

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2017 - 2018 учебный год

Очный этап

8 – 9 классы

Задание 1 (14 баллов)

Карта метрополитена города Дарбу помещена в прямоугольную систему координат (1 ед. на осях координат в масштабе равна 1 км.). Станцию «Альфа», расположенную в точке $(-6; 7)$, планируется соединить одной веткой метро со станцией «Бета», расположенной в точке $(-1; 9)$. При этом между этими станциями на новой ветке должна быть расположена станция «Гамма» так, чтобы она находилась на прямой $y = x + 3$. Стоимость прокладки 1 км метро равна 10 тыс. у.е.

Найти:

- 1) такое расположение станции «Гамма» (указать ее координаты), чтобы суммарная стоимость участка «Альфа» - «Гамма» - «Бета» была минимальна;
- 2) минимальную стоимость участка «Альфа» - «Гамма» - «Бета».

Решение:

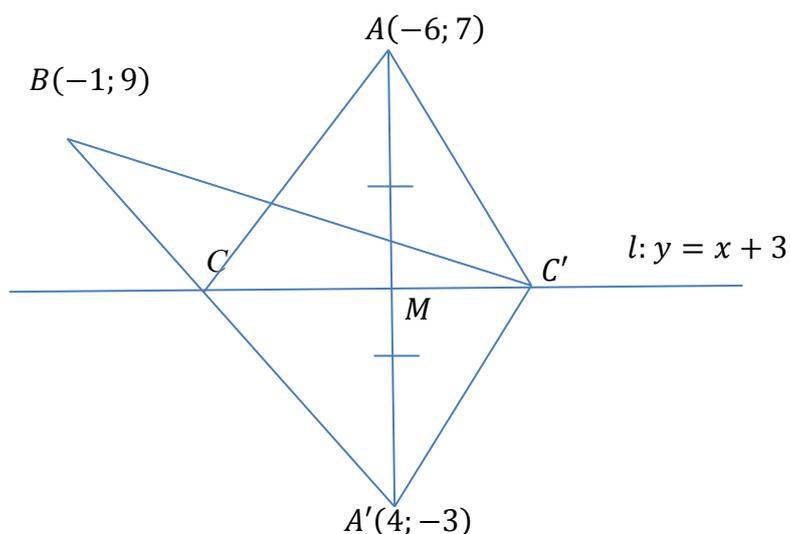
Стоимость участка «Альфа»-«Гамма»-«Бета» будет минимальна тогда и только тогда, когда минимальна суммарная длина участков «Альфа»-«Гамма» и «Гамма»-«Бета».

Обозначим $A(-6; 7)$, $B(-1; 9)$, требуется найти точку C , лежащую на прямой $y = x + 3$, такую, что сумма длин $AC + BC$ минимальна.

Нетрудно проверить, что точки A, B расположены по одну сторону от прямой $l: y = x + 3$. Построим точку A' , симметричную точке A относительно прямой $y = x + 3$. Ее координаты $A'(4; -3)$. Тогда $AM = MA'$ и $AM \perp l$, поэтому l – серединный перпендикуляр к отрезку AA' . Прямая BA' пересекает прямую l в точке C . Покажем, что C искомая.

В самом деле, пусть C' - произвольная точка прямой l , отличная от C . В силу свойств серединного перпендикуляра к отрезку имеем $AC' = A'C'$. Отсюда, используя неравенство треугольника, получим:

$$AC' + BC' = A'C' + BC' > BA' = A'C + BC = AC + BC.$$



Стало быть точка C искомая. И в частности, минимальная сумма длин $AC + BC$ равна длине отрезка BA' .

Уравнение прямой BA' имеет вид $5y + 12x - 33 = 0$. Теперь остается найти точку ее пересечения с прямой $y = x + 3$. Непосредственно находим, что

$$C \left(\frac{18}{17}; \frac{69}{17} \right).$$

Длина отрезка $BA' = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Следовательно, минимальная стоимость прокладки участка равна 130 тыс. у.е.

Ответ: 1) станцию «Гамма» следует расположить в точке $C \left(\frac{18}{17}; \frac{69}{17} \right)$;
2) минимальная стоимость прокладки равна 130 тыс. у.е.

Критерии:

1. Определение координат точки $A'(4; -3)$ симметричной точке $A(-6; 7)$ относительно прямой $y = x + 3$ – до 3-х баллов.
2. Обоснование того, что точка C является искомой – до 8 баллов
3. Правильное нахождение координат точки C и длины отрезка BA' - до 3-х баллов.
4. Учащиеся могли представить другое решение данной задачи. В таком случае, важным является наличие аргументированного и четкого доказательства того, что найденная ими точка и в самом деле искомая. Соответственно максимальное количество баллов за поиск (построение) и обоснование, в зависимости от степени аргументации, – до 11 баллов. Вычисление ее координат и длины отрезка BA' - до 3-х баллов.

Задание 2 (14 баллов)

Юрист и экономист за совместную работу получили нечетное количество монет одинакового достоинства (более четырех). Разделить монеты между собой они могут только одним из трех способов, каждый из которых выполняется в три шага, преследуя свой личный интерес (каждый хочет получить больше монет):

Шаг 1: Юрист делит все монеты на две произвольные части, в каждой из которых не менее двух монет

Шаг 2: Экономист делит каждую из частей опять на две части, в каждой из которых не менее одной монеты.

Способы различаются только третьим шагом.

Шаг 3:

Способ 1: экономист берет самую большую и самую маленькую части.

Способ 2: экономист берет обе средние части.

Способ 3: экономист выбирает 1 или 2 способ сам, но за право выбора отдает одну монету юристу.

Экономист выиграл при дележе. Какой способ он выбрал и почему?

Решение:

Экономист выбрал 1 способ. Обозначим «Э» - экономист, «Ю» - юрист.

Пусть Ю разделили монеты на части a и b монетами в каждой так, что $a < b$

Тогда Э, преследуя свой интерес делит a на две части – в 1 монету и в $a-1$ монету.

Они оказываются соответственно наибольшей и наименьшей. Т.е. при первом способе забирает бóльшую часть. При этом, очевидно, $a=n$, $b=n+1$, где n - количество монет.

Второй способ дележа даст экономисту только n монет, действительно $a=2$, $b=2n-1$ на первом шаге, тогда наилучшее деление на втором шаге $2=1+1$, $2n-1=n+n-1$.

Третий способ при делении на первом шаге $a=n$, $b=n+1$ дает возможность выбора части с $n+1$ монетой, которую по условиям дележа придется отдать.

Надо отметить, что «борьба» идет, собственно, за одну монету во всех трех случаях.

Критерии:

1. Верно указан лучший (с точки зрения выгоды экономиста) вариант. Данному выбору дано обоснование. Желательно, указано на то, что "борьба" идет за одну монету при любом их общем количестве - 14 баллов
2. Верно указан лучший (с точки зрения выгоды экономиста) вариант. Обоснование выбору не дано - 10 баллов
3. Указан лучший способ и обоснован, но для юриста - 7 баллов
4. Были попытки решения и отдельные верные логические выкладки - 2 балла
5. В остальных случаях - 0 баллов.

Задание 3 (18 баллов)

В последнее время некоторые мобильные приложения не только информируют своих пользователей о различных скидках на товары в магазинах, но и предлагают им воспользоваться кэшбэком при покупке некоторых товаров. (Кэшбэк – возврат части потраченных денег.) Кэшбэк может быть начислен баллами, бонусами или непосредственно деньгами, которые перечисляются на счет мобильного телефона или на электронный кошелек покупателя. При этом пользователи таких приложений просто сканируют кассовые чеки на покупку товаров в различных магазинах и после электронной проверки чека в приложении покупателя получают кэшбэк.

Как вы полагаете, кто, кроме покупателей товаров, может являться выгодополучателем от использования кэшбэков? Объясните, как такая политика помогает получить дополнительную выгоду?

Решение:

Возможные выгодополучатели такой политики:

- 1) Владельцы/разработчики мобильных приложений. Они информируют покупателей и предлагают воспользоваться кэшбэком через свое приложение. Привлекая тем самым покупателей товаров, они могут получать часть выручки продавцов акционных товаров.
- 2) Производители/поставщики товаров. Привлекая через мобильное приложение покупателей, они увеличивают объем спроса на свою продукцию, которая продается в различных магазинах. Увеличение их выручки с лихвой в этом случае покрывает затраты на возврат части денежных средств, потраченных покупателями.
- 3) Владельцы магазинов, через которые распространяется продукция. Они тоже могут получать дополнительный доход при проведении подобной политики. Зная, на какой из товаров предоставляется кэшбэк, магазины могут ожидать увеличение спроса на эту продукцию, поэтому наличие ее на полках этих магазинов привлечет к ним покупателей, приобретающих не только данный товар, но и другие товары.

Критерии:

Обоснованное указание одного выгодополучателя оценивалось в 6 баллов.

Задание 4 (18 баллов)

Семья Ивановых решила оклеить обоями стены прямоугольной детской комнаты шириной 5 м и площадью 35 кв.м. Высота потолка в комнате составляет 3 м, а общая площадь дверного и оконного проемов равна 4 кв.м. Ивановы хотели бы использовать обои двух типов: с рисунком и без, комбинируя их так, чтобы 40 % площади стен было оклеено обоями одного типа, а остальное – обоями другого типа. Все обои продаются только рулонами. Рулон обоев с рисунком стоит 100 д.ед., длина его полотна составляет 12 м, а ширина – 0,5 м. Рулон обоев без рисунка стоит 130 д.ед., длина его полотна равна 10 м, а ширина – 1 м. При необходимости любое полотно обоев можно сгибать вдоль длины или поперек его длины и стыковать с другим полотном.

(а) Сколько денег на покупку обоев затратит семья Ивановых, если она заботится об экономии семейного бюджета? Какая доля площади стен будет оклеена обоями с рисунком?

(б) Изменится ли ваш ответ на предыдущий вопрос, если специалисты рекомендуют покупать обои каждого вида с 10% запасом и Ивановы склонны последовать их совету?

Решение и критерии:

Длина комнаты: $35:5=7$ м (1 балл)

Площадь стен, которые требуют оклейки обоями, составляет: $(7+5)*2*3-4=68$ (1 балл)

60% площади стен составляют $68*0,6=40,8$ кв.м.

40% площади стен составляют $68-40,8=27,2$ кв.м.

Одним рулоном обоев с рисунком можно оклеить $12*0,5=6$ кв.м.

Одним рулоном обоев без рисунка можно оклеить $10*1=10$ кв.м.

(а) Если оклеиваем обоями с рисунком 60% площади стен, а остальное – обоями без рисунка, то на это будет затрачено:

$100*ОКРУГЛВВЕРХ(40,8/6)+130*ОКРУГЛВВЕРХ(27,2/10)=1090$ руб. (3 балла)

Если оклеиваем обоями без рисунка 60% площади стен, а остальное – обоями с рисунком, то на это будет затрачено:

$130*ОКРУГЛВВЕРХ(40,8/10)+100*ОКРУГЛВВЕРХ(27,2/6)=1150$ руб. (3 балла)

Как видим, потратив на обои 1090 руб., выгоднее оклеить обоями с рисунком 60% площади стен, а остальное - обоями без рисунка. (2 балла)

(б) Легко заметить, что

— при оклейке обоями с рисунком 60% площади стен, таким образом, чтобы был 10%-ный запас обоев, придется докупить еще один рулон обоев с рисунком.

Так как $ОКРУГЛВВЕРХ(40,8*1,1/6)=ОКРУГЛВВЕРХ(40,8/6)+1$,

$\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(27,2*1,1/10)=\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(27,2/10)$. (3 балла)

— при оклейке обоями с рисунком 40% площади стен, таким образом, чтобы был 10%-ный запас обоев, не придется докупать дополнительно ни одного рулона.

Так как

$\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(40,8*1,1/10)=\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(40,8/10)$,

$\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(27,2*1,1/6)=\text{ОКРУГЛВВЕРХ}(27,2/6)$. (3 балла)

— Поэтому достаточно сравнить лишь величины $1090+100$ и 1150 . Откуда сразу получаем, что семья изменит решение и поклеит обоями с рисунком 40% площади стен, потратив на это 1150 руб. (2 балла)

Задание 5 (18 баллов)

Компания из 10 друзей привыкла путешествовать вместе. Недавно они приступили к планированию очередной поездки, выбрав город, гостиницу, купив билеты на поезд (их можно вернуть без штрафов), а при оплате брони в гостинице они задумались. Можно забронировать гостиницу с возможностью бесплатной отмены бронирования, а можно выбрать тариф, при котором деньги, заплаченные за бронь, не возвращаются. Так, стоимость бронирования без возможности отмены составляет 1100 руб. за ночь с человека, а при возможности отмены с полным возвратом денежных средств – 1200 руб. за ночь с человека. По своему опыту друзья знают, что всегда так получается, что одному из них приходится отказаться от поездки, причем не повезти может любому из компании. Какой вариант бронирования гостиницы им стоит выбрать? Считайте, что друзья легко договариваются между собой, а также готовы компенсировать друг другу потери и делиться выигрышами.

Решение:

Если друзья выберут бронь без возможности отмены, то она обойдется им в 11000 руб., что в расчете на одного путешественника составит $11/9$ тыс. руб. Если же они оформят бронь с возможностью полного возврата, то каждый путешественник будет платить по $1,2$ тыс. руб. Т.к. $11/9 > 1,2$, то друзьям с их рисками лучше бронировать гостиницу с возможностью отмены.

Критерии:

Неверно рассчитаны расходы в одном из вариантов – минус 9 баллов.

Задание 6 (18 баллов)

Производством световых мечей для Школы Джедаев занимается специальная фабрика на планете Альдераан. Известно, что технология производства следующая: 1 световой меч получается из 2-х металлических дуг, скрепленных между собой. При этом на аппарате, где производится скрепление, в час изготавливается 20 мечей. Закупочная стоимость металлической дуги, изготавливаемой из набуниания, составляет 400 у.е., час работы сборочного аппарата - 200 у.е., а час работы мастера на этом аппарате - 100 у.е.

По расчетам технологов, минимальные издержки производства нового заказа для Школы Джедаев составят 65 200 у.е. Найдите число световых мечей в заказе.

Решение:

Для производства одного меча необходимы две дуги, каждая стоимостью по 400 единиц.

Пусть x - число мечей в заказе.

Тогда совокупные расходы на закупку металлических дуг составляют $2 * 400x = 800x$.

Сборка одного меча занимает $1/20$ часа, то есть затраты в расчете на производство меча на аппарате составляют двадцатую часть от суммарной стоимости часа работы аппарата и мастера. То есть, совокупные расходы на изготовление мечей на сборочном аппарате составляют $(200 + 100) * \frac{x}{20} = 15x$, а совокупные издержки одного меча равны $800x + 15x = 815x$.

Если всего на производство было потрачено 62500 денежных единиц, то было изготовлено $62500/815=80$ мечей.

Критерии:

- 1) арифметические ошибки – минус 2-4 балла (в зависимости от существенности ошибки)
- 2) найдены только расходы на закупку металлических дуг – 2 балла.