

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2017 - 2018 учебный год

Очный этап

10 - 11 классы

Вариант 1

Задание 1 (12 баллов)

На закрытой прямоугольной территории крупного предприятия размером 150x110 м предприниматель предлагает установить ларек по продаже кофе и выпечки. Ларек имеет форму цилиндра с радиусом основания 5 м. На заводской территории имеется три вида строений: десять строений размером 20x20 м, четыре 40x10 м и одно круглое строение 10 м в основании. Руководство завода отказывает предпринимателю в установке ларька, аргументируя отказ исключительно отсутствием площади для его установки. Докажите, что необходимая площадь имеется, расположение уже стоящих зданий не влияют на наличие данной площади.

Решение:

Решение основано на принципе Дирихле: оценим размер площади, на которой не может быть установлен ларек. Центр ларька должен находиться не ближе чем 5 м от строений и забора. Дадим «грубый зазор» в 10 м.

Тогда: строения 20x20 дадут запретную площадь $30 \times 30 = 900 \text{ м}^2$, таких десять, т.е. 9000 м^2 .

Аналогично второй тип строений $50 \times 20 \times 4 = 4000 \text{ м}^2$ круглое строение дает по $15^2 \times \pi = 225 \times 3,14$ около 707 м^2 .

Забор: $150 \times 110 - 140 \times 100 = 16500 - 14000 = 2500 \text{ м}^2$

Итого: $9000 + 4000 + 2500 + 707 = 16207$

$16500 - 15207 = 293 \text{ м}^2$, в любой точке данной площади можно установить ларек. А если какие-то здания находятся друг от друга ближе, чем в 10 метрах, то и того больше. Ч.т.д.

Критерии*:

1. Дано полное обоснование, дан пример возможной установки, есть указание на то, что расположение построенных зданий не имеет значения для доказательства – до 12 баллов
2. Были попытки решения и отдельные верные логические выкладки – до 2 баллов
3. В остальных случаях - 0 баллов

**Важно: численная оценка свободной площади (решение) не является единственно возможной, например «зазор» может быть и более 10 м.*

Задание 2 (12 баллов)

Крокодил Гена и старуха Шапокляк заключили фьючерсную сделку, согласно которой Гена согласился вложить в 1-ый проект сумму, равную $p_1 > 0$ тыс. руб., а через год получить за это x_1 тыс. руб. так, что

$$3x_1 - 4p_1 - 30 = 0,$$

и при этом Гена согласился вложить во 2-ой проект сумму, равную $p_2 > 0$ тыс. руб., а через год получить за это x_2 тыс. руб. так, что

$$p_2^2 - 12p_2 + x_2^2 - 14x_2 + 69 = 0.$$

Согласно условию сделки параметры p_1, x_1, p_2, x_2 были подобраны так, чтобы величина

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}$$

была минимально возможной. Определить:

- 1) минимальное значение величины d ;
- 2) является ли сделка выгодной для Гены? Найти величину прибыли или убытка Гены при согласии на данную сделку.

Решение:

1) Ясно, что выражение задает уравнение некоторой прямой l в плоскости xOp .

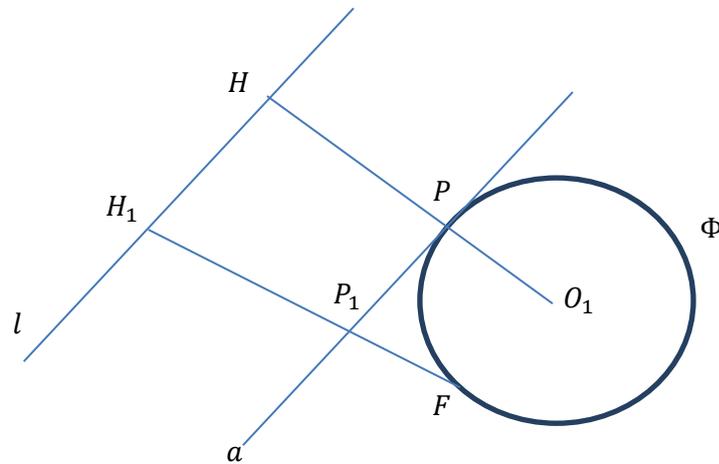
Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} p^2 - 12p + x^2 - 14x + 69 = 0 &\Leftrightarrow (p - 6)^2 + (x - 7)^2 - 36 - 49 + 69 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - 6)^2 + (x - 7)^2 = 4^2 \end{aligned}$$

Оно задает в плоскости xOp уравнение окружности Φ с центром в точке $(6; 7)$ радиуса 4. Тогда число выражение вида

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}$$

задает расстояние между точками, лежащими на l и Φ . Потому согласно условию задачи требуется найти наименьшее расстояние между точками, лежащими на



прямой и на окружности. Пусть O_1H – перпендикуляр из центра окружности O_1 на прямую l , тогда O_1P – радиус окружности. Покажем, что $HP = O_1H - O_1P$ есть искомая величина. Действительно, пусть $H_1 \in l, F \in \Phi$. Проведем касательную a к окружности в точке P . Радиус O_1P , проведенный в точку касания, перпендикулярен a . Поэтому $a \parallel l$. И следовательно, HP равно расстоянию между параллельными прямыми. Теперь имеем:

$$H_1F = H_1P_1 + P_1F \geq H_1P_1 \geq HP.$$

Стало быть, HP кратчайшее расстояние между точками окружности и прямой l . Найдем O_1H по формуле расстояния от точки до прямой (один из способов нахождения):

$$O_1H = \frac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot 6 - 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{33}{5} = 6,6.$$

Отсюда $HP = 6,6 - 4 = 2,6$.

2) Зададим уравнение прямой O_1H . Поскольку она перпендикулярна прямой l и проходит через точку $O_1(6; 7)$, постольку ее уравнение в плоскости xOp имеет вид

$$x = -\frac{3}{4}(p - 6) + 7 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}p + \frac{23}{2}.$$

Найдем координаты точки H как координаты точки пересечения прямых l и O_1H . Составим уравнение:

Отсюда $p_1 = 0,72$ и $x_1 = \frac{4}{3}p_1 + 10 = 10,96$.

Найдем координаты точки P как координаты точки пересечения прямой O_1H и окружности Φ :

$$(p - 6)^2 + \left(-\frac{3}{4}p + \frac{23}{2} - 7\right)^2 = 4^2.$$

Получим два решения $p = \frac{46}{5}$ и $p = \frac{14}{5}$. Поскольку точка P лежит левее точки O_1 , постольку окончательно $p_2 = \frac{14}{5} = 2,8$. Отсюда $x_2 = 9,4$.

Преимущество от сделки составит:

$$x_1 + x_2 - p_1 - p_2 = 10,96 + 9,4 - 2,8 - 0,72 = 16,84.$$

Значит, сделка для крокодила Гены выгодна и прибыль составит 16840 руб.

Ответ: 1) 2,6. 2) выгодна, прибыль 16840 руб.

Критерии:

1. Корректное обоснование того, что отрезок НР есть кратчайшее расстояние от окружности до прямой $3x - 4p - 30 = 0$ – до 3-х баллов.
2. Нахождение длины отрезка НР (ответа на первый пункт задачи) – до 3-х баллов.
3. Обоснованное нахождение и получение верного ответа на второй пункт задачи – до 6 баллов.

Задание 3 (12 баллов)

Найдите два целых числа A и B , расположенных на числовой прямой на расстоянии 1 друг от друга, и обладающих следующим свойством: корень уравнения $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$ принадлежит интервалу (A, B) .

Решение:

$x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$. Так как по теореме Безу у данного выражения корней нет (поскольку делители свободного $+1$, -1 – не являются корнями уравнения), представим функцию в виде $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1) + 4$. Таким образом, график функции может быть получен из графика функции $y = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$ преобразованием вдоль оси ординат $+4$. Тогда единственный действительный корень уравнения будет лежать левее $x = -3$ на оси абсцисс. Рассматривая ближайшую к -3 (заметим, что с учетом $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1) + 4$, $f(-3) > 0$) точку $f(-4) = -11$ получим что $A = -4, B = -3$

Критерии:

1. Проверены возможные рациональные корни уравнения $(+1) - 3$ балла
2. Определено преобразование функции с тремя рациональными корнями, к исходной функции – 3 балла
3. Оценены величины A и B . Дан верный арифметический ответ – 6 баллов
4. Замечание: представлен иной обоснованный алгоритм получения верного значения A и B . (Например, использована теорема Больцано-Коши или оценены точки экстремума функции, далее метод перебора) – 12 баллов

Задание 4 (16 баллов)

В небольшом городке действует только одна автобусная компания, которая возит людей до крупного районного центра. Также в городке есть станция тупиковой железнодорожной линии, от которой в настоящий момент ходят электрички в тот же центр. Совокупный спрос на объемы перевозок на автобусе и на электричке определяются в соответствии с функцией $q(p) = 3000 - 20p$, где p - минимальная из цен на проезд до центра и обратно в автобусе или электричке, q - количество желающих совершить поездку при цене p .

Известно, что перевозки по железной дороге регулируются государством, поэтому цена на проезд в оба конца в электричке фиксирована и составляет 10 у.е. Однако электричкой может быть перевезено не более 1000 человек.

(а) Какую цену установит за проезд автобусная компания, если ее издержки перевозки любого числа пассажиров в количестве y составляют $TC(y) = y + 5$?

(б) В городке ходят слухи, что из-за убыточности железнодорожных перевозок железнодорожная станция скоро закроется, из-за чего выбраться в центр (и вернуться обратно) можно будет только на автобусе. Как изменится в этом случае общее число перевозимых пассажиров?

Решение:

(а) Поскольку потребители выбирают проезд тем средством, которым дешевле, то может быть два варианта: 1) электричкой воспользуется максимально возможное число пассажиров по цене 10 у.е., на оставшемся спросе автобусная компания будет монополистом и назначит цену больше 10 у.е.; 2) автобусная компания будет работать на всем спросе, установив цену не больше 10 у.е. Автобусная компания выберет тот вариант, при котором ее прибыль будет больше.

Предположим, что она выберет первый вариант. Тогда остаточный спрос составит . Прибыль автобусной компании составит тогда $\pi = p(2000 - 20p) - (2000 - 20p + 5) = 2020p - 20p^2 - 2005$. Это парабола с ветвями вниз имеет максимум в $p = 50,5 > 10$. Прибыль будет равна $\pi = (2000 - 20p)(p - 1) - 5 = (2000 - 20 \cdot 50,5)49,5 - 5 = 20 \cdot 49,5^2 - 5$.

Если же фирма захочет привлечь всех пассажиров, то лучший для нее исход, когда при цене 10 ее выберут все пассажиры. Тогда максимальная прибыль составит $\pi = (3000 - 20p)(p - 1) - 5 = (3000 - 20 \cdot 10)10 - 5 = 20 \cdot 14 \cdot 10^2 - 5$.

Заметим, что $49,5^2 > 40^2 = 1600 > 14 \cdot 10^2$.

Таким образом, автобусной компании выгодно позволить перевезти железной дороге 1000 пассажиров и назначить цену 50,5.

(б) Если автобусная компания станет обычным монополистом, то ее прибыль будет равна $\pi = (3000 - 20p)(p - 1) - 5 = 3020p - 20p^2 - 3005$. Максимум этой параболы с ветвями вниз находится в точке $p = 75,5$. Заметим, что прибыль при

этой цене положительна. При данной цене компания перевезет 1490 пассажиров, а ранее – 990 пассажиров. Таким образом, в результате закрытия железной дороги совокупное число перевозимых пассажиров снизится на $1000+990-1490=500$ пассажиров.

Критерии:

- (а) 1) не рассмотрен случай захвата автобусной компанией всего рынка – минус 5 баллов;
2) не проверено, что максимальная прибыль неотрицательна – минус 1 балл;
3) не проверено, что прибыль максимальна (не указано, что парабола с ветвями вниз – минус 1 балл;
- (б) 1) не проверено, что максимальная прибыль неотрицательна – минус 1 балл;
2) не проверено, что прибыль максимальна (не указано, что парабола с ветвями вниз – минус 1 балл;

Задание 5 (16 баллов)

Предприниматель планирует привлечь заемные средства на закупку оборудования для модернизации действующего производства и освоения новых видов продукции. Предприниматель имеет возможность взять кредит в банке на рыночных условиях, либо в центре поддержки предпринимательства (ЦПП), который субсидируется государством и предоставляет кредиты на льготных условиях обслуживания и возврата. Банк принимает решение о выдаче кредита по итогам оценки качества обеспечения. ЦПП принимает решения о выдаче кредита по итогам оценки качества его обеспечения, а также экспертизы бизнес плана и финансовой модели проекта.

Предположим, что оборудование может быть приобретено и установлено в день принятия решения о выдаче кредита, а предприниматель может начать производство на его основе немедленно после установки. Кроме того, залог приобретаемого за счет средств кредита оборудования является достаточным обеспечением по кредиту как для банка, так и для ЦПП.

Охарактеризуйте не менее четырех факторов, на основе которых предприниматель принимает решение о выборе кредитной организации. Какие особенности коммерческой деятельности делают предпочтительным обращение в банк?

Решение:

Факторы:

- 1) Шанс получить кредит – лучше банк (выдаст в любом случае, а ЦПП только если БП и ФМ будут признаны удовлетворительными);
- 2) Время выдачи кредита – лучше банк (затраты времени на подготовку БП и ФМ + меньший срок принятия решения о выдаче кредита);
- 3) Дополнительные расходы – лучше банк (затраты на подготовку БП и ФМ);

- 4) Процентная ставка – лучше (ниже) ЦПП;
- 5) Период возврата кредита – лучше (продолжительнее) ЦПП;
- 6) Период отсрочки платежа (grace period) – лучше (продолжительнее) ЦПП.

Банк предпочтительнее для предпринимателей, для которых:

- а) высока ценность начального периода времени, потери времени на старте являются более важными, чем увеличение затрат в процесс хозяйственной деятельности;
- б) дополнительные расходы на финансовую модель невелики относительно масштабов коммерческой деятельности.

Критерии:

по 3 балла за указанный фактор, по 2 балла за особенность

Задание 6 (16 баллов)

В Галактической Республике затраты на финансирование армии клонов легли на Совет Джедаев, который взяли на себя обязанности оплатить создание клонов за счет дополнительного равного сбора налогов с систем:

$\Delta G = \Delta T = 175$, где T – налоги, G – государственные расходы.

(а) Охарактеризуйте вид политики, который включает в себя подобные действия Совета.

(б) Какое воздействие окажет такая политика на совокупный спрос в Республике? Объясните.

(в) Видные ученые королевской Академии Наук Набу уверены, что предельная норма потребления в Республике равна 0.8. Рассчитайте изменение совокупного выпуска экономики Республики сначала за счет увеличения государственных расходов, а затем за счет соответствующего увеличения налогов. Найдите, чему в этом случае равен мультипликатор экономической политики и объясните полученный результат.

Решение:

(а) Так как в качестве инструментов политики используются государственные закупки и налоги, речь идет о фискальной (бюджетно-налоговой политике). Поскольку $\Delta G = \Delta T$, то описанная в условии задания политика является политикой сбалансированного бюджета (согласно кейнсианской модели).

(б) В кейнсианской модели экономики политика сбалансированного бюджета с увеличением гос. закупок является стимулирующей, приводит к росту выпуска. То есть, согласно этой модели, имеет место увеличение спроса за счет роста гос. закупок и уменьшение за счет падения потребления, но потребление падает меньше, так как предельная норма потребления $MPC < 1$.

(в) В рамках кейнсианской экономической модели

$Y = C + I + G$, где I - инвестиции, $C = a + b(Y - T)$ – потребление, a - автономное потребление, b - MPC – предельная норма потребления. Тогда, используя кейнсианские мультипликаторы государственных расходов и налогов, которые в сумме дают единицу, получаем

$$\Delta Y(G) = \Delta G * mult_G = 175 * \frac{1}{1-0,8} = 875, \text{ поскольку } MPC=0,8 \text{ и } mult_G = \frac{1}{1-MPC}.$$

$$\Delta Y(T) = \Delta T * mult_T = 175 * \frac{-0,8}{1-0,8} = -700, \text{ поскольку } MPC=0,8 \text{ и } mult_T = \frac{-MPC}{1-MPC}.$$

$$\Delta Y = \Delta Y(G) + \Delta Y(T) = 875 - 700 = 175 = \Delta G = \Delta T \text{ и } .$$

Таким, образом, выпуск растёт на величину роста гос. закупок, как мы и заметили в п. б).

Критерии:

(а) Полное верное решение – **4 балла**.

(б) **4 балла за пункт**, если приведено полное верное решение.

1 балл за пункт, если дан верный ответ, но отсутствует объяснение направления изменения совокупного спроса.

(в) **8 баллов**, если приведено полное верное решение.

Из них при верном в целом решении

3 балла за верный подсчет изменения совокупного выпуска за счет увеличения государственных расходов,

3 балла за верный подсчет изменения совокупного выпуска за счет увеличения налогов,

2 балла за верно сделанный вывод.

Штрафы при верном в целом ходе решения:

минус 1 балл за каждую арифметическую ошибку, если она не привела к концептуально неверному результату.

минус 6 баллов (от полного балла за пункт) за арифметическую ошибку/ошибки, если они привели к концептуально неверному результату.

Задание 7 (16 баллов)

В стране Справедливой проживает три типа людей: бедные, которые получают 10% от общего дохода, богатые, которые получают 50% от общего дохода, и середняки, которые имеют остальную часть общего дохода. В каждой группе населения все жители получают одинаковый доход. Бедных в стране столько же, сколько и богатых, а доля середняков составляет 40% от населения страны. Такая ситуация в Справедливой сложилась после мирового экономического кризиса. Чтобы уменьшить степень неравенства доходов в этой стране, правительство приняло решение ввести для каждого жителя из группы богатых подоходный налог в размере $T\%$, сборы от которого полностью перечисляются в виде субсидии бедным. Субсидия равномерно распределяется между всеми жителями бедной группы населения, причем в результате доход каждого жителя из бедной группы населения должен быть равен доходу каждого жителя из группы середняков.

(а) Найдите величину T .

(б) На сколько после проведения такой политики изменится измеренная с помощью коэффициента Джини степень неравенства доходов в стране Справедливой?

(в) Верно ли, что если в стране нет абсолютного равенства доходов, то всегда найдется такая ставка T подоходного налога для богатых, которая позволит сравнять доходы бедных и середняков? Ответ обоснуйте.

Решение:

(а) Пусть M - совокупный доход страны. Тогда богатые получают $0,5M$, бедные – $0,1M$, а середняки – $(1-0,1-0,5)M=0,4M$.

Доля середняков в стране составляет $0,4$, тогда доля бедных, которая равна доле богатых, равна $(1-0,4)/2=0,3$.

После применения политики перераспределения доходов совокупный доход богатой группы населения сократится на величину $0,5 \cdot T \cdot M / 100$, а доход бедной группы увеличится на эту величину. Поскольку после применения этой политики доход каждого жителя из бедной группы станет равным доходу середняка, то $(0,1M + 0,5 \cdot T \cdot M / 100) / 0,3 = 0,4M / 0,4$.

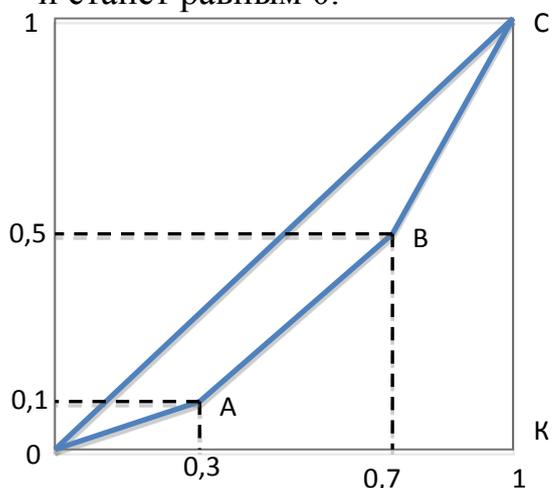
Откуда находим $T=40\%$.

Таким образом, после перераспределения доходов совокупный доход бедной группы населения станет равным $0,1M + 0,5 \cdot 40 \cdot M / 100 = 0,3M$. Легко заметить, что совокупный доход богатых, которых столько же, сколько и бедных, окажется таким же: $0,5M(1 - T/100) = 0,3M$. А это означает, что подобная политика приведет к абсолютному равенству доходов в стране.

(б) Коэффициент Джини для исходной ситуации рассчитаем как отношение площади четырехугольника ОСВА к площади треугольника ОСК.

Вычисленный таким образом коэффициент Джини равен $0,28$.

Как уже было показано в п. а), после перераспределения доходов страна достигнет абсолютного равенства в доходах, поэтому коэффициент Джини уменьшится на $0,28$ и станет равным 0 .



(в) Утверждение п. в) задачи неверно. Интуитивно понятно, что если численность бедных высока по сравнению с остальными жителями страны, а доля доходов страны, которую они получают низкая, то даже если богатые отдадут все свои доходы бедным, доходы бедных могут не сравняться с доходами середняков.

Например, если доля бедных составляет 70% населения и получают они 10% совокупного дохода страны, а доля богатых, которые получают 40% доходов, составляет 10% населения, то доходов всех богатых не хватит для того, чтобы доходы бедных сравнялись с доходами середняков.

Критерии:

(а) Всего 5 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за верный подход к поиску T при перераспределении доходов.

2 балла за верно найденное значение T .

(б) Всего 6 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за верно найденный коэффициент Джини до перераспределения доходов.

2 балла за верно найденный коэффициент Джини после перераспределения доходов.

1 балл за верно найденную разницу между коэффициентами.

(в) Всего 5 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за интуитивное обоснование того, что утверждение неверно. Если при этом дан верный ответ без обоснования, то баллы не выставляются.

2 балла за пример, подтверждающий, что утверждение неверное.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации**

Олимпиада школьников РАНХиГС по Экономике

2017 - 2018 учебный год

Очный этап

10 - 11 классы

Вариант 2

Задание 1 (12 баллов)

На закрытой прямоугольной территории крупного предприятия размером 140x120 м предприниматель предлагает установить ларек по продаже кофе и выпечки. Ларек имеет форму цилиндра с радиусом основания 5 м. На заводской территории имеется три вида строений: девять строений размером 20x20 м, три 40x10 м и два круглых строения 10 м в основании. Руководство завода отказывает предпринимателю в установке ларька, аргументируя отказ исключительно отсутствием площади для его установки. Докажите, что необходимая площадь имеется, расположение уже стоящих зданий не влияют на наличие данной площади.

Решение:

Решение основано на принципе Дирихле. Оценим размер площади, на которой не может быть установлен ларек. Центр ларька должен находиться не ближе чем 5 м от строений и забора. Дадим «грубый зазор» в 10 м.

Тогда: строения 20x20 дадут запретную площадь $30 \times 30 = 900 \text{ м}^2$, таких девять, т.е. 8100 м^2 .

Аналогично второй тип строений $50 \times 20 \times 3 = 3000 \text{ м}^2$, круглое строение дает по $15^2 \times \pi = 225 \times 3,14$ около 707 м^2 . и того таких два, т.е. 1414 м^2

Забор: $140 \times 120 - 130 \times 110 = 16800 - 14300 = 2500 \text{ м}^2$

Итого: $8100 + 3000 + 2500 + 1414 = 15014$

$16800 - 15014 = 1786 \text{ м}^2$, в любой точке данной площади можно установить ларек. А если какие-то здания находятся друг от друга ближе, чем в 10 метрах, то и того больше. Ч.т.д

Критерии*:

1. Дано полное обоснование, дан пример возможной установки, есть указание на то, что расположение построенных зданий не имеет значения для доказательства – до 12 баллов
2. Были попытки решения и отдельные верные логические выкладки – до 2 баллов
3. В остальных случаях - 0 баллов

***Важно: численная оценка свободной площади (решение) не является единственно возможной, например «зазор» может быть и более 10 м.**

Задание 2 (12 баллов)

Крокодил Гена и старуха Шапокляк заключили фьючерсную сделку, согласно которой Гена согласился вложить в 1-ый проект сумму, равную $p_1 > 0$ тыс. руб., а через год получить за это x_1 тыс. руб. так, что

$$4x_1 - 3p_1 - 44 = 0,$$

и при этом Гена согласился вложить во 2-ой проект сумму, равную $p_2 > 0$ тыс. руб., а через год получить за это x_2 тыс. руб. так, что

$$p_2^2 - 12p_2 + x_2^2 - 8x_2 + 43 = 0.$$

Согласно условию сделки параметры p_1, x_1, p_2, x_2 были подобраны так, чтобы величина

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}$$

была минимально возможной. Определить:

- 1) минимальное значение величины d ;
- 2) является ли сделка выгодной для Гены? Найти величину прибыли или убытка Гены при согласии на данную сделку.

Решение:

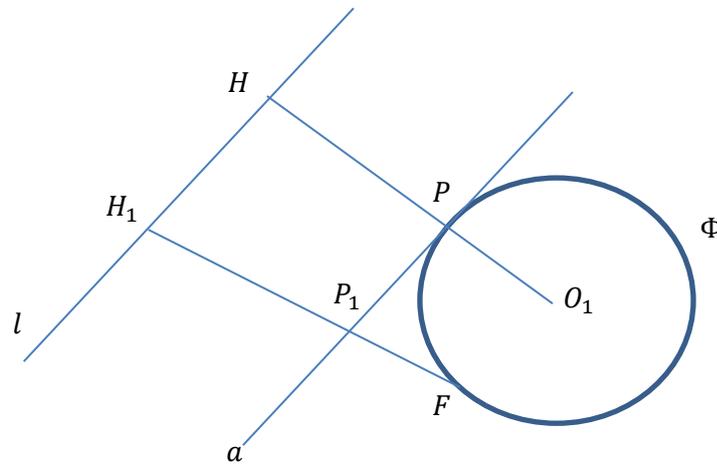
1) Ясно, что выражение $4x_1 - 3p_1 - 44 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}p + 11$ задает уравнение некоторой прямой l в плоскости xOp . Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} p^2 - 12p + x^2 - 8x + 43 = 0 &\Leftrightarrow (p - 6)^2 + (x - 4)^2 - 36 - 16 + 43 = 0 \\ &\Leftrightarrow (p - 6)^2 + (x - 4)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Оно задает в плоскости xOp уравнение окружности Φ с центром в точке $(6; 4)$ радиуса 3. Тогда число выражение вида

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}$$

задает расстояние между точками, лежащими на l и Φ . Потому согласно условию задачи требуется найти наименьшее расстояние между точками, лежащими на



прямой и на окружности. Пусть O_1H – перпендикуляр из центра окружности O_1 на прямую l , тогда O_1P – радиус окружности. Покажем, что $HP = O_1H - O_1P$ есть искомая величина. Действительно, пусть $H_1 \in l, F \in \Phi$. Проведем касательную a к окружности в точке P . Радиус O_1P , проведенный в точку касания, перпендикулярен a . Поэтому $a \parallel l$. И следовательно, HP равно расстоянию между параллельными прямыми. Теперь имеем:

$$H_1F = H_1P_1 + P_1F \geq H_1P_1 \geq HP.$$

Стало быть, HP кратчайшее расстояние между точками окружности и прямой l . Найдем O_1H по формуле расстояния от точки до прямой (один из способов нахождения):

$$O_1H = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 - 44|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{46}{5} = 9,2.$$

Отсюда $HP = 9,2 - 3 = 6,2$.

2) Зададим уравнение прямой O_1H . Поскольку она перпендикулярна прямой l и проходит через точку $O_1(6; 4)$, постольку ее уравнение в плоскости xOp имеет вид

$$x = -\frac{4}{3}(p - 6) + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}p + 12.$$

Найдем координаты точки H как координаты точки пересечения прямых l и O_1H . Составим уравнение:

$$-\frac{4}{3}p + 12 = \frac{3}{4}p + 11 \Leftrightarrow p = \frac{12}{25} = 0,48.$$

Отсюда $p_1 = 0,48$ и $x_1 = \frac{3}{4}p_1 + 11 = 11,36$.

Найдем координаты точки P как координаты точки пересечения прямой O_1H и окружности Φ :

$$(p - 6)^2 + \left(-\frac{4}{3}p + 12 - 4\right)^2 = 3^2.$$

Получим два решения $p = \frac{39}{5}$ и $p = \frac{21}{5}$. Поскольку точка P лежит левее точки O_1 , постольку окончательно $p_2 = \frac{21}{5} = 4,2$. Отсюда $x_2 = 6,4$.

Преимущество от сделки составит:

$$x_1 + x_2 - p_1 - p_2 = 11,36 + 6,4 - 0,48 - 4,2 = 13,08.$$

Значит, сделка для крокодила Гены выгодна и прибыль составит 13080 руб.

Ответ: 1) 6,2. 2) выгодна, прибыль 13080 руб.

Критерии:

1. Корректное обоснование того, что отрезок HP есть кратчайшее расстояние от окружности до прямой $3x - 4p - 30 = 0$ – до 3-х баллов.
2. Нахождение длины отрезка HP (ответа на первый пункт задачи) – до 3-х баллов.
3. Обоснованное нахождение x_1, x_2, p_1, p_2 и получение верного ответа на второй пункт задачи – до 6 баллов.

Задание 3 (12 баллов)

Найдите два целых числа A и B , расположенных на числовой прямой на расстоянии 1 друг от друга, и обладающих следующим свойством: корень уравнения $x^3 + 5x^2 - 3x + 1 = 0$ принадлежит интервалу (A, B) .

Решение:

См. вариант 1

Ответ:

-6, -5

Критерии:

1. Проверены возможные рациональные корни уравнения $(+1)$ – 3 балла
2. Определено преобразование функции с тремя рациональными корнями, к исходной функции – 3 балла
3. Оценены величины A и B . Дан верный арифметический ответ – 6 баллов
4. Замечание: представлен иной обоснованный алгоритм получения верного значения A и B . (Например, использована теорема Больцано-Коши или оценены точки экстремума функции, далее метод перебора) – 12 баллов

Задание 4 (16 баллов)

В небольшом городке действует только одна автобусная компания, которая возит людей до крупного районного центра. Также в городке есть станция тупиковой железнодорожной линии, от которой в настоящий момент ходят электрички в тот же центр. Совокупный спрос на объемы перевозок на автобусе и на электричке определяются в соответствии с функцией $q(p) = 4200 - 100p$, где p - минимальная из цен на проезд до центра и обратно в автобусе или электричке, q - количество желающих совершить поездку при цене p .

Известно, что перевозки по железной дороге регулируются государством, поэтому цена на проезд в оба конца в электричке фиксирована и составляет 4 у.е. Однако электричкой может быть перевезено не более 800 человек.

(а) Какую цену установит за проезд автобусная компания, если ее издержки перевозки любого числа пассажиров в количестве y составляют $TC(y) = 10y + 225$?

(б) В городке ходят слухи, что из-за убыточности железнодорожных перевозок железнодорожная станция скоро закроется, из-за чего выбраться в центр (и вернуться обратно) можно будет только на автобусе. Как изменится в этом случае общее число перевозимых пассажиров?

Решение:

(а) Поскольку потребители выбирают проезд тем средством, которым дешевле, то может быть два варианта: 1) электричкой воспользуется максимально возможное число пассажиров по цене 4 у.е., на оставшемся спросе автобусная компания будет монополистом и назначит цену больше 4 у.е.; 2) автобусная компания будет работать на всем спросе, установив цену не больше 4 у.е. Автобусная компания выберет тот вариант, при котором ее прибыль будет больше.

Предположим, что она выберет первый вариант. Тогда остаточный спрос составит $q^{\text{ост}}(p) = 4200 - 100p - 800 = 3400 - 100p$. Прибыль автобусной компании составит тогда $\pi = p(3400 - 100p) - 10(3400 - 100p) - 225 = 4400p - 100p^2 - 34225$. Это парабола с ветвями вниз имеет максимум в $p = 22 > 4$. Прибыль будет равна $\pi = (3400 - 100p)(p - 10) - 225 = (3400 - 100 \cdot 22)12 - 225 = 100 \cdot 12^2 - 225$.

Если же фирма захочет привлечь всех пассажиров, то лучший для нее исход, когда при цене 4 ее выберут все пассажиры. Однако в этом случае ее прибыль будет отрицательной $\pi = (3400 - 100p)(p - 10) - 225 = (3400 - 100 \cdot 4)(4 - 10) - 225 < 0$.

Таким образом, автобусной компании выгодно позволить перевезти железной дороге 800 пассажиров и назначить цену 22.

(б) Если автобусная компания станет обычным монополистом, то ее прибыль будет равна $\pi = (4200 - 100p)(p - 10) - 225 = 5200p - 100p^2 - 42225$. Максимум этой параболы с ветвями вниз находится в точке $p = 26$. Заметим, что прибыль при

этой цене положительна. При данной цене компания перевезет 1600 пассажиров, а ранее – 1200 пассажиров. Таким образом, в результате закрытия железной дороги совокупное число перевозимых пассажиров снизится на $800+1200-1600=400$ пассажиров.

Критерии:

- (а) 1) не рассмотрен случай захвата автобусной компанией всего рынка – минус 5 баллов;
2) не проверено, что максимальная прибыль неотрицательна – минус 1 балл;
3) не проверено, что прибыль максимальна (не указано, что парабола с ветвями вниз – минус 1 балл;
- (б) 1) не проверено, что максимальная прибыль неотрицательна – минус 1 балл;
2) не проверено, что прибыль максимальна (не указано, что парабола с ветвями вниз – минус 1 балл;

Задание 5 (16 баллов)

Предприниматель планирует привлечь заемные средства на закупку оборудования для модернизации действующего производства и освоения новых видов продукции. Предприниматель имеет возможность взять кредит в банке на рыночных условиях, либо в центре поддержки предпринимательства (ЦПП), который субсидируется государством и предоставляет кредиты на льготных условиях обслуживания и возврата. Банк принимает решение о выдаче кредита по итогам оценки качества обеспечения. ЦПП принимает решения о выдаче кредита по итогам оценки качества его обеспечения, а также экспертизы бизнес плана и финансовой модели проекта.

Предположим, что оборудование может быть приобретено и установлено в день принятия решения о выдаче кредита, а предприниматель может начать производство на его основе немедленно после установки. Кроме того, залог приобретаемого за счет средств кредита оборудования является достаточным обеспечением по кредиту как для банка, так и для ЦПП.

Охарактеризуйте не менее четырех факторов, на основе которых предприниматель принимает решение о выборе кредитной организации. Какие особенности коммерческой деятельности делают предпочтительным обращение в банк?

Решение:

Факторы:

- 1) Шанс получить кредит – лучше банк (выдаст в любом случае, а ЦПП только если БП и ФМ будут признаны удовлетворительными);
- 2) Время выдачи кредита – лучше банк (затраты времени на подготовку БП и ФМ + меньший срок принятия решения о выдаче кредита);
- 3) Дополнительные расходы – лучше банк (затраты на подготовку БП и ФМ);
- 4) Процентная ставка – лучше (ниже) ЦПП;

- 5) Период возврата кредита – лучше (продолжительнее) ЦПП;
6) Период отсрочки платежа (grace period) – лучше (продолжительнее) ЦПП.

Банк предпочтительнее для предпринимателей, для которых:

- а) высока ценность начального периода времени, потери времени на старте являются более важными, чем увеличение затрат в процесс хозяйственной деятельности;
б) дополнительные расходы на финансовую модель невелики относительно масштабов коммерческой деятельности.

Критерии: по 3 балла за указанный фактор, по 2 балла за особенность

Задание 6 (16 баллов)

В Галактической Республике затраты на финансирование армии клонов легли на Совет Джедаев, который взял на себя обязанности оплатить создание клонов за счет дополнительного равного сбора налогов с систем:

$\Delta G = \Delta T = 220$, где T – налоги, G – государственные расходы.

(а) Охарактеризуйте вид политики, который включает в себя подобные действия Совета.

(б) Какое воздействие окажет такая политика на совокупный спрос в Республике? Объясните.

(в) Видные ученые королевской Академии Наук Набу уверены, что предельная норма потребления в Республике равна 0.6. Рассчитайте изменение совокупного выпуска экономики Республики сначала за счет увеличения государственных расходов, а затем за счет соответствующего увеличения налогов. Найдите, чему в этом случае равен мультипликатор экономической политики и объясните полученный результат.

Решение:

(а) Так как в качестве инструментов политики используются государственные закупки и налоги, речь идёт о фискальной (бюджетно-налоговой политике). Поскольку $\Delta G = \Delta T$, то описанная в условии задания политика является политикой сбалансированного бюджета (согласно кейнсианской модели).

(б) В кейнсианской модели экономики политика сбалансированного бюджета с увеличением гос. закупок является стимулирующей, то есть приводит к росту выпуска. То есть, согласно этой модели, имеет место увеличение спроса за счет роста гос. закупок и уменьшение за счет падения потребления, но потребление падает меньше, так как предельная норма потребления $MPC < 1$.

(в) В рамках кейнсианской экономической модели

$Y = C + I + G$, где I - инвестиции, $C = a + b(Y - T)$ – потребление, a - автономное потребление, b - MPC – предельная норма потребления. Тогда, используя кейнсианские мультипликаторы государственных расходов и налогов, которые в сумме дают единицу, получаем

$$\Delta Y(G) = \Delta G * mult_G = 220 * \frac{1}{1-0,6} = 550, \text{ поскольку } MPC=0,6 \text{ и } mult_G = \frac{1}{1-MPC}.$$

$$\Delta Y(T) = \Delta T * mult_T = 220 * \frac{-0,6}{1-0,6} = -330, \text{ поскольку } MPC=0,6 \text{ и } mult_T = \frac{-MPC}{1-MPC}.$$
$$\Delta Y = \Delta Y(G) + \Delta Y(T) = 550 - 330 = 220 = \Delta G = \Delta T \text{ и } mult_{\text{баланс}} = 1.$$

Таким, образом, выпуск растёт на величину роста гос. закупок, как мы и заметили в п. б).

Критерии:

(а) Полное верное решение – **4 балла**.

(б) **4 балла за пункт**, если приведено полное верное решение.

1 балл за пункт, если дан верный ответ, но отсутствует объяснение направления изменения совокупного спроса.

(в) **8 баллов**, если приведено полное верное решение.

Из них при верном в целом решении

3 балла за верный подсчет изменения совокупного выпуска за счет увеличения государственных расходов,

3 балла за верный подсчет изменения совокупного выпуска за счет увеличения налогов,

2 балла за верно сделанный вывод.

Штрафы при верном в целом ходе решения:

минус 1 балл за каждую арифметическую ошибку, если она не привела к концептуально неверному результату.

минус 6 баллов (от полного балла за пункт) за арифметическую ошибку/ошибки, если они привели к концептуально неверному результату.

Задание 7 (16 баллов)

В стране Справедливой проживает три типа людей: бедные, которые получают 10% от общего дохода, середняки, которые получают 30% от общего дохода, и богатые, которые получают остальную часть совокупного дохода. В каждой группе населения все жители получают одинаковый доход. Богатых в стране столько же, сколько и середняков, а доля бедных составляет 40% от населения страны. Такая ситуация в Справедливой сложилась после мирового экономического кризиса. Чтобы уменьшить степень неравенства доходов в этой стране, правительство приняло решение ввести для каждого жителя из группы богатых подоходный налог в размере $T\%$, сборы от которого полностью перечисляются в виде субсидии бедным. Субсидия равномерно распределяется между всеми жителями бедной группы населения, причем в результате доход каждого жителя из бедной группы населения должен быть равен доходу каждого жителя из группы середняков.

(а) Найдите величину T .

(б) На сколько после проведения такой политики изменится измеренная с помощью коэффициента Джини степень неравенства доходов в стране Справедливой?

(в) Верно ли, что если в стране нет абсолютного равенства доходов, то всегда найдется такая ставка T подоходного налога для богатых, которая позволит сравнять доходы бедных и середняков? Ответ обоснуйте.

Решение:

(а) Пусть M - совокупный доход страны. Тогда бедные получают $0,1M$, середняки – $0,3M$, а богатые – $(1-0,1-0,3)M=0,6M$.

Доля бедных в стране составляет $0,4$, тогда доля середняков, которая равна доле богатых, равна $(1-0,4)/2=0,3$.

После применения политики перераспределения доходов совокупный доход богатой группы населения сократится на величину $0,6 \cdot T \cdot M / 100$, а доход бедной группы увеличится на эту величину. Поскольку после применения этой политики доход каждого жителя из бедной группы станет равным доходу середняка, то $(0,1M + 0,6 \cdot T \cdot M / 100) / 0,4 = 0,3M / 0,3$.

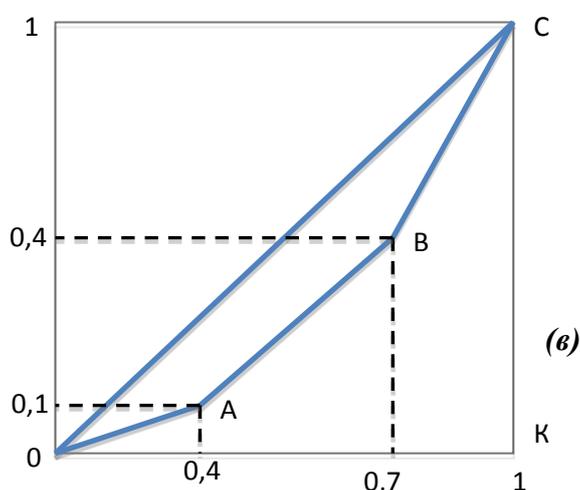
Откуда находим $T=50\%$.

Таким образом, после перераспределения доходов совокупный доход бедной группы населения станет равным $0,1M + 0,6 \cdot 50 \cdot M / 100 = 0,4M$. Легко заметить, что совокупный доход богатых, которых столько же, сколько и середняков, окажется таким же, как у середняков: $0,6M(1 - T/100) = 0,3M$. А это означает, что подобная политика приведет к абсолютному равенству доходов в стране.

(б) Коэффициент Джини для исходной ситуации рассчитаем как отношение площади четырехугольника ОСВА к площади треугольника ОСК.

Вычисленный таким образом коэффициент Джини равен $0,39$.

Как уже было показано в п. а), после перераспределения доходов страна достигнет абсолютного равенства в доходах, поэтому коэффициент Джини уменьшится на $0,39$ и станет равным 0 .



Утверждение п. в) задачи неверно. Интуитивно понятно, что если численность бедных высока по сравнению с остальными жителями страны, а доля доходов страны, которую они получают низкая, то даже если богатые отдадут все свои доходы бедным, доходы бедных могут не сравняться с доходами середняков.

Например, если доля бедных составляет 70% населения и получают они 10% совокупного дохода страны, а доля богатых, которые получают 40% доходов, составляет 10% населения, то доходов всех богатых не хватит для того, чтобы доходы бедных сравнялись с доходами середняков.

Критерии:

(а) Всего 5 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за верный подход к поиску T при перераспределении доходов.

2 балла за верно найденное значение T .

(б) Всего 6 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за верно найденный коэффициент Джини до перераспределения доходов.

2 балла за верно найденный коэффициент Джини после перераспределения доходов.

1 балл за верно найденную разницу между коэффициентами.

(в) Всего 5 баллов за полное верное обоснованное решение.

Из них

3 балла за интуитивное обоснование того, что утверждение неверно. Если при этом дан верный ответ без обоснования, то баллы не выставляются.

2 балла за пример, подтверждающий, что утверждение неверное.