7-9 классы

БИЛЕТ № 04

Задание 1:

Вопрос: Высокая вертикальная молния ударила в землю на расстоянии 880 м от наблюдателя, который слышал звук грома от нее в течении 3 с. Какова была высота молнии? Скорость звука в воздухе считайте равной 330 м/с.

Задача: Робот, снабженный ультразвуковым локатором (источником и приемником ультразвуковых импульсов), движется с постоянной скоростью к стене зала. Источник локатора излучает импульсы длительностью $\tau_0 = (20{,}000 \pm 0{,}002)$ мс. Приемник локатора фиксирует отраженные от стены импульсы длительностью $\tau \approx (19{,}940 \pm 0{,}003)$ мс. С какой скоростью движется робот? Оцените величину погрешности определения скорости таким методом, связанную с неточностью измерения длительности импульсов. Считать, что скорость ультразвука в воздухе при условиях, соответствующих измерению, $u \approx 1470{,}0 \pm 0{,}1$м/с.

Ответ на вопрос: С учетом малости времени разряда, можно прийти к заключению, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии, разделенную на скорость звука $\tau \approx \frac{r_{\max} - r_{\min}}{V_s}$. Ближайшей является нижняя точка вертикального ствола: $r_{\min} = l = 880$м, а самой удаленной – верхняя: $r_{\max} = \sqrt{l^2 + h^2}$. Следовательно, $h \approx V_s \tau \sqrt{1 + \frac{2l}{V_s \tau}} = 1650$м.

Указано, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии	**3**
Указано (используется в решении) $r_{\min}$	**2**
Указано (используется в решении) $r_{\max}$	**2**
Получен правильный ответ для h (достаточно числа)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Каждому участку импульса нужно пройти со скоростью u расстояние l до стенки, и расстояние до встречи с роботом, то есть $ut = l + l - Vt$. Значит, ультразвук, излучаемый локатором робота, движущегося со скоростью V к стенке, в момент, когда он находился на расстоянии l от нее, вернется к приемнику спустя время $t = \frac{2l}{u+V}$. Поэтому длительность принимаемого импульса определяется длительностью излучаемого и разностью времен движения начала и конца импульса: $\tau = \tau_0 + t_к - t_н = \tau_0 + \frac{2(l - V\tau_0)}{u+V} - \frac{2l}{u+V} = \frac{u-V}{u+V}\tau_0$. Следовательно, $V = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau + \tau_0} u \approx 2{,}21$м/с. При оценке погрешности (например, характерным для школы интервальным методом) самое важное – чтобы школьник понимал, что погрешность определения скорости связана в первую очередь с погрешностью вычисления разности длительностей импульсов: $\tau_0 - \tau \approx (0{,}060 \pm 0{,}005)$ мс. Относительная ошибка результата близка к $\frac{0{,}005}{0{,}060} = 8\%$! Таким образом, $\delta V \approx \frac{1}{12} V \approx 0{,}18$м/с. Ответ: $V = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau + \tau_0} u \approx (2{,}21 \pm 0{,}18)$ м/с.

Правильно получена формула для времени «путешествия» ультразвука t	**3**
Длительность принимаемого импульса считается как $\tau = \tau_0 + t_к - t_н$	**2**
Получена правильная связь V, u, τ_0 и τ (в любой форме)	**3**
Получен правильный аналитический ответ для V	**2**
Получен правильный численный ответ для V	**2**
Корректно оценена погрешность, причем $0{,}1 \le \delta V \le 0{,}25$	**1+2=3**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: На бортах судов с большим водоизмещением можно увидеть линии, отмечающие допустимые глубины погружения (ватер-линии, соответствующие максимальной допустимой загрузке). Если судно ходит в море и по рекам, таких линии три. Занумеруем их сверху вниз: 1,2 и 3. Эти линии предназначены для летнего моря, зимнего моря, и для рек. Какая из них – для чего именно? Ответ обосновать. Массу максимальной загрузки считать одинаковой во всех случаях.

Задача: В сосуд с водой опустили цилиндр из дерева с плотностью $\rho_1 = 0{,}7$ г/см^3, к которому тонким слоем клея был приклеен груз из алюминия с плотностью $\rho_2 = 2{,}7$ г/см^3. Когда цилиндр с грузом были целиком помещены в воду, то уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 2$ см по сравнению с первоначальным, причем они оставались неподвижны под водой, не касаясь дна и стенок сосуда. Спустя некоторое время клей размок, и груз отделился от цилиндра. Как и на сколько изменится уровень воды в сосуде на этот раз (по сравнению с предыдущим, к моменту установления равновесия). Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Ответ на вопрос: В состоянии равновесия сила тяжести, действующая на корабль и груз, уравновешивается архимедовой силой $mg = F_A = \rho V_n g$, и поэтому объем погруженной части корабля обратно пропорционален плотности воды $V_n = \dfrac{m}{\rho}$. Плотность соленой воды выше, чем у пресной, а плотность холодной соленой воды больше, чем плотность теплой (максимум плотности жидкой воды достигается при температуре около 4°C). Поэтому максимальная осадка при данном грузе (отметка 1) отвечает рекам, средняя (отметка 2) – летнему морю, минимальная (отметка 3) – зимнему морю.

Использованы закон Архимеда и условие равновесия	**1+1=2**
Указано, что объем погруженной части корабля обратно пропорционален плотности воды (или есть эквивалентное утверждение)	**2**
Указано, что плотность соленой воды выше, чем у пресной, а плотность холодной соленой воды больше, чем плотность теплой	**1+2=3**
Правильно названа принадлежность всех трех отметок	**1+1+1=3**
ВСЕГО	**10**

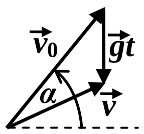
Решение задачи: Когда цилиндр и груз были вместе погружены под воду, общий объем вытесненной воды был равен сумме их объемов: $Sh_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_2}{\rho_2}$. ($S$ – площадь сечения сосуда). Так как они находились под водой в равновесии, не касаясь стенок и дна, то сила Архимеда уравновешивала силу тяжести: $(m_1 + m_2)g = \rho\left(\dfrac{m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_2}{\rho_2}\right)g$, и поэтому $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_1}\dfrac{\rho_2}{\rho_2 - \rho}$. Подставляя это соотношение в первое уравнение, находим, что $Sh_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1}\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho}$. После разделения груза и цилиндра груз опускается на дно, и он вытесняет прежний объем воды, а цилиндр плавает на поверхности, и теперь вытесняемый им из-под поверхности воды объем равен $\dfrac{m_1}{\rho}$. Значит, уровень воды по сравнению с предыдущим состоянием опустится, причем $S\Delta h = \dfrac{m_1}{\rho} - \dfrac{m_1}{\rho_1} = -\dfrac{m_1}{\rho_1}\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho}$. Значит, $\dfrac{\Delta h}{h_1} = -\dfrac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho}$. Таким образом, $\Delta h = -\dfrac{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_2 - \rho_1)}h_1 = -0{,}51$ см. Ответ: уровень воды опустится на $-\Delta h = \dfrac{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}{\rho(\rho_2 - \rho_1)}h_1 \approx 0{,}5$ см.

Правильно записан объем вытесненной воды в первом случае	**2**
Используется условие равновесия цилиндра грузом в первом случае	**3**
Получено правильное уравнение для Sh_1 через массу m_1 и плотности	**3**
Получено правильное уравнение для $S\Delta h$ через массу m_1 и плотности	**3**
Указано, что во втором случае уровень воды опускается по сравнению с первым	**1**
Получен правильный аналитический ответ для Δh	**2**
Получен правильный численный ответ для Δh	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:
Вопрос: Камень бросили со скоростью 4 м/с под углом 60° к горизонту. Через какое время угол наклона вектора скорости к горизонту уменьшится в два раза? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.
Задача: Робот-пожарный направляет струю таким образом, чтобы попасть в мишень, находящуюся на расстоянии $L = 7{,}5$ м <u>по горизонтали</u> от выходного отверстия насадки брандспойта. Это отверстие по вертикали расположено выше мишени на $h = 2$ м. Струя попадает в мишень, если она

направляется горизонтально. Найдите величину еще одного угла наклона струи к горизонту, при котором струя тоже попадет в мишень. Сколько литров воды в секунду выбрасывает брандспойт этого робота, если площадь сечения выходного отверстия $S = 20$ см^2? При ответе на второй вопрос используйте величину ускорения свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Закон изменения скорости в векторной форме при движении с постоянным ускорением



$\vec{g}$ имеет вид $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Из полученного векторного треугольника (см. рисунок) находим, что $v\cos(30°) = v_0\cos(60°) \Rightarrow v = v_0/\sqrt{3}$. С другой стороны, $gt = v_0\sin(60°) - v\sin(30°)$, откуда $t = \dfrac{v_0}{g\sqrt{3}} \approx 0{,}23$с.

Используется закон изменения скорости в векторной или компонентной форме	**2**
Изображен треугольник скоростей или записаны все необходимые алгебраические соотношения	**3**
Конечная скорость выражена через начальную	**2**
Получен правильный ответ для t (достаточно числа)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки. Закон движения порции воды в этой системе координат позволяет найти уравнение ее траектории:

$$\left\{\begin{aligned} x(t) &= v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) &= v_0\sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}(\alpha)x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)].$$

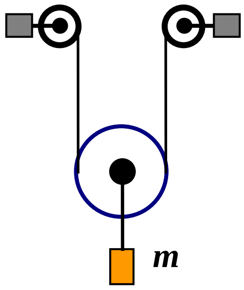
Для точки падения $-h = l\cdot\mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$.По условию, один из корней этого уравнения $\alpha = 0$, и поэтому $v_0^2 = \dfrac{gl^2}{2h}$. Для второго корня получается уравнение $l - \dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}(\alpha) = 0$, из которого $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{l}{h} = 3{,}75$. Таким образом, $\alpha = arctg(3{,}75) \approx 75°$. Расход воды брандспойта $q = v_0 S = lS\sqrt{\dfrac{g}{2h}} \approx 24$ л/с.

Правильно записан закон движения порции воды	**2**
Правильно записано уравнение траектории для точки падения	**2**
Получено правильное уравнение для v_0	**3**
Записано правильное уравнение для ненулевого значения α	**2**
Получен правильный аналитический ответ для α или $\mathrm{tg}(\alpha)$	**2**
Получен правильный численный ответ для α (можно в форме арктангенса)	**1**
Получен правильный аналитический ответ для q	**2**
Получен правильный численный ответ для q	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: Сила, с которой ротор электродвигателя натягивает трос, наматывающийся на вал ротора, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке ротора. Пусть электродвигатель поднимает равномерно груз 1, и при этом сила тока в обмотке ротора 1 А. При равномерном подъеме груза 2 тем же двигателем, подключенным к тому же аккумулятору постоянного тока, сила тока в обмотке равна 2 А. Какой из грузов поднимается с большей скоростью? Ответ объяснить.

Задача: Два разных электродвигателя подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 24$В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Когда груз массой $m=5$ кг поднимают вертикально на легком тросе двигателем 1, установившаяся скорость подъема равна $v_1=1{,}5$ м/с при силе тока в обмотке ротора $I_1=3$ А. При использовании двигателя 2 $v_2=2{,}5$ м/с при $I_2=3{,}25$ А. Какой будет установившаяся скорость подъема, если поднимать этот груз сразу обоими двигателями, которые параллельно подключены к тому же аккумулятору с использованием схемы подъема, показанной на рисунке (общий легкий нерастяжимый трос перекинут через легкий равноплечий подвижный блок без трения в оси)?



Ответ на вопрос: Работа сторонних сил источника с ЭДС $\mathcal{E}$ идет на механическую работу двигателя, перемещающего груз силой F со скоростью v, и на компенсацию тепловых потерь на сопротивлении контура обмотки ротора R, то есть $\mathcal{E}\cdot I=RI^2+F\cdot v$. Если $F=kI$, то $v=\dfrac{\mathcal{E}-RI}{k}$, то есть установившаяся скорость больше при меньшем токе. Значит, большая скорость у первого груза.

Верно указаны слагаемые, входящие в уравнение энергетического баланса	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса двигателя	**3**
Получено верное уравнение, связывающее скорость и силу тока	**2**
Дан верный ответ на вопрос	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: При равномерном подъеме груза сила натяжения троса должна равняться по величине силе тяжести, действующей на груз, то есть $F=mg$. Запишем уравнение энергетического баланса для подъема груза первым электродвигателем: $\mathcal{E}\cdot I_1=R_1I_1^2+mg\cdot v_1$. При этом $I_1=\dfrac{mg}{k_1}$. Аналогично для подъема вторым электродвигателем $\mathcal{E}\cdot I_2=R_2I_2^2+mg\cdot v_2$, и $I_2=\dfrac{mg}{k_2}$. При подъеме груза обоими электродвигателями с помощью подвижного блока сила натяжения троса $T=\dfrac{mg}{2}=k_1I_1'=k_2I_2'$, поэтому токи в обмотках роторов двигателей $I_1'=\dfrac{1}{2}I_1$ и $I_2'=\dfrac{1}{2}I_2$. Значит, уравнение энергетического баланса при третьем подъеме $\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1+I_2}{2}=\dfrac{1}{4}R_1I_1^2+\dfrac{1}{4}R_1I_1^2+mg\cdot v$. Выразим сопротивления обмоток из первых двух уравнений: $R_1=\dfrac{\mathcal{E}-k_1v_1}{I_1}=\dfrac{\mathcal{E}}{I_1}-mg\dfrac{v_1}{I_1^2}$ (и $R_2=\dfrac{\mathcal{E}-k_2v_2}{I_2}=\dfrac{\mathcal{E}}{I_2}-mg\dfrac{v_2}{I_2^2}$), и подставим их в третье. В результате получим, что $\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1+I_2}{2}=\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1}{4}-mg\dfrac{v_1}{4}+\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_2}{4}-mg\dfrac{v_2}{4}+mg\cdot v$. Значит, $v=\dfrac{v_1+v_2}{4}+\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1+I_2}{4mg}=1{,}75$ м/с.

Правильно записано уравнение энергетического баланса для первого подъема	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для второго подъема	**2**
Указано, что в третьем случае двигатели создают одинаковое натяжение троса, равное $mg/2$	**1**
Указано, что $I_1'=I_1/2$ и $I_2'=I_2/2$	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для третьего подъема	**2**
Из этого уравнения исключены сопротивления обмоток и получено уравнение для v	**3**
Получен правильный аналитический ответ для v	**2**
Получен правильный численный ответ для v	**1**
ВСЕГО	**15**

БИЛЕТ № 05

Задание 1:

Вопрос: Высокая вертикальная молния ударила в землю на расстоянии 1320 м от наблюдателя, который слышал звук грома от нее в течении 4,5 с. Какова была высота молнии? Скорость звука в воздухе считайте равной 330 м/с.

Задача: Робот, снабженный ультразвуковым локатором (источником и приемником ультразвуковых импульсов), движется с постоянной скоростью от стены зала. Источник локатора излучает импульсы длительностью $\tau_0 = (25{,}000 \pm 0{,}003)$ мс. Приемник локатора фиксирует отраженные от стены импульсы длительностью $\tau \approx (25{,}070 \pm 0{,}004)$ мс. С какой скоростью движется робот? Оцените величину погрешности определения скорости таким методом, связанную с неточностью измерения длительности импульсов. Считать, что скорость ультразвука в воздухе при условиях, соответствующих измерению, $u \approx 1470{,}0 \pm 0{,}1$ м/с.

Ответ на вопрос: С учетом малости времени разряда, можно прийти к заключению, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии, разделенную на скорость звука $\tau \approx \dfrac{r_{\max} - r_{\min}}{V_s}$. Ближайшей является нижняя точка вертикального ствола: $r_{\min} = l = 880$ м, а самой удаленной – верхняя: $r_{\max} = \sqrt{l^2 + h^2}$. Следовательно, $h \approx V_s\tau\sqrt{1 + \dfrac{2l}{V_s\tau}} = 2475$ м.

Указано, что длительность грома примерно равна разности расстояний до самого далекого и самого близкого участка «ствола» молнии	**3**
Указано (используется в решении) $r_{\min}$	**2**
Указано (используется в решении) $r_{\max}$	**2**
Получен правильный ответ для h (достаточно числа)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Каждому участку импульса нужно пройти со скоростью u расстояние l до стенки, и расстояние до встречи с роботом, то есть $ut = l + l + Vt$. Значит, ультразвук, излучаемый локатором робота, движущегося со скоростью V к стенке, в момент, когда он находился на расстоянии l от нее, вернется к приемнику спустя время $t = \dfrac{2l}{u - V}$. Поэтому длительность принимаемого импульса определяется длительностью излучаемого и разностью времен движения начала и конца импульса: $\tau = \tau_0 + t_к - t_н = \tau_0 + \dfrac{2(l + V\tau_0)}{u - V} - \dfrac{2l}{u - V} = \dfrac{u + V}{u - V}\tau_0$. Следовательно, $V = \dfrac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}u \approx 2{,}06$ м/с. При <u>оценке</u> погрешности (например, характерным для школы интервальным методом) самое важное – чтобы школьник понимал, что погрешность определения скорости связана в первую очередь с погрешностью вычисления <u>разности</u> длительностей импульсов: $\tau - \tau_0 \approx (0{,}070 \pm 0{,}007)$ мс. Относительная ошибка результата близка к $\dfrac{0{,}007}{0{,}070} = 10\%$! Таким образом, $\delta V \approx \dfrac{1}{10}V \approx 0{,}21$ м/с. Ответ: $V = \dfrac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}u \approx (2{,}06 \pm 0{,}21)$ м/с.

Правильно получена формула для времени «путешествия» ультразвука t	**3**
Длительность принимаемого импульса считается как $\tau = \tau_0 + t_к - t_н$	**2**
Получена правильная связь V, u, τ_0 и τ (в любой форме)	**3**
Получен правильный аналитический ответ для V	**2**
Получен правильный численный ответ для V	**2**
Корректно оценена погрешность, причем $0{,}15 \le \delta V \le 0{,}3$	**1+2=3**
ВСЕГО	**15**

Задание 2:

Вопрос: Плотность самшита в 1,2 раза больше, чем у воды. Плотность липы в 1,2 раза меньше, чем у воды. Бруски равного объема из липы и самшита склеили тонким слоем клея и поместили в таз с водой. Что произойдет с таким составным бруском? Ответ обосновать.

Задача: В сосуд с водой опустили цилиндр из дерева с плотностью $0{,}5$ г/см^3, к которому тонким слоем клея был приклеен груз из титана с плотностью $\rho_2 = 4{,}5$ г/см^3. Когда цилиндр с грузом были целиком помещены в воду, то уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 3{,}2$ см по сравнению с первоначальным, причем они оставались неподвижны под водой, не касаясь дна и стенок сосуда. Спустя некоторое время клей размок, и груз отделился от цилиндра. Как и на сколько изменится уровень воды в сосуде на этот раз (по сравнению с предыдущим, к моменту установления равновесия). Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Ответ на вопрос: Средняя плотность получившегося тела находится как отношение полной массы этого тела $m = V\cdot 1{,}2\rho + V\cdot\rho/1{,}2 = \frac{61}{30}\rho V$ (ρ – плотность воды) к полному объему $2V$. Поэтому $\rho_{ср} = \frac{61}{60}\rho > \rho$. Значит, составной брусок утонет.

Использовано сравнение средней плотности с плотностью воды или силы Архимеда с силой тяжести	**2**
Верно найдены полная масса и полный объем составного бруска	**2+1=3**
Верно определена средняя плотность или записано неравенство для сил	**3**
Сделан верный вывод о том, что составной брусок утонет	**2**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Когда цилиндр и груз были вместе погружены под воду, общий объем вытесненной воды был равен сумме их объемов: $Sh_1 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}$. ($S$ – площадь сечения сосуда). Так как они находились под водой в равновесии, не касаясь стенок и дна, то сила Архимеда уравновешивала силу тяжести: $(m_1+m_2)g = \rho\left(\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2}\right)g$, и поэтому $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho-\rho_1}{\rho_1}\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho}$. Подставляя это соотношение в первое уравнение, находим, что $Sh_1 = \frac{m_1}{\rho_1}\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2-\rho}$. После разделения груза и цилиндра груз опускается на дно, и он вытесняет прежний объем воды, а цилиндр плавает на поверхности, и теперь вытесняемый им из-под поверхности воды объем равен $\frac{m_1}{\rho}$. Значит, уровень воды по сравнению с предыдущим состоянием опустится, причем $S\Delta h = \frac{m_1}{\rho} - \frac{m_1}{\rho_1} = -\frac{m_1}{\rho_1}\frac{\rho-\rho_1}{\rho}$. Значит, $\frac{\Delta h}{h_1} = -\frac{\rho_2-\rho}{\rho_2-\rho_1}\frac{\rho-\rho_1}{\rho}$. Таким образом, $\Delta h = -\frac{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}{\rho(\rho_2-\rho_1)}h_1 = -1{,}125$ см. Ответ: уровень воды опустится на $-\Delta h = \frac{(\rho_2-\rho)(\rho-\rho_1)}{\rho(\rho_2-\rho_1)}h_1 \approx 1{,}1$ см.

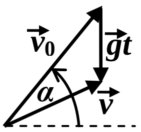
Правильно записан объем вытесненной воды в первом случае	**2**
Используется условие равновесия цилиндра грузом в первом случае	**3**
Получено правильное уравнение для Sh_1 через массу m_1 и плотности	**3**
Получено правильное уравнение для $S\Delta h$ через массу m_1 и плотности	**3**
Указано, что во втором случае уровень воды опускается по сравнению с первым	**1**
Получен правильный аналитический ответ для Δh	**2**
Получен правильный численный ответ для Δh	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 3:

Вопрос: Камень бросили со скоростью 3 м/с под углом 40° к горизонту. Через какое время угол наклона вектора скорости к горизонту уменьшится в два раза? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача: Робот-пожарный направляет струю таким образом, чтобы попасть в мишень, находящуюся на расстоянии $L = 10{,}2$ м <u>по горизонтали</u> от выходного отверстия насадки брандспойта. Это отверстие по вертикали расположено выше мишени на $h = 1{,}8$ м. Струя попадает в мишень, если она направляется горизонтально. Найдите величину еще одного угла наклона струи к горизонту, при котором струя тоже попадет в мишень. Сколько литров воды в секунду выбрасывает брандспойт этого робота, если площадь сечения выходного отверстия $S = 25$ см^2? При ответе на второй вопрос используйте величину ускорения свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ на вопрос: Закон изменения скорости в векторной форме при движении с постоянным ускорением



$\vec{g}$ имеет вид $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$. Из полученного векторного треугольника (см. рисунок) находим, что $v\cos(20°) = v_0\cos(40°) \Rightarrow v = v_0 \cdot \cos(40°)/\cos(20°)$. С другой стороны, $gt = v_0\sin(40°) - v\sin(20°)$, откуда $t = \dfrac{v_0}{g} tg(20°) \approx 0{,}11$с.

Используется закон изменения скорости в векторной или компонентной форме	**2**
Изображен треугольник скоростей или записаны все необходимые алгебраические соотношения	**3**
Конечная скорость выражена через начальную	**2**
Получен правильный ответ для t (достаточно числа или записи через тангенс)	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: Введем систему координат, в которой ось x направлена горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совмещено с концом трубки. Закон движения порции воды в этой системе координат позволяет найти уравнение ее траектории:

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)t \\ y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \mathrm{tg}(\alpha)\cdot x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} = \mathrm{tg}(\alpha)x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)].$$

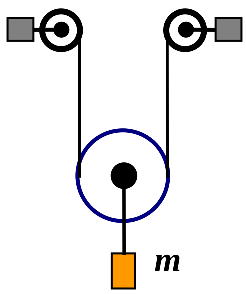
Для точки падения $-h = l\cdot\mathrm{tg}(\alpha) - \dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}[1+\mathrm{tg}^2(\alpha)]$. По условию, один из корней этого уравнения $\alpha = 0$, и поэтому $v_0^2 = \dfrac{gl^2}{2h}$. Для второго корня получается уравнение $l - \dfrac{g\,l^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}(\alpha) = 0$, из которого $\mathrm{tg}(\alpha) = \dfrac{l}{h} = \dfrac{17}{3}$. Таким образом, $\alpha = arctg\left(\dfrac{17}{3}\right) \approx 80°$. Расход воды брандспойта $q = v_0 S = lS\sqrt{\dfrac{g}{2h}} \approx 43$ л/с.

Правильно записан закон движения порции воды	**2**
Правильно записано уравнение траектории для точки падения	**2**
Получено правильное уравнение для v_0	**3**
Записано правильное уравнение для ненулевого значения α	**2**
Получен правильный аналитический ответ для α или $\mathrm{tg}(\alpha)$	**2**
Получен правильный численный ответ для α (можно в форме арктангенса)	**1**
Получен правильный аналитический ответ для q	**2**
Получен правильный численный ответ для q	**1**
ВСЕГО	**15**

Задание 4:

Вопрос: Сила, с которой ротор электродвигателя натягивает трос, наматывающийся на вал ротора, прямо пропорциональна силе тока, текущего в обмотке ротора. Пусть электродвигатель поднимает равномерно груз 1, и при этом сила тока в обмотке ротора 3 А. При равномерном подъеме груза 2 тем же двигателем, подключенным к тому же аккумулятору постоянного тока, сила тока в обмотке равна 2 А. Какой из грузов поднимается с большей скоростью? Ответ объяснить.

Задача: Два разных электродвигателя подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 30$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Когда груз массой $m = 6$ кг поднимают вертикально на легком тросе двигателем 1, установившаяся скорость подъема равна $v_1 = 1{,}8$ м/с при силе тока в обмотке ротора $I_1 = 2{,}5$ А. При использовании двигателя 2 $v_2 = 3{,}2$ м/с при $I_2 = 3$ А. Какой будет установившаяся скорость подъема, если поднимать этот груз сразу обоими двигателями, которые параллельно подключены к тому же аккумулятору с использованием схемы подъема, показанной на рисунке (общий легкий нерастяжимый трос перекинут через легкий равноплечий подвижный блок без трения в оси)?



Ответ на вопрос: Работа сторонних сил источника с ЭДС $\mathcal{E}$ идет на механическую работу двигателя, перемещающего груз силой F со скоростью v, и на компенсацию тепловых потерь на сопротивлении контура обмотки ротора R, то есть $\mathcal{E}\cdot I = RI^2 + F\cdot v$. Если $F = kI$, то $v = \dfrac{\mathcal{E} - RI}{k}$, то есть установившаяся скорость больше при меньшем токе. Значит, большая скорость у второго груза.

Верно указаны слагаемые, входящие в уравнение энергетического баланса	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса двигателя	**3**
Получено верное уравнение, связывающее скорость и силу тока	**2**
Дан верный ответ на вопрос	**3**
ВСЕГО	**10**

Решение задачи: При равномерном подъеме груза сила натяжения троса должна равняться по величине силе тяжести, действующей на груз, то есть $F = mg$. Запишем уравнение энергетического баланса для подъема груза первым электродвигателем: $\mathcal{E}\cdot I_1 = R_1 I_1^2 + mg\cdot v_1$. При этом $I_1 = \dfrac{mg}{k_1}$. Аналогично для подъема вторым электродвигателем $\mathcal{E}\cdot I_2 = R_2 I_2^2 + mg\cdot v_2$, и $I_2 = \dfrac{mg}{k_2}$. При подъеме груза обоими электродвигателями с помощью подвижного блока сила натяжения троса $T = \dfrac{mg}{2} = k_1 I_1' = k_2 I_2'$, поэтому токи в обмотках роторов двигателей $I_1' = \dfrac{1}{2} I_1$ и $I_2' = \dfrac{1}{2} I_2$. Значит, уравнение энергетического баланса при третьем подъеме $\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1 + I_2}{2} = \dfrac{1}{4} R_1 I_1^2 + \dfrac{1}{4} R_1 I_1^2 + mg\cdot v$. Выразим сопротивления обмоток из первых двух уравнений: $R_1 = \dfrac{\mathcal{E} - k_1 v_1}{I_1} = \dfrac{\mathcal{E}}{I_1} - mg\dfrac{v_1}{I_1^2}$ (и $R_2 = \dfrac{\mathcal{E} - k_2 v_2}{I_2} = \dfrac{\mathcal{E}}{I_2} - mg\dfrac{v_2}{I_2^2}$), и подставим их в третье. В результате получим, что $\mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1 + I_2}{2} = \mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1}{4} - mg\dfrac{v_1}{4} + \mathcal{E}\cdot\dfrac{I_2}{4} - mg\dfrac{v_2}{4} + mg\cdot v$. Значит, $v = \dfrac{v_1 + v_2}{4} + \mathcal{E}\cdot\dfrac{I_1 + I_2}{4mg} \approx 1{,}94$ м/с.

Правильно записано уравнение энергетического баланса для первого подъема	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для второго подъема	**2**
Указано, что в третьем случае двигатели создают одинаковое натяжение троса, равное $mg/2$	**1**
Указано, что $I_1' = I_1/2$ и $I_2' = I_2/2$	**2**
Правильно записано уравнение энергетического баланса для третьего подъема	**2**
Из этого уравнения исключены сопротивления обмоток и получено уравнение для v	**3**
Получен правильный аналитический ответ для v	**2**
Получен правильный численный ответ для v	**1**
ВСЕГО	**15**