

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
Олимпиада школьников по экономике
2015-2016 учебный год
10-11 класс
Заочный этап**

1. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия - целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на **847** рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее **30%** (**9 баллов**).

Решение:

Уравнение записывается так: $X \cdot (100-n)/100=847$, где X – положительная сумма денег, которую положил Федя, n – положительное число процентов комиссии, меньше **30**. Из уравнения находим: $X=847 \cdot 100/(100-n)$. При $n < 30$ (т.е. при $100-n > 70$) число $100/(100-n) < 1$. Число **847** раскладывается на **7** в первой степени и **11** во второй степени. Таким образом, чтобы X было целым нужно, чтобы число $100-n$ раскладывалось по степеням **7** и (или) **11**, не превышающим степени у числа **847**. Удовлетворяющим условию $n < 30$ является число $100-n=77=7 \cdot 11$. А количество денег, которое положил Федя = **1100**.

Ответ: 1100.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 1
9	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
6	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании выбора делителей или их степеней или величины процентов комиссии или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
3	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, составлено уравнение или приведена величина процентов комиссии); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, неверен выбор делителей или их степеней или не обоснована величина процентов комиссии). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 3 и 6 баллов.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ на рёбрах SA , SB и SC выбраны, соответственно, точки D , E и F так, что площадь треугольника ABE составляет $1/3$ от площади треугольника AES , площадь треугольника BCF составляет $1/4$ от площади треугольника BFS , площадь треугольника ACD составляет $1/5$ от площади треугольника DCS . Найти отношение объёмов пирамид $SDEF$ и $SABC$. (14 баллов).

Решение:

Пусть есть пирамида $SABC$ и на стороне SA точка D , $SD:SA=d$, на стороне SB точка E , $SE:SB=e$, на стороне SC точка F , $SF:SC=f$. Тогда отношение объёма $SDEF$ к объёму $SABC$ равно def . Действительно, "завалим" пирамиду набок, так, чтобы основанием стал треугольник SAB . Отношение площади треугольника SDE к площади SAB равно de . У пирамид $SDEF$ и $SABC$ высоты, опущенные из точек F и C соответственно, относятся как f . Поэтому отношение объёмов пирамид равно произведению отношения площадей оснований на отношение высот, т.е. def . Следовательно, $(3/4) \cdot (4/5) \cdot (5/6) = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 2
14	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании отношения площадей оснований и (или) высот пирамид или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, найдено отношение только площадей оснований или только высот пирамид); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, нахождение другого отношения элементов пирамид). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 10 баллов.

3. Дано **2015**-значное число, делящееся на **9**. Пусть сумма его цифр равна **a**, сумма цифр числа **a** равна **b**, сумма цифр числа **b** равна **c**. Найти число **c**. (14 баллов).

Решение:

Сумма цифр любого числа при делении на **9** дает тот же остаток, что и само число.

Самое большое 2015-значное число состоит из 2015 9-к. Сумма его цифр **a** равна $2015 \cdot 9 = 18135$, т.е. в нем 5 знаков.

Сумма цифр числа самого большого 5-значного числа **a** равна 45 (**b**).

Числа, меньшие 45 и делящиеся на 9 будут 9, 18, 27, 36 и 45. Сумма их цифр равна 9.

Ответ: 9.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 3
14	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
10	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании верхних оценок или возможных значений чисел a и (или) b или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
5	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, получена верхняя оценка только для числа a или только для числа b); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, нахождение другой верхней оценки). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 5 и 10 баллов.

4. Сколькими способами на первой линии шахматной доски можно расположить двух коней, двух слонов, две ладьи, ферзя и короля, чтобы были выполнены следующие условия:

- 1) Слоны стоят на клетках одного цвета;
- 2) Ферзь и король стоят на соседних клетках. (20 баллов).

Решение:

Занумеруем клетки первой линии шахматной доски по порядку слева направо числами от **1** до **8** (**1** – это первая клетка белого цвета, **8** – это последняя клетка чёрного цвета). Так как ферзь и король стоят рядом, значит, они могут занимать одну из 7 позиций: **1-2, 2-3, ..., 7-8**. Кроме того, на каждой позиции мы можем менять их местами (то есть на позиции **1-2** сначала поставить короля, потом ферзя и наоборот). Итого у нас будет $2 \cdot 7 = 14$ способов расставить ферзя и короля на первой линии шахматной доски так,

чтобы они стояли рядом. Теперь посмотрим, как можно поставить слонов. Допустим, что мы поставили куда-либо ферзя и короля (например, на позиции 4-5). Заметим, что как бы мы не поставили ферзя и короля, то клеток каждого цвета у нас остаётся по 3: 3 белых и 3 чёрных. Для того, чтобы расположить слонов мы должны выбрать цвет клетки – это 2 варианта. А дальше у нас есть 3 позиции, на которые мы хотим поставить двух слонов (число сочетаний из 3 по 2). Это можно сделать тремя способами. Итого получаем $2 \cdot 3 = 6$ способов расположить двух слонов на клетки одного цвета при фиксированной позиции короля и ферзя. У нас осталось 4 клетки, на которые нужно поставить два коня и две ладьи. То есть нам надо выбрать 2 места из 4, на которые встанут ладьи, а кони встанут на оставшиеся 2 места. Выбрать 2 клетки из четырёх можно 6 способами (число сочетаний из 4 по 2). Итого получаем 6 – это количество способов расстановки двух ладьей и двух коней на 4 позициях в произвольном порядке. Так как мы фиксировали позиции последовательно, то работает правило перемножения. Итоговое количество способов расставить фигуры $N = 14 \cdot 6 \cdot 6 = 504$.

Ответ: 504.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания № 4
20	Приведена верная и обоснованная последовательность всех шагов решения. Верно выполнены все преобразования и вычисления. Получен верный ответ.
14	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущены пробелы в обосновании числа способов расстановки фигур (например, ладей и коней), или различимость фигур в одной паре, или вычислительная ошибка или описка, не влияющие на дальнейший ход решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
7	Задача не решена, но ее решение значительно продвинуто, т.е.: - существенная часть решения выполнена верно, возможно, неточно (например, найдено число способов расстановки короля, ферзя, а также или только слонов или только ладей и коней; задача решена отдельно только с условием №1 и только с условием №2); - другая часть либо не выполнена, либо выполнена неверно, возможно, даже с логическими ошибками (например, найдено число способов расстановки только ладей и коней или только слонов). При этом решение может быть не завершено.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок в 7 и 14 баллов.

5. Страна Омега выращивает и потребляет только овощи и фрукты. Известно, что в 2014 году в стране Омега было выращено 1200 тонн овощей и 750 тонн фруктов. В 2015 году было выращено 900 тонн овощей и 900 тонн фруктов. В течение года цена одной тонны овощей выросла с 90 до 100 тыс. руб., а цена одной тонны фруктов снизилась с 75 до 70 тыс.руб.. На сколько (в %) изменился реальный ВВП этой страны в 2015 году, если за базовый год в Омеге принят 2014 год? Ответ округлите до сотых. Если реальный ВВП страны снизился, то в ответе ставьте знак минус, а если увеличился, то – знак плюс. (12 баллов).

Решение:

$$ВВП_{ном.2014}=1200*90+750*75=108000+56250=164250$$

$$ВВП_{реал.2015}=900*90+900*75=81000+67500=148500$$

Тогда реальный ВВП страны снизился на $100(1-148500/164250)=9,59\%$.

Ответ: -9,59%.

Критерии оценивания:

1) Верно вычислен номинальный (реальный) ВВП в 2014 г: 3 балла. Если допущена арифметическая ошибка при вычислении номинального (реального) ВВП в 2014 г, то ставится 2 балла

2) Верно вычислен реальный ВВП в 2015 г: 4 балла. Если допущена арифметическая ошибка при вычислении реального ВВП в 2015 г, то ставится 3 балла.

3) Верно вычислено на сколько (в %) изменился реальный ВВП: 5 баллов. Если допущена ошибка при округлении итогового ответа, то ставится 4 балла.

б. Предложение на конкурентном рынке некоторого товара может быть описано функцией $Q^S(p)=2+8p$ (где Q - объем продаж, p – цена единицы продукции). Известно, что при цене 2 д.ед. покупатели были готовы приобрести не более 8 единиц продукции, а при цене 3 д.ед, - не более 6 единиц продукции, причем кривая спроса имеет линейный вид.

а) Какова будет цена продукции, и какой ее объем будет продан в равновесии?

б) Чтобы увеличить потребление этой продукции государство ввело потоварную субсидию для ее производителей в размере $s=1$ за каждую единицу производимого товара. На сколько единиц продукции увеличится объем продаж? (14 баллов).

Решение:

Найдем функцию спроса. Пусть $Q^D=kr+b$. Имеем $8=2k+b$, $6=3k+b$. Получаем $k=-2$, $b=12$, т.е. $Q^D(p)=-2p+12$.

а) Равновесие на рынке: $Q^D(p)=Q^S(p)$, $-2p+12=2+8p$, $p^*=1$, $Q^*=10$.

б) $s=1$, т.е. $Q^S(p)=2+8(p+1)$. Имеем $Q^D(p)=Q^S(p)$, т.е. $p^{**}=2/10=0,2$, $Q^{**}=11,6$. Тогда объем продаж увеличился на $11,6-10=1,6$ единиц.

Ответ: а) $p^*=1, Q^*=10$; б) на 1,6 единиц.

Критерии оценивания:

а)

1) Верно найдена функция спроса: 4 балла

2) Верно найдено равновесие (цена и объем продукции): 3 балла. Если допущена арифметическая ошибка при нахождении равновесия, то ставится 2 балла

б)

- 1) Верно учтена реакция рынка на введение субсидии: 4 балла
- 2) Верно найдено новое равновесное количество товара: 2 балла. Если допущена арифметическая ошибка при нахождении равновесного объема продаж, то ставится 1 балл.
- 3) Верно вычислено изменение объема продаж: 1 балл

7. В своей стране Милнляндии Винни-Пух решил открыть фирму, которая занимается производством меда. Винни-Пух продает мед только горшочками и на выпуск любого горшочка с медом Винни-Пух тратит 10 милнов (денежных единиц Милнляндии). Обратная функция спроса на мед имеет вид $P=310-3Q$ (где Q - количество горшочков, P – цена одного горшочка). Других поставщиков меда нет.

а) Какое количество горшочков с медом будет производить Винни-Пух, если его главная задача - максимизация прибыли.

б) Правительство Милнляндии решило ввести налог t милнов с каждого горшочка меда, который продает фирма Винни-Пууха. Какова должна быть величина налога, чтобы в бюджет Милнляндии поступила максимальная величина налоговых поступлений от продажи меда? (17 баллов).

Решение:

$$а) Profit = P(Q) \cdot Q - TC(Q) = (310 - 3Q) \cdot Q - 10 \cdot Q = 310Q - 3Q^2 - 10Q = 300Q - 3Q^2.$$

Поскольку график функции $300Q - 3Q^2$ - парабола с ветвями вниз, то ее максимум достигается в вершине: $Q = -b/2a = -300/(-6) = 50$.

б) Винни-Пух максимизирует величину $P(Q) \cdot Q - TC(Q) = (310 - 3Q) \cdot Q - 10 \cdot Q - tQ = (300 - t)Q - 3Q^2$, $Q = (300 - t)/6$. Государство получает денежную сумму в виде налоговых поступлений $Q \cdot t = (300 - t)/6 \cdot t = (50 - 1/6 \cdot t) \cdot t = -1/6 \cdot t^2 + 50t$. График этой функции - парабола с ветвями вниз, ее максимум достигается при $t = -50/(-2/6) = 50 \cdot 6/2 = 50 \cdot 3 = 150$.

Ответ: а) 50; б) 150.

Критерии оценивания:

а)

- 1) Верно сформулирована задача максимизации прибыли единственного производителя: 3 балла
- 2) Верно найдено и обосновано решение поставленной задачи максимизации прибыли: 4 балла. Отсутствие обоснования достижения максимального значения в точке экстремума влечет снижение оценки на 1 балл.

б)

- 1) Верно учтены последствия введения налога на прибыль единственного производителя: 3 балла
- 2) Верно найдена величина налога: 7 баллов. Если допущена арифметическая ошибка при вычислении налога, то ставится 6 баллов.