеции $ABCD$ на основании AD взяты точки G и H, на основании $BC -$ точки E и F. Отрезки BG и AE пересекаются в точке K, отрезки EH и GF пересекаются в точке L, отрезки FD и HC пересекаются в точке M. Площадь четырёхугольника $ELGK$ равна 4, площадь четырёхугольника $FMHL$ равна 8. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения площади треугольника CDM при условии, что величина площади этого треугольника выражается целым числом.

Решение. Обозначим площади треугольников ABK, KEG буквой x, площади треугольников ELG, FHL буквой y, площади треугольников FMH, CDM буквой z. Тогда $x + y = 4, y + z = 8$. Из этих равенств и того, что число z целое следует, что числа x, y также целые. Так как $y \geq 1$, для x имеются возможности $x = 3, x = 2, x = 1$, при которых $z = 7, z = 6, z = 5$, соответственно. Итак, искомые наименьшее и наибольшее значения равны числам 5 и 7.

Ответ: z = 7, z = 5.

Критерии оценки выполнения задания	Баллы
Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.	**12**
Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения *(например, используется факт равенства площадей пар треугольников* ***ABK*** *и* ***KEG, ELG*** *и* ***FHL, FMH*** *и* ***CDM****, однако этот факт не доказан)* или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.	**8**
Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, *верно отмечены равенства площадей пар треугольников*); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, *не найдены возможные значения этих площадей*). При этом решение может быть не завершено.	**4**
Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 2 и 4 балла.	**0**