Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Олимпиада школьников РАНХиГС по экономике

2016-2017 учебный год
Заочный этап
10-11 классы

Уважаемый участник!

Вы приступаете к выполнению заданий Олимпиады школьников РАНХиГС. Прежде, чем Вы начнете, оргкомитет просит учесть несколько правил, выполнение которых необходимо:

1. Вы можете выполнять задания и загружать работу до окончания приема работ в 23:59 часов по московскому времени 28 ноября 2016 года. Иного таймера нет.
2. Просим не задерживать выполнение: при опоздании даже на 5 секунд система закроет прием работ, и Ваша работа не будет принята к рассмотрению.
3. Работа выполняется ТОЛЬКО самостоятельно. Коллективное выполнение работ запрещено: все одинаковые работы будут аннулированы.
4. Все решения необходимо печатать, а не писать от руки, затем сохранять файл как PDF и после этого загружать в Личный кабинет. Пример для MS WORD: Файл→Сохранить как…→Тип файла PDF (*pdf).
5. Прием работы через электронную почту не производится. Только через Личный кабинет.
6. Запрещено «переконвертировать» файл, просто переименовав у него расширение на PDF: в таком виде он не читается и не будет проверен. За него будет выставлена оценка 0 баллов.
7. После загрузки работы Вам будет направлено письмо. У Вас есть 24 часа (или менее, если до конца приема работ осталось меньше времени) на проверку загруженного файла и его замену. Просим не пренебрегать этой возможностью и проверять загруженный файл, в том числе на отсутствие технических сбоев при загрузке, препятствующих открытию и чтению файла.
8. Необходимо загружать работу только в специально отведенное поле, не путая профили.
9. Запрещено производить заимствования без указания ссылки на первоисточник. Первоисточником являются труды известных ученых, философов, научные работы, опубликованные в рецензируемых ВАК научных изданиях либо индексируемых в Scopus или Web of Science, нормативные правовые акты и др. Ссылки на статьи без указания автора не являются корректными. Работы с некорректными заимствованиями будут аннулированы.
10. Запрещено подписывать работы или иным способом указывать на автора. Работа с указанными персональными данными участника будет аннулирована.
11. Необходимо четко выполнять требования к объему работы, если он указан в задании.

Задание 1 (Максимум 12 баллов)

У экономиста Саши есть 2016-гранный игральный кубик. Вероятность выпадения каждой грани одинакова. Саша подбрасывает этот кубик 2016 раз и считает сумму выпавших очков, но, к сожалению, сбивается со счёта. У него получается 2 варианта: 2 033 133 очков или 2 033 138 очков. Помогите Саше определить, какой из этих результатов более вероятный.

Решение:
Пусть случайная величина X – это число выпавших очков на кубике при одном подбрасывании, тогда:

$$E(X) = \frac{1}{2016} * 1 + \frac{1}{2016} * 2 + \cdots + \frac{1}{2016} * 2016 = \frac{1 + 2 + \cdots + 2016}{2016} = 1008{,}5.$$

Тогда ожидаемое значение суммы очков при 2016 подбрасываниях равно:

$$E(X) + E(X) + \cdots + E(X) = 2016 * E(X) = 2016 * 1008{,}5 = 2\ 033\ 136.$$

Данное значение является ожидаемым (наиболее вероятным). Видно, что первый вариант отличается от ожидаемого на 3, а второй на 2. Это означает, что второй вариант находится ближе к ожидаемому, чем первый, а значит, он наиболее вероятен. То есть:

$$P(2016 * X = 2\ 033\ 138) > P(2016 * X = 2\ 033\ 133).$$

Ответ: Результат в 2 033 138 очков более вероятен.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
12	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
8	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании решения (например, найдено математическое ожидание числа очков при 2016 подбрасываниях, однако дальнейшая интерпретация отсутствует) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
4	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: — существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно найдено математическое ожидание очков при одном подбрасывании); — другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверно найдено математическое ожидание суммы очков при 2016 подбрасываниях). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 4 и 8 баллов.

Задание 2 (Максимум 15 баллов)

На левом берегу прямой, как стрела, реки расположены населённые пункты А (в двух километрах от берега) и В (в пяти километрах от берега и в пяти километрах от пункта А). Требуется соединить их с пристанями (или пристанью) на берегу реки. Стоимость пристани со всем оборудованием равна стоимости строительства двух километров дороги. В бюджете есть средства на постройку 10,1 км дороги. Хватит ли этого для решения проблемы? Ответ обосновать.

Решение:
Кратчайшая длина пути, соединяющего одну пристань на берегу с пунктами А и В, равна длине прямой, соединяющей точку А с точкой, симметричной точке В относительно берега реки. Она равна $\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$. Стоимость строительства дороги такой длины и пристани равна стоимости дороги длиной $\sqrt{65}$+2 км. Это меньше, чем стоимость постройки 10,1 км дороги.
Ответ: Хватит ($\sqrt{65}$+2 км<10,1).

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
15	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора кратчайшего пути или сравнения чисел или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: — существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, найден кратчайший путь); — другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверно выполнено сравнение чисел). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 10 баллов.

Задание 3 (Максимум 18 баллов)

Компания «Пирожочек», производящая сладкие пирожки, имеет положительную функцию издержек $\mathrm{c}(x)$, определённую при положительных значениях x, где x – это количество пирожков, которые произвела компания. Также про функцию $\mathrm{c}(x)$ известно следующее:

1) $\mathrm{c}(x+y) = \frac{\mathrm{c}(x)+\mathrm{c}(y)}{2} + 3\sqrt{\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)}$;
2) $\mathrm{c}(3) + \mathrm{c}(12) = 34$.

Чему будут равны издержки компании «Пирожочек», если она произведёт 1536 пирожка?

Решение:

Заметим, что $c(2x) = c(x+x) = \frac{c(x)+c(x)}{2} + 3\sqrt{c(x)c(x)} = 4c(x)$. Тогда $c(12) = 4c(6) = 16c(3)$. Получим, что $c(3) + c(12) = 17c(3) = 34$. Отсюда следует, что $c(3) = 2$. Заметим, что $c(2^k * 3) = 4^k * c(3) = 4^k * 2 = 2^{2k+1}$. С другой стороны, $1536 = 512 * 3 = 2^9 * 3$. Тогда $c(1536) = c(2^9 * 3) = 2^{2*9+1} = 2^{19}$.

Ответ: издержки компании составят 2^{19} у. е.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания**
18	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
12	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора решения (например, не полностью обоснована закономерность $f(2^k * 3)$) или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
6	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: — существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, верно неверно найдено $f(3)$); — другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверно выведена закономерность $f(2^k * 3)$). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 6 и 12 баллов.

Задание 4 (Максимум 15 баллов)

Рассмотрим три многочлена восьмой степени P1(x), P2(x), P3(x), с целыми коэффициентами. Известно, что коэффициенты многочленов при x^8 являются различными корнями уравнения $y^5 = 9y^3 - 6y^2 - 14y + 12$, а сумма коэффициентов многочленов при x^7 не равна нулю. Докажите, что многочлен P1(x)+P2(x)+ P3(x) имеет действительный корень.

Решение: По условию даны три произвольных многочлена восьмой степени

$P_1(x) = a_1x^8 + a_2x^7 + ... + a_0$

$P_2(x) = b_1x^8 + b_2x^7 + ... + b_0$

$P_3(x) = c_1x^8 + c_2x^7 + ... + c_0$

$a_2 + b_2 + c_2 \neq 0$

Сумма коэффициентов при x^7 не равна нулю и коэффициенты a_1, b_1, c_1 - целые корни уравнения $y^5 = 9y^3 - 6y^2 - 14y + 12$.

Вычислим корни уравнения $y^5 = 9y^3 - 6y^2 - 14y + 12$.

Так как последний коэффициент уравнения 12, следовательно, если это уравнение имеет целые корни, то они все делители 12, то есть целыми корнями могут быть числа $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$. Проверим число 1, оно является корнем этого уравнения, подбором находим еще два целых корня 2 и -3.

Тогда $y^5 - 9y^3 + 6y^2 + 14y - 12 = (y-1)(y-2)(y+3)(y^2-2)$ и среди пяти корней $y^5 - 9y^3 + 6y^2 + 14y - 12 = 0$ только три целых корня. Тогда, так как -3+2+1 = 0, $P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) = (a_2 + b_2 + c_2)x^7 + ... + (a_0 + b_0 + c_0)$, то есть сумма многочленов является многочленом седьмой степени. Но многочлен нечетной степени всегда имеет как минимум один действительный корень, так как является непрерывной функцией аргумента x, и его значения при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ лежат по разные стороны от оси абсцисс.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания № 4**
15	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен многочлен седьмой степени, и сделан вывод о наличии действительного корня
12	Верно найдены корни уравнения пятой степени, получен многочлен седьмой степени, утверждение о наличии у него действительного корня получено, но не обосновано
5	Верно найдены корни уравнения пятой степени, однако конечный вывод о наличии действительного корня не сделан
0	Утверждение не доказано

Задание 5 (Максимум 15 баллов)

В маленьком государстве Спортляндия открылось производство усовершенствованных беговых дорожек с системой охлаждения и вентиляции. Все фирмы, производящие спортивный инвентарь функционируют в Спортляндии в условиях совершенной конкуренции. Для того чтобы граждане Спортляндии стали активнее заниматься спортом, государство решило ввести субсидию для покупателей беговых дорожек по ставке S денежных единиц за каждый спортивный тренажер. Известно, что в Спортляндии функции спроса и предложения на все товары линейны. При цене 30 денежных единиц Спортляндии (и дороже) ни один житель страны не пожелает покупать беговую дорожку, зато производители захотели бы выпустить в продажу ровно 100 тренажеров, а эластичность их предложения в этой точке составила бы 1,2. Если же тренажеры будут раздавать в этой стране даром, то жители станут использовать только 60 беговых дорожек.

(а) Какой должна быть ставка субсидии, чтобы количество продаваемых тренажеров возросло вдвое?

(б) Если бы вместо введения субсидии на покупку тренажеров, сохранив при этом расходы госбюджета, правительство Спортляндии ввело субсидию на выручку производителей беговых дорожек по ставке s% (0<s<100), то

1) каков должен быть размер этой субсидии в %?

2) как изменилось бы количество приобретаемых беговых дорожек в Спортляндии в этом случае, по сравнению с пунктом (а)? Объясните полученный результат.

Решение:
(а) По данным о линейности спроса и предложения и их величинам в некоторых точках найдем функции спроса и предложения: Функция предложения беговых дорожек $q^s=4p-20$, функция спроса на эти тренажеры $q^d=60-2p$.
Найдем первоначальное равновесие: 4p-20, =60-2p, => p*=10, q*=20.
Т.к. количество беговых дорожек должно увеличиться вдвое, то в равновесии оно должно стать 40. С учетом введения субсидии, находим новое равновесие:

$$\begin{cases} 60 - 2p^d = 40 \\ 4p^s - 20 = 40 \\ p^d - S = p^s \end{cases}$$

Где p^d – цена, которую заплатят покупатели беговых дорожек, p^s – цена, которую получать продавцы беговых дорожек за свою продукцию, S - величина субсидии.
Находим: $p^d = 10$, $p^s = 15$, $S = 5$. То есть искомая субсидия должна составить 5 денежных единиц.

(б) Если бы правительство ввело субсидию на выручку производителей тренажеров, то за каждый тренажер, приобретаемый покупателем по цене p^d, продавцы получали бы выручку в размере $p^d(1 + s/100)$. Поскольку расходы госбюджета должны сохраниться, то

$$S * q^* = 5 * 40 = 200 = p^d_{new} * \frac{s}{100} * q_{new}$$

где p^d_{new} цена, которую будут платить покупатели в новом равновесии, q_{new} – количество тренажеров, которое будет продано в новом равновесии.

Тогда новое равновесие можно найти, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 60 - 2p_{new}^d = 4p_{new}^s - 20 \\ p_{new}^s = p_{new}^d(1 + s/100) \\ p_{new}^d * \dfrac{s}{100} * q_{new} = S * q^* = 200 \end{cases}$$

Откуда находим: $s = 50\%$, $q_{new} = 40$.
Заметим, что количество приобретаемых тренажеров не изменилось бы. Этот результат можно было бы озвучить до вычисления субсидии. И вот почему.
Пусть $p^d -$ цена, которую платят покупатели, а p^s – цена, которую получают за свою продукцию продавцы в условиях, когда государство ввело субсидию для покупателей или продавцов товара. Тогда в равновесии
$d^s(p^s) = d^d(p^d)$ и
$p^s = p^d + S$ (при потоварном субсидировании)
или $p^s = p^d(1 + s/100)$ (при субсидировании стоимости товара или выручки)

Обратим внимание, что
1) последние два условия справедливы вне зависимости от того, для кого вводится субсидия, то есть, вводится ли она для покупателей или продавцов товара,
2) при соответствующем подборе величин субсидий S (в денежных единицах) и s (в %) мы всегда можем получить одинаковое соотношение между ценой покупки и ценой продажи товара, а значит, и одинаковый объем продаж.
То есть, с точки зрения равновесия на рынке, неважно, для кого из участников рынка введена субсидия. А следовательно, при нейтральной к госбюджету политике замены потоварного налога на пропорциональный налог (или обратно) мы всегда получим одинаковый равновесный объем продаж.

Задание 6 (Максимум 15 баллов)

Обратная функция спроса на волшебные палочки фирмы-монополиста «Гарри и ПО» составляет p =600 - q. При производстве волшебных палочек фирма оплачивает труд своих рабочих в размере 9 галлеонов за квадрат единицы продукции, а также закупку необходимых материалов (дерево, перо феникса, волосы фестрала, сердечная жила дракона, волос единорога и т.д.) в размере 5 галлеонов на квадрат единицы продукции. Других издержек фирма не несет. Неожиданное вторжение Волан-де-Морта, снизило спрос на волшебные палочки вдвое, поскольку большая часть волшебников решила скрываться. Однако корпорация «Дамблдор&Ко» решила поддержать производителя волшебных палочек и приняла решение о субсидировании производства каждой волшебной палочки в размере S галлеонов таким образом, чтобы объем их продаж вернулся на прежний уровень. Какие расходы понесет корпорация «Дамблдор&Ко» в результате этой кампании?

Решение:
Определим совокупные издержки: TC= $(9+5)q^2$. Необходимое условие максимизации прибыли монополистом: MR=MC (предельная выручка убывает, предельные издержки возрастают – условие будет и достаточным). 600-2q= 28q. => 600=30q => q*=20, p*=580.
Либо прибыль=$(600-q)q-14q^2$ – парабола с ветвями вниз, максимум находится в ее вершине.
После вторжения функция спроса на палочки имеет вид: p =600 - 2q. Задача монополиста при субсидировании будет иметь вид:
$(600 - 2q)q-14q^2.+Sq$=>max
Решая эту задачу при условии q=20 находим S=40. Таким образом, корпорация понесет расходы в 40*20=800 галлеонов.

Задание 7 (Максимум 10 баллов)

Почему бутылка Coca-Cola в некоторых аэропортах стоит значительно дороже, чем в продуктовом магазине в городе? Аргументируйте свой ответ.

Решение:

1) С одной стороны, приехав в аэропорт, людям больше негде купить бутылку сладкой газированной воды, кроме как в самом здании, поэтому сеть киосков и кафе, торгующих напитком в здании аэропорта, становится монополистом по продаже этого напитка, что влечет повышение его цены. Стоит заметить, что в больших международных аэропортах, где продукты в дорогу (в том числе и газированные напитки) можно приобрести в сетевых продуктовых магазинах, расположенных в здании аэропортов, «городские» и «аэропортовые» цены не отличаются значительно.
2) С другой стороны, скорей всего, людям уже будет не удобно покидать здание аэропорта в поисках аналогичного товара за более низкую цену (небольшое время до вылета, расходы на поездку до ближайшего магазина и т.д.). Индивидуальный спрос на напиток для пассажиров, которые любят его употреблять, возрастает, поскольку теперь за бутылку газировки они будут готовы отдать большую сумму, чем ранее. Те же пассажиры, которые готовы отказаться от напитка даже при незначительном росте его цены, не будут вовсе его приобретать. Поэтому даже в условиях конкуренции между кафе в здании аэропорта (при их значительных издержках на арендную плату за торговое место, за доставку малых партий товаров при отсутствии большого пространства для хранения продуктов, например) цена напитка может возрастать.
3) С третьей стороны, кафе могут осуществлять ценовую дискриминацию, устанавливая высокие цены на напиток. Как уже было сказано выше, индивидуальный спрос на напиток для пассажиров, которые любят его употреблять, возрастает, поскольку теперь за бутылку газировки они будут готовы отдать значительно большую сумму, чем ранее; те же пассажиры, которые готовы отказаться от напитка даже при незначительном росте его цены, не будут вовсе его приобретать (спрос таких покупателей можно считать неэластичным). Поэтому устанавливая высокую цену напитка, кафе фактически отказываются от обслуживания клиентов с неэластичным спросом, получая наибольшую выгоду от тех покупателей, спрос которых оказывается неэластичным.