

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по экономике
2016-2017 учебный год
Очный этап
10-11 классы**

Вариант № 1

Задача 1

Дед Мороз составляет подарки детям на Новый год. В его шкафу подарков пять полок и на каждой полке находится n различных предметов. Дед мороз берет любой из предметов с первой полки, затем со второй, третьей, четвертой и пятой. Получается один набор предметов, который задаёт один подарок. Дед мороз посчитал все возможные варианты подарков и выяснил, что из этого количества придётся убрать n вариантов, которые не заказали дети в своих письмах. Докажите, что общее число вариантов, которые он придумал можно разделить на 30 при любом изначальном n .

Решение:

Число вариантов простым подсчетом $n^5 - n$. Разложим на множители. $n^5 - n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)n$. Это произведение трех последовательных чисел n , $n+1$, $n-1$ и числа $n^2 + 1$. Следовательно, делимость на 2 и 3 очевидна. Для доказательства делимости на 5 рассмотрим все возможные последние цифры в записи этого числа и убедимся что число кратно 5.

Ответ: обоснованное доказательство

Задача 2

В некотором городе строят новую ветку метро. На строительство первой станции департамент строительства потратил 3 млн. у.е. Вторая станция, с учётом сложности прокладки коммуникаций, стоила 5 млн. у.е. Известно, что из-за сложности технологии строительства строительство n -ой станции связано со строительством двух предыдущих следующим линейным соотношением $F(n) = 2(1,5F(n-1) - F(n-2))$. Известно, что в бизнес плане расходы на строительство всей ветки больше одного миллиарда у.е. Сколько минимум станций планируется в этой ветке метро с учетом бюджета?

Решение:

Уравнение рекурсии $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ следовательно характеристическое уравнение имеет корни 1 и 2, и общее решение представимо в виде: $y = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n$ с учетом начальных условий $C_1 = C_2 = 1$. Тогда для строительства n станций метро необходимо $n + 2(2^n - 1)$, по условию эта величина больше 1000 млн, следовательно минимальное натуральное n при котором соотношение будет выполнено это 9.

Ответ: 9

Задача 3

В прямоугольный треугольник ABC вписан прямоугольник $CDEF$, точка D лежит на катете AC , точка F лежит на катете BC , точка E лежит на гипотенузе AB . Известно, что площадь этого прямоугольника имеет наибольшее возможное значение среди площадей прямоугольников, вписанных указанным образом в треугольник ABC . Найти наибольшую возможную величину площади треугольника ABC при условии, что $CE = 2\sqrt{2}$.

Решение:

Точка $E(x, y)$ лежит на прямой AB , уравнение которой имеет вид $x/a + y/b = 1$. Ищем наибольшее возможное значение среди площадей прямоугольников, т.е. максимум функции $xy = x(b - vx/a)$. Он достигается в вершине параболы с координатами $x = a/2$, $y = b/2$. При этом имеем $CE^2 = x^2 + y^2 = 8$. Площадь треугольника ABC равна $2xy$. Имеем верхнюю оценку для площади треугольника ABC : $2xy \leq x^2 + y^2$ (и эта оценка достижима при $x = y$). Таким образом, наибольшая возможная величина площади треугольника ABC равна $2xy \leq x^2 + y^2 = 8$.

Ответ: 8.

Задача 4

Магистр Мария считает, что пришла пора самостоятельно заниматься своими финансами, поэтому решает, как распланировать свои расходы на ближайшие два года. Она рассчитала, что к моменту начала 2018 года у нее не будет ни долгов, ни сбережений. Ее фиксированный доход в 2018 году составит 600 тыс. у.е., а в 2019-м — 347,5 тыс. у.е. Марии каждый год необходимо выплачивать государству налоги в размере 20% от фиксированного годового дохода. Она может потратить в 2018 году весь свой располагаемый годовой доход на потребление товаров и услуг, может сберечь любую его часть, поместив деньги в банк на депозит под 15% годовых (закрывать вклад и получить средства можно только в 2019 г), или же может потратить больше, чем ее располагаемый

годовой доход, взяв кредит под 30% годовых, вернуть который по условиям договора можно только в 2019 г. Поскольку Мария не имеет кредитной истории, максимальный объем кредита, который могут предоставить для нее банки, составляет 100 тыс. у.е. Иных возможностей сберечь деньги, получить доход или взять кредит у Марии нет, доход вкладчиков от размещения депозитов налогом не облагается, а инфляция отсутствует.

(а) Обозначьте сумму денег, которую Мария может потратить на потребление товаров и услуг в 2018 и в 2019 годах как C_{18} и C_{19} соответственно. Считайте, что все проценты по кредитам/депозитам начисляются лишь один раз на тело кредитов/депозитов. Если Мария планирует разместить деньги на депозите, то какую максимальную сумму денег C_{19} в зависимости от величины C_{18} она сможет потратить на товары и услуги в 2019 г? Если Мария планирует взять кредит, то какую максимальную сумму денег C_{19} в зависимости от C_{18} она сможет потратить на товары и услуги в 2019 г? Считайте также, что Мария не может одновременно брать кредит и размещать депозит в банке.

(б) Предположим, Мария уверена, что на товары и услуги в 2018 и в 2019 годах ей следует тратить одинаковую сумму денег. Найдите эту сумму. Будет ли девушка брать кредит в банке или разместит депозит?

(в) Рассмотрите экономику страны Потребляндия, в которой живет множество таких же жителей, как Мария. Политика, проводимая центральным банком этой страны, не влияет на доходы жителей, однако может воздействовать на процентные ставки по кредитам и депозитам. Центральный банк Потребляндии хотел бы стимулировать уровень частных сбережений ее граждан в будущем, увеличив его на 10% по сравнению с тем уровнем сбережений, который наблюдается при нынешних процентных ставках. Следует ли Центральному банку для достижения этой цели увеличить или уменьшить ставку процента по депозитам? До какого уровня? Дайте содержательную интерпретацию полученного результата.

Решение и критерии проверки:

(а) После вычета налогов фиксированный доход в 2018 г составит $600 \cdot 0,8 = 480$ тыс. у.е., а в 2019 г – $347,5 \cdot 0,8 = 278$ тыс. у.е. **(1 балл)**

Если Мария планирует разместить деньги на депозите, то максимальная сумма денег C_{19} в зависимости от величины C_{18} выражается следующим образом:

$C_{19} = (480 - C_{18}) \cdot 1,15 + 278$, причем $C_{18} < 480$, если сумма депозита положительна. Или после преобразований: $C_{19} = 830 - 1,15C_{18}$, где $C_{18} < 480$. **(2 балла)**

Если Мария планирует взять деньги в кредит, то максимальная сумма денег C_{19} в зависимости от величины C_{18} выражается следующим образом:

$C_{19} = 278 - (C_{18} - 480) * 1,3$, причем $0 < C_{18} - 480 \leq 100$, если сумма кредита положительна и по условию задачи максимальный объем кредита составляет 100 тыс. у.е. Или после преобразований: $C_{19} = 902 - 1,3C_{18}$, где $480 < C_{18} \leq 580$. **(2 балла)**

(б) Поскольку сумма расходов в каждый год должна быть одинакова, а в 2018 г доход Марии больше, чем в 2019 г, то для достижения равных расходов ей придется положить деньги на депозит в 2018 г и получить их с депозита в 2019 г. **(1 балл)**

Чтобы найти необходимую сумму, следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_{19} = 830 - 1,15C_{18} \\ C_{19} = C_{18} \end{cases}, \text{ откуда находим } C_{19} = C_{18} \approx 386,05. \text{ **(4 балла)**}$$

(в) (всего 6 баллов за пункт) Обозначим искомую ставку процента (в долях) за r , где $0 < r < 1$. Тогда максимальная сумма денег C_{19} в зависимости от величины C_{18} выражается следующим образом:

$C_{19} = (480 - C_{18}) * (1 + r) + 278$, причем $C_{18} < 480$, поскольку сумма депозита положительна. Так как по условию задачи все жители страны в каждый период тратят на потребление одинаковую сумму денег, то $C_{19} = C_{18} = (480 * (1 + r) + 278) / (2 + r)$.

$$\text{Сумма, размещенная на депозите равна } 480 - C_{18} = 480 - \frac{480*(1+r)+278}{2+r} = \frac{202}{2+r}.$$

Таким образом, можно заметить, что для увеличения уровня сбережений необходимо снизить ставку процента по депозиту. **(верно обосновано это утверждение 3 балла)**

Чтобы найти искомую ставку процента, необходимо решить уравнение:

$$\frac{202}{2+r} = \frac{202*1,1}{2+0,15}, \text{ где слева от знака равенства – сумма сбережений при искомой}$$

(произвольной) ставке процента, а справа – сумма сбережений при ставке процента 15%, которая увеличена на 10%. Легко заметить, что даже нулевая ставка процента (т.е. ситуация, при которой банк не платит клиенту за использование его средств) не позволит увеличить сбережения жителя на 10%. То есть, такой ставки процента, которая позволит увеличить сбережения на 10%, в данном случае не существует. Однако можно увидеть, что незначительный рост сбережений (менее чем на 7,5%) все же возможен и для этого необходимо ставку процента по депозиту снизить. **(1 балл)**

Действительно, такая ситуация возникает из-за того, что при снижении ставки процента житель становится «беднее» (снижается его покупательная способность), так как на каждую вложенную на депозит денежную единицу он будет получать меньше процентных доходов. Это побуждает жителя снижать расходы на потребление в обоих периодах, поскольку по условию они должны быть равны. Таким образом, расходы на потребление в 2018 г снижаются, в то время как фиксированный доход жителя остается неизменным, следовательно, сбережения увеличиваются. **(верная содержательная интерпретация 2 балла)**

Задача 5

Перспективный предприниматель Аркадий может изготовить 4 литра лимонада за один час либо 1 банку лимонного варенья за 30 минут. Альтернативные издержки производства любого из этих продуктов для Аркадия постоянны. Затраты на изготовление 1 литра лимонада составляют 3 ден. ед., а на одну банку варенья - 2 ден. ед. Один литр лимонада Аркадий может продать за 13 ден. ед., а одну банку варенья - за 10 ден. ед.

Известно, что рабочий день Аркадия длится 10 часов, а на приобретение сырья ежедневно он может потратить не более 100 ден. ед. Если молодой человек захочет сократить свое рабочее время, то каждый час, высвободившийся от трудовой деятельности и потраченный на отдых, он оценивает в 23 д.ед. Кроме того, средства, которые он может потратить на закупку сырья, могут быть удачно вложены в некий инвестиционный проект и приносить $X\%$ ежедневно на каждую вложенную в него д.ед. При какой минимальной ставке X Аркадий предпочтет отказаться от описанной предпринимательской деятельности?

Решение и критерии проверки.

Каждый час, который Аркадий может потратить на изготовление лимонада, может принести ему $4 \cdot (13 - 3) = 40$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Аркадий может потратить на изготовление варенья, может принести ему $2 \cdot (10 - 2) = 16$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Аркадий может потратить на отдых, он оценивает в 23 д.ед.

Поэтому, если бы не было ограничений на расходы, то Аркадий все свое время посвятил бы изготовлению лимонада. **(2 балла)**

Однако будучи ограниченным в расходах, он может произвести лишь $100/3$ литров, используя лишь $100/(3 \cdot 4)$ часов своего времени из 10 часов. Учитывая, что наиболее привлекательный из оставшихся видов деятельности – это отдых (час отдыха имеет для Аркадия бóльшую ценность, чем производство варенья за это же время), то на него

предприниматель потратит оставшуюся часть времени. Обоснуем это утверждение. Если бы такой альтернативы, как отдых, у Аркадия не существовало, то сохраняя расходы неизменными, предприниматель мог бы, например, сократить производство лимонада на 2 л (экономия в $2*3=6$ д.ед), что сэкономило бы ему 0,5 часа времени, и увеличить производство варенья на 3 банки (дополнительные расходы в размере $2*3=6$ д.ед), что потребовало бы от него 1,5 часа дополнительного времени. Итого, не изменяя расходов и проработав дополнительно $1,5-0,5=1$ час, предприниматель увеличил бы свой доход, а значит и прибыль, на $10*3-13*2=4$ д.ед. Однако 1 час отдыха Аркадий ценит выше, чем 4 д.ед., поэтому предпочтет работать лишь $\frac{100}{3*4}$ часов, а остальное время отдыхать.

В этом случае ежедневная экономическая (а не бухгалтерская) прибыль от предпринимательской деятельности составляет:

$$P_{\text{экон}} = \frac{100}{3*4} * 40 + \left(10 - \frac{100}{3*4}\right) * 23 \text{ д.ед. (Верный подсчет и обоснование экономической прибыли: 8 баллов)}$$

Если Аркадий отказывается от предпринимательской деятельности, и вкладывает средства в инвестиционный проект, который приносит $X\%$, то его ежедневная экономическая прибыль составит $23*10+100*(1+X/100)$ д.ед.

Аркадий откажется от предпринимательской деятельности, если экономическая прибыль от инвестиционного проекта окажется не меньше, чем экономическая прибыль от предпринимательской деятельности. Минимальная ставка X , которая побудит Аркадия отказаться от предпринимательской деятельности, определяется условием: $\frac{100}{3*4} * 40 + \left(10 - \frac{100}{3*4}\right) * 23 = 23 * 10 + 100 * \left(1 + \frac{X}{100}\right)$. Или $\frac{100}{3*4} * (40 - 23) = 100 * \left(1 + \frac{X}{100}\right)$. Откуда находим: $X \approx 41,67\%$. (Верный учет альтернативы и нахождение искомой величины ставки процента: 4 балла)

Задача 6

Молодожены собираются поехать отдыхать за границу и выбирают оптимальное для себя сочетание расходов на услуги гостиницы t и ее комфортности x . Комфортность гостиницы определяется уровнем ее сервиса, местом расположения, отзывчивостью персонала, созданным в ней уютом и значение комфортности для любой гостиницы находится в интервале от 1 до 5. Муж оценивает удовольствие от отдыха в гостинице в соответствии с функцией $U_M = 2tx^2 - 0,5t^2$, а удовольствие жены от комфорта и расходов на проживание в гостинице можно описать функцией $U_{\text{ж}} = 12x - t$.

(а) Молодожены очень любят друг друга, поэтому договорились выбрать сочетание комфорта и расходов на проживание в гостинице следующим образом: сначала жена

называет желаемый уровень комфортности, а затем муж, принимая выбор жены, определяет уровень расходов. Супруги знают функции, в соответствии с которыми определяется их удовольствие от поездки, и каждый из них делает выбор исходя из стремления получить наибольшее удовольствие от путешествия. Какое в результате сочетание цены и комфортности они выберут?

(б) Предположим, супруги изменяют правило выбора и теперь сначала муж называет уровень расходов на проживание, а затем жена, принимая выбор мужа, выбирает гостиницу, с желаемым уровнем комфортности. Окажется ли сочетание комфорта и расходов на проживание таким же, как и в пункте (а)? Объясните полученный результат.

(в) Предположим теперь, что удовольствие семейной пары от поездки можно оценить как сумму значений функции удовольствия каждого из супругов. Стоит ли в этом случае молодоженам воспользоваться одним из вариантов выбора, предложенных в пунктах (а) или (б), или следует установить новое правило выбора? Если новое, то предложите ваш вариант нового правила и объясните, почему оно лучше, не приводя расчетов, если одно из двух, указанных выше, то какое именно.

Решение:

(а) Поскольку жена делает выбор первой, она может предсказать, как отреагирует муж, поэтому в своем выборе она будет учитывать это.

$$\text{Реакция мужа на некоторый выбор жены } \bar{x}: U_M = 2t\bar{x}^2 - 0,5t^2 \rightarrow \max_t$$

Данная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $t = \frac{2\bar{x}^2}{2 \cdot 0,5} = 2\bar{x}^2$ – такую стоимость выберет муж в ответ на выбор жены.

Жена при выборе комфорта учитывает выбор мужа: $U_{Ж} = 12x - t = 12x - 2x^2 \rightarrow \max_x$.

Данная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $x = \frac{12}{2 \cdot 2} = 3$ – выбор жены.

Следовательно, муж выберет $t = 2 \cdot 3^2 = 18$

(б) Порядок решения меняется: сначала определяем реакцию жены на выбор мужа.

$$U_{Ж} = 12x - t \rightarrow \max_x$$

Поскольку функция жены линейна по x и положительно зависит от уровня комфорта, жена выберет максимально возможный уровень комфорта, т.е. $x = 5$. Муж, зная, как затем поступит его жена, выберет $t = 2 \cdot 5^2 = 50$.

Сочетание оказалось другим, поскольку очередность принятия решения различная, и функции удовольствий обоих участников неодинаковые.

(в) Суммарное удовольствие молодоженов $2t\bar{x}^2 - 0,5t^2 + 12x - t$.

Супругам следует совместно выбрать уровень комфортности и стоимости гостиницы, поскольку в этом случае они учтут предпочтения обоих и что обе переменные влияют на удовольствие каждого (устраняются внешние эффекты) - это позволит им выбрать лучшее сочетание комфортности-цены для обоих.

Критерии оценивания:

(а) Обоснованное верное решение – **5 баллов**. Нет указания на максимум/минимум в вершине параболы – **минус 1 балл**.

(б) Обоснованное верное решение – **5 баллов**. При отсутствии решения п. (а) и отсутствии здесь указания на минимум/максимум в вершине параболы – **минус 1 балл**.

(в) Обоснованное верное решение – **6 баллов**. Попытка расчета по другому правилу и нахождение оптимального с точки зрения обоих сочетания – **4 балла**.

Задача 7

Известно, что некоторые авиакомпании используют овербукинг (сверхбронирование – стратегия сбыта товаров (или услуг), при которой поставщик товаров принимает на себя больше обязательств по поставке товара, чем может выполнить, в расчете на то, что не все из взятых обязательств действительно придется выполнять). Суть этой стратегии состоит в том, чтобы продавать больше билетов, чем мест в самолёте, в расчёте на то, что часть пассажиров не полетит этим самолётом и вернёт билеты. При этом существует риск того, что на посадку в самолет придет больше пассажиров, чем есть мест в самолете. В этой ситуации перевозчики предусматривают отправку «лишнего» пассажира ближайшим следующим рейсом и/или иные компенсации неудобств, если следующий авиарейс в нужном направлении состоится значительно позже.

(а) Объясните, почему могла возникнуть идея овербукинга и в чем выгода для авиакомпаний данной стратегии.

(б) Объясните, как бы вы рассчитывали, насколько больше билетов нужно продавать авиакомпаниям, чем есть мест в самолёте.

Решение:

(а) Во-первых, авиакомпании заметили, что на некоторых рейсах места оказываются незаполненными даже при условии, что все билеты продавались, поскольку сдаваемые незадолго до вылета билеты не успевали продавать заново. Поэтому возникает идея сразу продавать билетов больше, чем есть мест, т.к. часть билетов могут сдать обратно.

Во-вторых, продают «лишние» билеты на наиболее загруженные рейсы – те, которые пользуются высоким спросом. Таким образом авиакомпании перераспределяют

пассажиров с пикового времени на непиковое, в котором загрузка бортов заведомо неполная. Такими пассажирами могут являться те, кто наименее среди всех ценят перелет именно в загруженное время (купил билет дешевле) и готовы перенести вылет на другое время, а летят в пиковое время те, кто ценят больше (готовы заплатить дороже) – авиакомпания получает дополнительную прибыль.

(б) Необходимо вывести зависимость прибыли от числа мест и числа проданных билетов и максимизировать прибыль. Поскольку возврат билетов является случайной величиной, нужно получить/иметь оценку вероятности этого события. Затем запишем ожидаемую прибыль авиакомпании от всех ее рейсов, учитывая, что часть билетов на загруженный рейс вернут (авиакомпания получит штраф от пассажира и продаст билет заново). Дополнительные расходы на перевод «лишних» пассажиров на другой рейс можно учитывать (если рейсов у авиакомпании мало), либо нет, если рейсов много (задержки для пассажира практически не будет).

Возможны разные формулы для записи прибыли при наличии объяснений и учета особенностей данной ситуации.

Критерии оценивания:

(а) Полный обоснованный ответ – **8 баллов**, обоснованный ответ с незначительными недочетами – **6 баллов**, частично обоснованный ответ с недочетами – **4 балла**, в ответе присутствует только верная мысль без верного обоснования – **2 балла**.

(б) Выписана схема определения оптимального числа продаваемых билетов и приведены к ней объяснения – **8 баллов**.

Выписана схема определения оптимального числа билетов и неполное обоснование либо выписана схема с неполным учетом особенностей при наличии обоснования – **6 баллов**.

Частично полное обоснование и частичная схема расчета – **4 балла**.

Есть верная мысль (например, в оценке вероятности сдачи билетов) – **2 балла**.

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников РАНХиГС по экономике
2016-2017 учебный год
Очный этап
10-11 классы**

Вариант № 2

Задача 1

Строительная компания построила коттеджный посёлок, состоящий из трех одинаковых улиц. Дома в поселке, согласно проекту, одинаковы и выставлены на продажу по одинаковой цене. Бизнес-план компании, в который входят расходы на все этапы строительства, содержит оценку суммарной себестоимости всего поселка.

Известно, что в бизнес-плане заложены следующие расходы (итого: для всего поселка):

Фундамент – 150 млн у.е.

Стены/кровля/перекрытия - 105 млн у.е.

Инженерные коммуникации (газ, вода, электричество, оптоволокно) – 225 млн у.е.

Отделочные работы – 45 млн у.е.

Оцените цену, по которой продаётся каждый дом в посёлке, если известно, что наценка строительной компании 20 процентов от себестоимости, а каждый этап строительства для одного дома согласно бизнес плану выражен в целом числе млн.

Решение:

Количество домов в посёлке неизвестно, поэтому, исходя из бизнес-плана, оценим возможное множество решений, составив систему уравнений в целых числах. Из этой системы находим, что затраты на фундамент, коммуникации, отделку и стены должны делиться на целое одинаковое число частей (так как все дома в поселке одинаковы). Поскольку общими делителями чисел {45,105,150,225} является набор 1,3,5,15 с учётом схемы поселка (три одинаковых улицы), убеждаемся, ни один ни три ни пять домов при такой схеме поселка быть не может, потому домов 15, себестоимость $(150+105+45+225)/15= 35$ млн у.е. Наценка 20 процентов, поэтому цена дома 42 млн.

Ответ: 42 млн у.е.

Задача 2

Корпорация N планирует открыть несколько дочерних компаний. Открытие первой дочерней компании потребует от корпорации расходов в размере 3 млн у.е. Открытие двух дочерних компании из-за расходов на бухгалтерию и информационные системы самой N и взаимосвязей между дочерними компаниями обойдется в 10 млн у.е. К сожалению для корпорации N, открытие любой следующей дочерней компании связано с расходами на две предыдущих соотношением $F(n) = 4F(n-1) - 3F(n-2)$. Корпорация N согласно бизнес-плану не планирует тратить больше 100 млн у.е. Сколько дочерних компаний они могут открыть?

Решение: Уравнение рекурсии $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ следовательно характеристическое уравнение имеет корни 1 и 3, и общее решение представимо в виде: $y = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 3^n$ с учетом начальных условий $C_1 = 1, C_2 = 2$. Тогда, с учетом того, что четыре компании потребуют расходов в 84 млн у.е. (3+7+19+55), следовательно, ответ 4.

Ответ: 4

Задача 3

В прямоугольный треугольник KLM вписан прямоугольник MPQR, точка P лежит на катете KM, точка R лежит на катете LM, точка Q лежит на гипотенузе KL. Известно, что площадь этого прямоугольника имеет наибольшее возможное значение среди площадей прямоугольников, вписанных указанным образом в треугольник KLM. Найти наибольшую возможную величину площади треугольника KLM при условии, что $MQ = 3\sqrt{3}$.

Ответ: 27.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 1-3
12	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
6	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения (например, найдена наибольшая возможная величина площади треугольника, однако обоснование этого отсутствует) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.

3	<p>Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.:</p> <ul style="list-style-type: none"> - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно найдено наибольшее возможное значение среди площадей прямоугольников); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, не найдено наибольшая возможная величина площади треугольника). <p>При этом решение может быть не завершено.</p>
0	<p>Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 3 и 6 баллов.</p>

Задача 4

Аспирант Андрей считает, что пришла пора самостоятельно заниматься своими финансами, поэтому решает, как распланировать свои расходы на ближайшие два года. К моменту начала 2017 года у него нет ни долгов, ни сбережений. Его фиксированный доход в 2017 году составит 550 тыс. у.е., а в 2018-м — 357,5 тыс. у.е. Андрею каждый год необходимо выплачивать государству налоги в размере 20% от фиксированного годового дохода. Он может потратить в 2017 году весь свой располагаемый годовой доход на потребление товаров и услуг, может сберечь любую его часть, поместив деньги в банк на депозит под 20% годовых (закрывать вклад и получить средства можно только в 2018 г), или же может потратить больше, чем его располагаемый годовой доход, взяв кредит под 35% годовых, вернуть который по условиям договора можно только в 2018 г. Поскольку Андрей не имеет кредитной истории, максимальный объем кредита, который могут предоставить для него банки, составляет 100 тыс. у.е. Иных возможностей сберечь деньги, получить доход или взять кредит у Андрея нет, доход вкладчиков от размещения депозитов налогом не облагается, а инфляция отсутствует.

(а) Обозначьте сумму денег, которую Андрей может потратить на потребление товаров и услуг в 2017 и в 2018 годах как C_{17} и C_{18} соответственно. Считайте, что все проценты по кредитам/депозитам начисляются лишь один раз на тело кредитов/депозитов. Если Андрей планирует разместить деньги на депозите, то какую максимальную сумму денег C_{18} в зависимости от величины C_{17} он сможет потратить на товары и услуги в 2018 г? Если Андрей планирует взять кредит, то какую максимальную сумму денег C_{18} в зависимости от C_{17} он сможет потратить на товары и услуги в 2018 г? Считайте также, что Андрей не может одновременно брать кредит и размещать депозит в банке.

(б) Предположим, Андрей уверен, что на товары и услуги в 2017 и в 2018 годах ему следует тратить одинаковую сумму денег. Найдите эту сумму. Будет ли Андрей брать кредит в банке или разместит депозит?

(в) Рассмотрите экономику страны Потребляндия, в которой живет множество таких же жителей, как Андрей. Политика, проводимая центральным банком этой страны, не влияет на доходы жителей, однако может воздействовать на процентные ставки по кредитам и депозитам. Центральный банк Потребляндии хотел бы стимулировать уровень частных сбережений ее граждан в будущем, увеличив его на 5% по сравнению с тем уровнем сбережений, который наблюдается при нынешних процентных ставках. Следует ли Центральному банку для достижения этой цели увеличить или уменьшить ставку процента по депозитам? До какого уровня? Дайте содержательную интерпретацию полученного результата.

Решение и критерии проверки:

(а) После вычета налогов фиксированный доход в 2017 г составит $550 \cdot 0,8 = 440$ тыс. у.е., а в 2018 г – $357,5 \cdot 0,8 = 286$ тыс. у.е. **(1 балл)**

Если Андрей планирует разместить деньги на депозите, то максимальная сумма денег C_{18} в зависимости от величины C_{17} выражается следующим образом:

$C_{18} = (440 - C_{17}) \cdot 1,2 + 286$, причем $C_{17} < 480$, если сумма депозита положительна. Или после преобразований: $C_{18} = 814 - 1,2C_{17}$, где $C_{17} < 440$. **(2 балла)**

Если Андрей планирует взять деньги в кредит, то максимальная сумма денег C_{18} в зависимости от величины C_{17} выражается следующим образом:

$C_{18} = 286 - (C_{17} - 440) \cdot 1,35$, причем $0 < C_{17} - 440 \leq 100$, если сумма кредита положительна и по условию задачи максимальный объем кредита составляет 100 тыс. у.е. Или после преобразований: $C_{18} = 880 - 1,35C_{17}$, где $440 < C_{17} \leq 540$. **(2 балла)**

(б) Поскольку сумма расходов в каждый год должна быть одинакова, а в 2017 г доход Андрея больше, чем в 2018 г, то для достижения равных расходов ему придется положить деньги на депозит в 2017 г и получить их с депозита в 2018 г. **(1 балл)**

Чтобы найти необходимую сумму, следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_{18} = 814 - 1,2C_{17} \\ C_{17} = C_{18} \end{cases}, \text{ откуда находим } C_{18} = C_{17} = 370. \text{ (4 балла)}$$

(в) Обозначим искомую ставку процента (в долях) за r , где $0 < r < 1$. Тогда максимальная сумма денег C_{18} в зависимости от величины C_{17} выражается следующим образом:

$C_{18} = (440 - C_{17}) * (1 + r) + 286$, причем $C_{17} < 440$, поскольку сумма депозита положительна. Так как по условию задачи все жители страны в каждый период тратят на потребление одинаковую сумму денег, то $C_{17} = C_{18} = (440 * (1 + r) + 286)/(2 + r)$.

$$\text{Сумма, размещенная на депозите равна } 440 - C_{17} = 440 - \frac{440*(1+r)+286}{2+r} = \frac{154}{2+r}.$$

Таким образом, можно заметить, что для увеличения уровня сбережений необходимо снизить ставку процента по депозиту. **(верно обосновано это утверждение 3 балла)**

Чтобы найти искомую ставку процента, необходимо решить уравнение:

$\frac{154}{2+r} = \frac{154*1,05}{2+0,2}$, где слева от знака равенства – сумма сбережений при искомой (произвольной) ставке процента, а справа – сумма сбережений при ставке процента 20%, которая увеличена на 5%. Откуда находим искомую ставку процента 9,5%. **(1 балл)**

Действительно, такая ситуация возникает из-за того, что при снижении ставки процента житель становится «беднее» (снижается его покупательная способность), так как на каждую вложенную на депозит денежную единицу он будет получать меньше процентных доходов. Это побуждает жителя снижать расходы на потребление в обоих периодах, поскольку по условию они должны быть равны. Таким образом, расходы на потребление в 2017 г снижаются, в то время как фиксированный доход жителя остается неизменным, следовательно, сбережения увеличиваются. **(верная содержательная интерпретация 2 балла)**

Задача 5

Перспективный предприниматель Владимир может изготовить 5 литров лимонада за один час либо 1 банку лимонного варенья за 30 минут. Альтернативные издержки производства любого из этих продуктов для Владимира постоянны. Затраты на изготовление 1 литра лимонада составляют 4 ден. ед., а на одну банку варенья - 3 ден. ед. Один литр лимонада Владимир может продать за 8 ден. ед., а одну банку варенья - за 12 ден. ед.

Известно, что рабочий день Владимира длится 9 часов, а на приобретение сырья ежедневно он может потратить не более 110 ден. ед. Если молодой человек захочет сократить свое рабочее время, то каждый час, высвободившийся от трудовой деятельности и потраченный на отдых, он оценивает в 16 ден.ед. Кроме того, средства, которые он может потратить на закупку сырья, могут быть удачно вложены в некий инвестиционный проект и приносить X% ежедневно на каждую вложенную в него ден.ед.

При какой минимальной ставке X Владимир предпочтет отказаться от описанной предпринимательской деятельности?

Решение и критерии проверки.

Каждый час, который Владимир может потратить на изготовление лимонада, может принести ему $5 \cdot (8-4) = 20$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Владимир может потратить на изготовление варенья, может принести ему $2 \cdot (12-3) = 18$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Владимир может потратить на отдых, он оценивает в 16 д.ед.

Поэтому, если бы не было ограничений на расходы, то Владимир все свое время посвятил бы изготовлению лимонада. **(2 балла)**

Однако будучи ограниченным в расходах, он может произвести лишь $110/4$ литров, используя лишь $100/(4 \cdot 5) = 5$ часов своего времени из 9 часов. Учитывая, что наиболее привлекательный из оставшихся видов деятельности – это производство варенья (час отдыха имеет для Владимира меньшую ценность, чем производство варенья за это же время), то Владимир предпочтет, полностью расходуя свой бюджет, производить оба продукта. Обоснуем это утверждение. Если бы такой альтернативы, как отдых, у Владимира не существовало, то сохраняя расходы неизменными, предприниматель мог бы, например, сократить производство лимонада на 3 л (экономия в $4 \cdot 3 = 12$ д.ед), что сэкономило бы ему 0,8 часа времени, и увеличить производство варенья на 4 банки (дополнительные расходы в размере $3 \cdot 4 = 12$ д.ед), что потребовало бы от него 2 часа дополнительного времени. Итого, не изменяя расходов и проработав дополнительно $2 - 0,8 = 1,2$ часа, предприниматель увеличил бы свой доход, а значит и прибыль, на $12 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 24$ д.ед. Однако 1 час отдыха Владимир ценит меньше, чем 24 д.ед., поэтому предпочтет работать больше чем 5 часов, производя оба товара. Стоит заметить, что подобные рассуждения приводят к тому, что для получения наибольшей прибыли при зафиксированных расходах Владимир должен работать все 9 часов.

Найдем, какое количество лимонада и варенья будет производить Владимир при фиксированном уровне расходов. Пусть L – количество лимонада, а B – количество варенья. Тогда искомые значения должны удовлетворять двум ограничениям: производственным возможностям Владимира и его бюджетному ограничению. То есть, искомые величины должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{L}{5} + \frac{B}{2} = 9 \\ 4L + 3B = 110 \end{cases}$$

Откуда находим: $L = 20, B = 10$.

В этом случае ежедневная прибыль от предпринимательской деятельности составляет:

$\Pi = 20 * (8 - 4) + 10 * (12 - 3) = 170$ д.ед. **(Верный подсчет и обоснование подсчета прибыли: 8 баллов)**

Если Владимир отказывается от предпринимательской деятельности, и вкладывает средства в инвестиционный проект, который приносит $X\%$, то его ежедневная прибыль составит $16*9+110*(1+X/100)$ д.ед.

Владимир откажется от предпринимательской деятельности, если прибыль от инвестиционного проекта окажется не меньше, чем прибыль от предпринимательской деятельности, если

$$170 \leq 144 + 110 * \left(1 + \frac{X}{100}\right).$$

Легко увидеть, что при любом доходе от инвестиционного проекта (в том числе и нулевом!) Владимир предпочтет отказаться от предпринимательской деятельности. То есть возможность получить альтернативную выгоду от отдыха, сэкономив при этом средства, оказывается для него привлекательней предпринимательской деятельности. Таким образом, минимальная ставка составляет 0% . **(Верный учет альтернативы и нахождение искомой величины ставки процента: 4 балла)**

Задача 6

Молодожены собираются поехать отдыхать за границу и выбирают оптимальное для себя сочетание расходов на услуги гостиницы t и ее комфортности x . Комфортность гостиницы определяется уровнем ее сервиса, местом расположения, отзывчивостью персонала, созданным в ней уютом, и значение комфортности для любой гостиницы находится в интервале от 1 до 5. Муж оценивает удовольствие от отдыха в гостинице в соответствии с функцией $U_M = 4tx^2 - 0,5t^2$, а удовольствие жены от комфорта и расходов на проживание в гостинице можно описать функцией $U_J = 32x - t$.

(а) Молодожены очень любят друг друга, поэтому договорились выбрать сочетание комфорта и расходов на проживание в гостинице следующим образом: сначала жена называет желаемый уровень комфортности, а затем муж, принимая выбор жены, определяет уровень расходов. Супруги знают функции, в соответствии с которыми определяется их удовольствие от поездки, и каждый из них делает выбор исходя из стремления получить наибольшее удовольствие от путешествия. Какое в результате сочетание цены и комфортности они выберут?

(б) Предположим, супруги изменяют правило выбора и теперь сначала муж называет уровень расходов на проживание, а затем жена, принимая выбор мужа, выбирает

гостиницу с желаемым уровнем комфортности. Окажется ли сочетание комфорта и расходов на проживание таким же, как и в пункте (а)? Объясните полученный результат.

(в) Предположим теперь, что удовольствие семейной пары от поездки можно оценить как сумму значений функции удовольствия каждого из супругов. Стоит ли в этом случае молодоженам воспользоваться одним из вариантов выбора, предложенных в пунктах (а) или (б), или следует установить новое правило выбора? Если новое, то предложите ваш вариант нового правила и объясните, почему оно лучше, не приводя расчетов, если одно из двух, указанных выше, то какое именно.

Решение и критерии проверки.

Каждый час, который Владимир может потратить на изготовление лимонада, может принести ему $5 \cdot (8-4) = 20$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Владимир может потратить на изготовление варенья, может принести ему $2 \cdot (12-3) = 18$ д.ед. **(1 балл)**

Каждый час, который Владимир может потратить на отдых, он оценивает в 16 д.ед.

Поэтому, если бы не было ограничений на расходы, то Владимир все свое время посвятил бы изготовлению лимонада. **(2 балла)**

Однако будучи ограниченным в расходах, он может произвести лишь $110/4$ литров, используя лишь $100/(4 \cdot 5) = 5$ часов своего времени из 9 часов. Учитывая, что наиболее привлекательный из оставшихся видов деятельности – это производство варенья (час отдыха имеет для Владимира меньшую ценность, чем производство варенья за это же время), то Владимир предпочтет, полностью расходуя свой бюджет, производить оба продукта. Обоснуем это утверждение. Если бы такой альтернативы, как отдых, у Владимира не существовало, то сохраняя расходы неизменными, предприниматель мог бы, например, сократить производство лимонада на 3 л (экономия в $4 \cdot 3 = 12$ д.ед), что сэкономило бы ему 0,8 часа времени, и увеличить производство варенья на 4 банки (дополнительные расходы в размере $3 \cdot 4 = 12$ д.ед), что потребовало бы от него 2 часа дополнительного времени. Итого, не изменяя расходов и проработав дополнительно $2 - 0,8 = 1,2$ часа, предприниматель увеличил бы свой доход, а значит и прибыль, на $12 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 24$ д.ед. Однако 1 час отдыха Владимир ценит меньше, чем 24 д.ед., поэтому предпочтет работать больше чем 5 часов, производя оба товара. Стоит заметить, что подобные рассуждения приводят к тому, что для получения наибольшей прибыли при зафиксированных расходах Владимир должен работать все 9 часов.

Найдем, какое количество лимонада и варенья будет производить Владимир при фиксированном уровне расходов. Пусть L – количество лимонада, а B – количество варенья. Тогда искомые значения должны удовлетворять двум ограничениям:

производственным возможностям Владимира и его бюджетному ограничению. То есть, искомые величины должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{L}{5} + \frac{B}{2} = 9 \\ 4L + 3B = 110 \end{cases}$$

Откуда находим: $L = 20, B = 10$.

В этом случае ежедневная прибыль от предпринимательской деятельности составляет:

$\Pi = 20 * (8 - 4) + 10 * (12 - 3) = 170$ д.ед. **(Верный подсчет и обоснование подсчета прибыли: 8 баллов)**

Если Владимир отказывается от предпринимательской деятельности, и вкладывает средства в инвестиционный проект, который приносит $X\%$, то его ежедневная прибыль составит $16*9+110*(1+X/100)$ д.ед.

Владимир откажется от предпринимательской деятельности, если прибыль от инвестиционного проекта окажется не меньше, чем прибыль от предпринимательской деятельности, если

$$170 \leq 144 + 110 * \left(1 + \frac{X}{100}\right).$$

Легко увидеть, что при любом доходе от инвестиционного проекта (в том числе и нулевом!) Владимир предпочтет отказаться от предпринимательской деятельности. То есть возможность получить альтернативную выгоду от отдыха, сэкономя при этом средства, оказывается для него привлекательней предпринимательской деятельности. Таким образом, минимальная ставка составляет 0% . **(Верный учет альтернативы и нахождение искомой величины ставки процента: 4 балла)**

Решение:

(а) Поскольку жена делает выбор первой, она может предсказать, как отреагирует муж, поэтому в своем выборе она будет учитывать это.

$$\text{Реакция мужа на некоторый выбор жены } \bar{x}: U_M = 4t\bar{x}^2 - 0,5t^2 \rightarrow \max_t$$

Данная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $t = \frac{4\bar{x}^2}{2 \cdot 0,5} = 4\bar{x}^2$ – такую стоимость выберет муж в ответ на выбор жены.

Жена при выборе комфорта учитывает выбор мужа: $U_{\text{Ж}} = 32x - t = 32x - 4x^2 \rightarrow \max_x$.

Данная парабола с ветвями вниз имеет максимум в точке $x = \frac{32}{2 \cdot 4} = 4$ – выбор жены.

Следовательно, муж выберет $t = 4 \cdot 4^2 = 64$

(б) Порядок решения меняется: сначала определяем реакцию жены на выбор мужа.

$$U_{\text{Ж}} = 32x - t \rightarrow \max_x$$

Поскольку функция жены линейна по x и положительно зависит от уровня комфорта, жена выберет максимально возможный уровень комфорта, т.е. $x = 5$. Муж, зная, как затем поступит его жена, выберет $t = 4 \cdot 5^2 = 100$.

Сочетание оказалось другим, поскольку очередность принятия решения различная, и функции удовольствий обоих участников неодинаковые.

(в) Суммарное удовольствие молодоженов $4t\bar{x}^2 - 0,5t^2 + 32x - t$.

Супругам следует совместно выбирать уровень комфортности и стоимости гостиницы, поскольку в этом случае они учтут предпочтения обоих и что обе переменные влияют на удовольствие каждого (устраняются внешние эффекты) – это позволит им выбрать лучшее сочетание комфортности-цены для обоих.

Критерии оценивания:

(а) Обоснованное верное решение – **5 баллов**. Нет указания на максимум/минимум в вершине параболы – **минус 1 балл**.

(б) Обоснованное верное решение – **5 баллов**. При отсутствии решения п. (а) и отсутствии здесь указания на минимум/максимум в вершине параболы – **минус 1 балл**.

(в) Обоснованное верное решение – **6 баллов**. Попытка расчета по другому правилу и нахождение оптимального с точки зрения обоих сочетания – **4 балла**.

Задача 7

Известно, что некоторые авиакомпании используют овербукинг (сверхбронирование – стратегия сбыта товаров (или услуг), при которой поставщик товаров принимает на себя больше обязательств по поставке товара, чем может выполнить, в расчете на то, что не все из взятых обязательств действительно придется выполнять). Суть этой стратегии состоит в том, чтобы продавать больше билетов, чем мест в самолёте, в расчёте на то, что часть пассажиров не полетит этим самолётом и вернёт билеты. При этом существует риск того, что на посадку в самолет придет больше пассажиров, чем есть мест в самолете. В этой ситуации перевозчики предусматривают отправку «лишнего» пассажира ближайшим следующим рейсом и/или иные компенсации неудобств, если следующий авиарейс в нужном направлении состоится значительно позже.

(а) Объясните, почему могла возникнуть идея овербукинга и в чем выгода для авиакомпаний данной стратегии.

(б) Объясните, как бы вы рассчитывали, насколько больше билетов нужно продавать авиакомпаниям, чем есть мест в самолёте.

Решение:

(а) Во-первых, авиакомпании заметили, что на некоторых рейсах места оказываются незаполненными даже при условии, что все билеты продавались, поскольку сдаваемые незадолго до вылета билеты не успевали продавать заново. Поэтому возникает идея сразу продавать билетов больше, чем есть мест, т.к. часть билетов могут сдать обратно.

Во-вторых, продают «лишние» билеты на наиболее загруженные рейсы – те, которые пользуются высоким спросом. Таким образом авиакомпании перераспределяют пассажиров с пикового времени на непиковое, в котором загрузка бортов заведомо неполная. Такими пассажирами могут являться те, кто наименее среди всех ценят перелет именно в загруженное время (купил билет дешевле) и готовы перенести вылет на другое время, а летят в пиковое время те, кто ценят больше (готовы заплатить дороже) – авиакомпания получает дополнительную прибыль.

(б) Необходимо вывести зависимость прибыли от числа мест и числа проданных билетов и максимизировать прибыль. Поскольку возврат билетов является случайной величиной, нужно получить/иметь оценку вероятности этого события. Затем запишем ожидаемую прибыль авиакомпании от всех ее рейсов, учитывая, что часть билетов на загруженный рейс вернут (авиакомпания получит штраф от пассажира и продаст билет заново). Дополнительные расходы на перевод «лишних» пассажиров на другой рейс можно учитывать (если рейсов у авиакомпании мало), либо нет, если рейсов много (задержки для пассажира практически не будет).

Возможны разные формулы для записи прибыли при наличии объяснений и учитывания особенностей данной ситуации.

Критерии оценивания:

(а) Полный обоснованный ответ – **8 баллов**, обоснованный ответ с незначительными недочетами – **6 баллов**, частично обоснованный ответ с недочетами – **4 балла**, в ответе присутствует только верная мысль без верного обоснования – **2 балла**.

(б) Выписана схема определения оптимального числа продаваемых билетов и приведены к ней объяснения – **8 баллов**.

Выписана схема определения оптимального числа билетов и неполное обоснование либо выписана схема с неполным учетом особенностей при наличии обоснования – **6 баллов**.

Частично полное обоснование и частичная схема расчета – **4 балла**.

Есть верная мысль (например, в оценке вероятности сдачи билетов) – **2 балла**.