

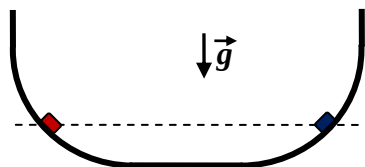
10-11 классы

БИЛЕТ № 01

Задание 1:

Вопрос: Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной плоскости, налетает на такую же покоящуюся шайбу, и происходит косой упругий удар. Найдите угол разлета шайб после удара.

Задача: Две маленькие шайбы с разными массами отпускают без начальных скоростей с одинаковой высоты $h = 25\text{см}$ в яме-«полутрубе» с гладкими стенками (форма которых – четверть цилиндра с вертикальным продолжением сверху), гладко переходящими в гладкое горизонтальное дно (см. рисунок). На горизонтальном дне ямы произошел упругий косой удар, в результате которого более тяжелая шайба уменьшила свою скорость в два раза и развернулась на 90° . На



какую максимальную высоту поднимется более легкая шайба по стене ямы (высота стенки больше этой высоты, а ее длина такова, что шайбы не покидают ямы за время подъема).

Ответ на вопрос: Запишем законы сохранения энергии и импульса для упругого удара двух одинаковых шайб с начальными скоростями v_0 и 0 и конечными скоростями v и V соответственно: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = v^2 + V^2$ и $m\vec{v}_0 = m\vec{v} + m\vec{V} \Rightarrow v_0^2 = v^2 + V^2 + 2vV\cos(\vartheta)$. Здесь ϑ – искомый угол разлета шайб. Вычитая эти соотношения друг из друга, находим, что $vV\cos(\vartheta) = 0$. Так как скорости шайб после косого упругого удара не могут равняться нулю, то $\cos(\vartheta) = 0 \Rightarrow \vartheta = 90^\circ$.

Правильно записан закон сохранения энергии	2
Правильно записан (в векторной или в компонентной форме) закон сохранения импульса	2
Из этих соотношений получено правильное уравнение для угла разлета	3
Дан правильный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: Ясно (из закона сохранения механической энергии), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу. Направим ось x по направлению движения более тяжелой шайбы (массы M) до удара, а ось y – по направлению ее движения после удара (перпендикулярно x). Закон сохранения импульса в проекции на эти оси дает:

$$\begin{cases} Mv_0 - mv_0 = mv_x \\ 0 = M\frac{v_0}{2} + mv_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = (n-1)v_0 \\ v_y = -\frac{n}{2}v_0 \end{cases}$$

Здесь $n \equiv \frac{M}{m}$, а $\vec{v}$ – скорость более легкой шайбы после удара. Подставим эти соотношения в

уравнение закона сохранения энергии $\frac{(M+m)v_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2} + \frac{M(v_0/2)^2}{2}$. Получим, что

$n(5n-11) = 0$. Поскольку $M \neq 0$, то $n = 2,2$. Движение вдоль оси y не влияет на подъем шайбы на стенку ямы, а $v_x = 1,2 \cdot v_0$. Снова воспользуемся законом сохранения энергии: максимальная высота

подъема легкой шайбы на стенку ямы $h' = \frac{v_x^2}{2g} = 1,44 \cdot \frac{v_0^2}{2g} = 1,44h = 36\text{см}$.

Указано (используется в решении), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу	2
---	---

Правильно записан закон сохранения импульса для соударения шайб (в векторной или компонентной форме)	2
Правильно выражена скорость легкой шайбы после удара через n	3
Правильно записан закон сохранения энергии для соударения шайб	2
v_x правильно выражена через v_0	3
Получены правильные аналитический ($h' = 1,44h$) и численные ответы	2+1=3
ВСЕГО	15

Задание 2:

Вопрос: В сосуде под подвижным поршнем находится воздух с относительной влажностью 60%. Какой станет относительная влажность воздуха, если опустить поршень, уменьшив объем воздуха в 2 раза, не нарушая герметичности сосуда и поддерживая неизменной температуру его содержимого?

Задача: В хорошо загерметизированном помещении температура воздуха равна $t_0 = 21^\circ\text{C}$, а его относительная влажность $r_0 = 20,0\%$. В помещении включили обогреватель. Когда температура поднялась до $t_1 = 24^\circ\text{C}$, относительная влажность стала равна $r_1 = 16,8\%$. Какой станет относительная влажность воздуха в помещении при повышении температуры до $t_2 = 27^\circ\text{C}$? В интервале температур от $t_0 = 21^\circ\text{C}$ до $t_2 = 27^\circ\text{C}$ с удовлетворительной точностью зависимость давления насыщенного пара от температуры можно считать линейной.

Ответ на вопрос: Если конденсация водяного пара в процессе сжатия не начнется, то масса водяного пара останется неизменной. Тогда при изотермическом сжатии парциальное давление водяного пара будет расти обратно пропорционально объему, и к концу сжатия возрастет в 2 раза. Давление насыщенного водяного пара зависит только от температуры, и поэтому оно останется неизменным. Значит, в отсутствие конденсации относительная влажность возросла бы в 2 раза и составила 120%. Но это невозможно в устойчивом равновесном состоянии. Значит, на самом деле в процессе сжатия началась конденсация водяного пара, и в конечном состоянии пар насыщенный. Относительная влажность станет равна 100%.

Указано, что масса водяного пара может меняться только из-за конденсации	3
Указано, что в отсутствие конденсации давление росло бы обратно пропорционально объему	2
Указано (используется в решении), что давление насыщенного пара при постоянной температуре неизменно	2
Дан правильный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, давление паров воды массой m в помещении объемом V при температуре T равно $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара, согласно условию, можно записать в виде $p_n(T) = aT + b$. Поэтому относительная влажность воздуха $r(T) = \frac{mR}{\mu V} \frac{T}{aT+b}$, и можно заметить, что обратная величина является линейной функцией обратной абсолютной температуры: $\frac{1}{r} = A + B \frac{1}{T}$. Запишем эти соотношения для температур t_0 и t_1 : $\frac{1}{r_0} = A + B \frac{1}{T_0}$ и $\frac{1}{r_1} = A + B \frac{1}{T_1}$. Выразим из них коэффициенты зависимости $A = \frac{r_0 T_1 - r_1 T_0}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)}$ и $B = -\frac{T_0 T_1 (r_0 - r_1)}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)}$, и с их помощью вычисляем относительную влажность при t_2 : $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)} \left(r_0 T_1 - r_1 T_0 - \frac{T_0 T_1}{T_2} (r_0 - r_1) \right)$. В результате получаем:

$$r_2 = \frac{r_0 r_1 (T_1 - T_0) T_2}{T_2 (r_0 T_1 - r_1 T_0) - T_0 T_1 (r_0 - r_1)} \approx 14,5\%.$$

Допустимо частичное использование числовых данных: например, при подстановке значений температур $r_3 = \frac{50 r_0 r_1}{99 r_0 - 49 r_1} \approx 14,5\%$.

Давление паров выражено из уравнения Менделеева-Клапейрона	3
Используется формула линейной зависимости для $p_n(T)$	2
Записана линеаризованная связь r и температуры	3
Коэффициенты линейной зависимости выражены через данные задачи (аналитически или численно)	2+2=4
Записано выражение для r_2	1

Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	15

Задание 3:

Вопрос: Две горизонтальные трубы проложены параллельно, имеют одинаковую длину и одинаковое сечение почти по всей длине, кроме участка в середине, где у одной из труб имеется уширение (сечение трубы плавно увеличивается, а потом плавно уменьшается до первоначального значения). На вход обеих труб вода подается с одинаковой скоростью. В некоторый момент времени на вход труб одновременно попадают частицы краски, плывущие по течению, не касаясь стенок. В какой из труб (постоянного сечения или с уширением) частицы краски доплывут до конца трубы раньше? Сжимаемостью и вязкостью воды можно пренебречь. Ответ объяснить.

Задача: На конце шланга диаметром 3 см поставили коническую насадку длиной $l = 40$ см с диаметром выходного отверстия 1,5 см. Струю направляют горизонтально, а давление в шланге таково, что струя попадает в мишень, расположенную от выходного отверстия на расстоянии по горизонтали L и ниже по высоте на H . Известно, что $H = \frac{1}{7}L$ и что необходимое давление оказалось на $\Delta p = 27$ кПа больше атмосферного. Затем насадку поменяли на другую – такой же длины, но с диаметром выходного отверстия 1 см, и установили ее концом вверх под углом 45° к горизонту. Какое избыточное давление нужно создать в шланге теперь, чтобы струя по-прежнему попадала в мишень (положение выходного отверстия и мишени не изменились)? Плотность воды $\rho \approx 1$ г/см³, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с².

Ответ на вопрос: Для стационарного течения расход воды в каждом сечении постоянен. Так как сжимаемостью воды можно пренебречь, то это условие можно записать в виде $vS = \text{const}$. Значит, в области уширения вода (а вместе с ней и частицы краски) движутся медленнее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения. Поэтому до конца трубы частицы краски раньше доплывут в трубе постоянного сечения.

Указано, что расход воды в каждом сечении постоянен	3
Условие постоянства расхода используется в виде $vS = \text{const}$	2
Указано, что в области уширения вода и частицы краски движутся медленнее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения	2
Дан верный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: Поскольку струя попадает в мишень, то скорость ее выхода из насадки в первом случае определяется из соотношения $L = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow v_0^2 = \frac{gL^2}{2H}$. Так как расход воды при прохождении конической насадки в каждом сечении постоянен, то скорость воды на входе в насадку $V = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 v_0$. Перепад давлений можно определить из уравнения Бернулли (давление на выходе из насадки считаем равным атмосферному):

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 \Rightarrow \Delta p = \frac{\rho v_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4 \right] = \frac{15gL^2}{64H}.$$

Во втором случае для нахождения скорости

выхода воды из насадки запишем уравнение траектории «маленькой» порции воды

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = v'_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = v'_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y(x) = \text{tg}(\alpha) \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0'^2 \cos^2(\alpha)} = \text{tg}(\alpha)x - \frac{gx^2}{2v_0'^2} [1 + \text{tg}^2(\alpha)].$$

Для точки падения $-H = L \cdot \text{tg}(\alpha) - \frac{gL^2}{2v_0'^2} [1 + \text{tg}^2(\alpha)]$. По условию, $\alpha = 45^\circ$, и поэтому

$$v_0'^2 = \frac{gL^2}{2(L+H)}.$$

Скорость входа воды в насадку теперь $V' = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 v_0'$, а уравнение Бернулли

принимает вид $\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$. При прохождении насадки центр масс слоя поднимается на высоту $h_2 - h_1 \approx l \sin(\alpha)$. Значит, $\frac{\rho V'^2}{2} + p' = \frac{\rho v_0'^2}{2} + \rho gl \sin(\alpha) + p_0$, и

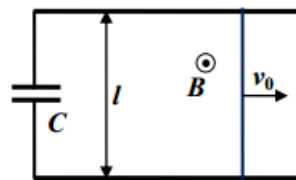
$$\Delta p' = \frac{\rho v_0'^2}{2} \left(1 - \frac{d_2^4}{d_0^4} \right) + \rho gl \sin(\alpha) = \frac{20}{81} \frac{gL^2}{L+H} + \rho gl \sin(\alpha) = \frac{256}{243} \frac{H}{L+H} \Delta p + \rho gl \sin(\alpha) \approx 6,4 \text{ кПа}.$$

Правильно определено v_0 (для первого случая)	1
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V = \left(\frac{d_1}{d_0} \right)^2 v_0$	2
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для первого случая	1
Получена формула, эквивалентная $\Delta p = \frac{15gL^2}{64H}$	2
Правильно определено v_0' (для второго случая)	2
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V' = \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^2 v_0'$	1
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для второго случая	2
Получена правильная формула для $\Delta p'$	2
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	15

Задание 4:

Вопрос: Проводящий стержень длиной $l = 1 \text{ м}$ движется в плоскости, перпендикулярной вектору индукции $B = 0,2 \text{ Тл}$ постоянного однородного магнитного поля со скоростью $v = 3 \text{ м/с}$. Вектор скорости перпендикулярен стержню. Найдите разность потенциалов на концах стержня.

Задача: Изучите возможность преобразования энергии, теряемой массивным телом при торможении, в энергию заряда конденсатора емкостью $C = 5 \text{ Ф}$. Дрезина массой $m = 10 \text{ т}$ движется со скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$, и опускает на горизонтальные сверхпроводящие шины проводящую перемычку длины $l = 1,2 \text{ м}$, замыкая цепь заряда конденсатора. Шины и перемычка находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 10 \text{ Тл}$. Трение перемычки о шины пренебрежимо мало. Найдите максимальный заряд конденсатора и КПД его зарядки до этого заряда (затратами считать потерю кинетической энергии дрeзины).



Ответ на вопрос: Свободные носители заряда в проводящем стержне будут перемещаться до тех пор, пока сила со стороны возникшего из-за их разделения электрического поля не уравновесит силу Лоренца: $eE = evB \Rightarrow E = vB$. Разность потенциалов между концами стержня $U = E \cdot l = vBl = 0,6 \text{ В}$.

Правильно указано условие прекращения движения носителей заряда в стержне (или высказана идея расчета разности потенциалов как ЭДС индукции в воображаемом контуре)	3
Получено уравнение $E = vB$ (или записан закон Фарадея)	3
Указано (используется в решении), что $U = E \cdot l$ (или получена формула для ЭДС индукции)	2
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	10

Решение задачи: При движении перемычки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции. В соответствии с законом Фарадея, величина этой ЭДС $E_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv$. Ток зарядки конденсатора в момент, когда его заряд $q = CU_C$ определяется из соотношения

$$I = \frac{E_i - U_C}{R} = \frac{Bl}{R} v - \frac{q}{CR}.$$

Ускорение дрeзины создается силой Ампера, действующей на

перемычку: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{IBl}{m}$. Заметим, что для любого малого интервала времени $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{Bl}{m} \frac{\Delta q}{\Delta t}$, то есть заряд растет, а скорость падает – пока ЭДС индукции не сравняется с напряжением на конденсаторе: $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$ (после этого заряд конденсатора перестанет расти, а скорость – уменьшаться). Кроме того, $\Delta v = -\frac{Bl}{m} \Delta q$, и, суммируя все малые изменения, находим:

$v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m} q_{\max}$. Из двух полученных уравнений для минимальной скорости и максимального заряда находим: $v_0 - v_{\min} = \frac{B^2 l^2 C}{m + B^2 l^2 C} v_0$, $q_{\max} = \frac{m B l v_0 C}{m + B^2 l^2 C} \approx 1119 \text{ Кл}$. Максимальная энергия

заряда конденсатора $E_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{m^2 B^2 l^2 C v_0^2}{2(m + B^2 l^2 C)^2}$, а потеря кинетической энергии дрезины

$$\Delta E_K = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_{\min}^2}{2} = \frac{m(2m + B^2 l^2 C) B^2 l^2 C v_0^2}{2(m + B^2 l^2 C)^2}, \quad \text{поэтому} \quad \text{КПД} \quad \text{зарядки}$$

$$\eta = \frac{E_{\max}}{\Delta E_K} = \frac{m}{2m + B^2 l^2 C} \approx 48\%. \text{ В целом можно заметить, что вообще максимальное возможное}$$

значение КПД близко к 50% при $B^2 l^2 C \ll m$. Можно также заметить, что $v_0 - v_{\min} \approx 0,067 \cdot v_0$, то есть зарядка одного конденсатора в таком режиме тормозит дрезину лишь на небольшую часть скорости (а при существенном торможении заметно уменьшается КПД зарядки), поэтому в реальности имеет смысл использовать большое количество последовательно заряжаемых конденсаторов.

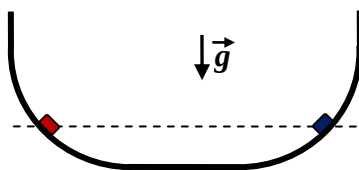
Правильно определена ЭДС индукции в перемычке	1
Правильно записана связь тока в перемычке со скоростью и зарядом конденсатора	2
Правильно записано уравнение движения дрезины	2
Записано условие баланса напряжений для установившегося режима, эквивалентное $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$	2
Получено соотношение, эквивалентное $v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m} q_{\max}$	3
Правильно найден максимальный заряд конденсатора (формула или число)	2
Правильно найдены максимальное значение энергии конденсатора и изменение кинетической энергии дрезины	1+1=2
Получен правильный численный ответ для КПД зарядки (в интервале от 47% до 50%)	1
ВСЕГО	15

БИЛЕТ № 02

Задание 1:

Вопрос: Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной плоскости, налетает на покоящуюся шайбу, и происходит лобовой упругий удар. При каких значениях отношения масс шайб величина скорости налетающей шайбы уменьшается в два раза?

Задача: Две маленькие шайбы с разными массами отпускают без начальных скоростей с одинаковой



высоты $h = 25 \text{ см}$ в яме–«полутрубе» с гладкими стенками (форма которых – четверть цилиндра с вертикальным продолжением сверху), гладко переходящими в гладкое горизонтальное дно (см. рисунок). На горизонтальном дне ямы произошел упругий косой удар, в результате которого более тяжелая шайба уменьшила свою скорость в три раза и развернулась на 90° . На какую максимальную высоту поднимется более

легкая шайба по стене ямы (высота стенки больше этой высоты, а ее длина такова, что шайбы не покидают ямы за время подъема).

Ответ на вопрос: Запишем законы сохранения энергии и импульса (в проекции на ось движения налетающей шайбы) для упругого лобового удара двух шайб с начальными скоростями v_0 и 0 и конечными скоростями v и V соответственно: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + nV^2 \Rightarrow V = v_0 \sqrt{\frac{3}{4n}}$ и

$mv_0 = mv + MV \Rightarrow v_0 = \pm \frac{v_0}{2} + \frac{v_0}{2}\sqrt{3n}$. Из последнего соотношения находим, что существуют два решения: $n_1 = 3$ и $n_2 = \frac{1}{3}$.

Правильно записан закон сохранения энергии	2
Правильно записан закон сохранения импульса	2
Из этих соотношений получено правильное уравнение для n	3
Дан правильный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: Ясно (из закона сохранения механической энергии), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу. Направим ось x по направлению движения более тяжелой шайбы (массы M) до удара, а ось y – по направлению ее движения после удара (перпендикулярно x). Закон сохранения импульса в проекции на эти оси дает:

$$\begin{cases} Mv_0 - mv_0 = mv_x \\ 0 = M\frac{v_0}{3} + mv_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = (n-1)v_0 \\ v_y = -\frac{n}{3}v_0 \end{cases}$$

Здесь $n \equiv \frac{M}{m}$, а $\vec{v}$ – скорость более легкой шайбы после удара. Подставим эти соотношения в уравнение

закона сохранения энергии $\frac{(M+m)v_0^2}{2} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{M(v_0/3)^2}{2}$. Получим, что $n(5n-13)=0$. Поскольку

$M \neq 0$, то $n = 2,6$. Движение вдоль оси y не влияет на подъем шайбы на стенку ямы, а $v_x = 1,6 \cdot v_0$. Снова воспользуемся законом сохранения энергии: максимальная высота подъема легкой шайбы на стенку ямы

$$h' = \frac{v_x^2}{2g} = 2,56 \cdot \frac{v_0^2}{2g} = 2,56h = 64 \text{ см.}$$

Указано (используется в решении), что на горизонтальный участок шайбы выедут с одинаковыми по величине скоростями $v_0 = \sqrt{2gh}$, направленными навстречу друг другу	2
Правильно записан закон сохранения импульса для соударения шайб (в векторной или компонентной форме)	2
Правильно выражена скорость легкой шайбы после удара через n	3
Правильно записан закон сохранения энергии для соударения шайб	2
v_x правильно выражена через v_0	3
Получены правильные аналитический ($h' = 2,56h$) и численные ответы	2+1=3
ВСЕГО	15

Задание 2:

Вопрос: В сосуде под подвижным поршнем находится воздух с относительной влажностью 30%. Какой станет относительная влажность воздуха, если опустить поршень, уменьшив объем воздуха в 3 раза, не нарушая герметичности сосуда и поддерживая неизменной температуру его содержимого?

Задача: В хорошо загерметизированном помещении температура воздуха равна $t_0 = 18^\circ \text{C}$, а его относительная влажность $r_0 = 25,0\%$. В помещении включили обогреватель. Когда температура поднялась до $t_1 = 20^\circ \text{C}$, относительная влажность стала равна $r_1 = 22,2\%$. Какой станет относительная влажность воздуха в помещении при повышении температуры до $t_2 = 22^\circ \text{C}$? В интервале температур от $t_0 = 18^\circ \text{C}$ до $t_2 = 22^\circ \text{C}$ с удовлетворительной точностью зависимость давления насыщенного пара от температуры можно считать линейной.

Ответ на вопрос: Если конденсация водяного пара в процессе сжатия не начнется, то масса водяного пара останется неизменной. Тогда при изотермическом сжатии парциальное давление водяного пара будет расти обратно пропорционально объему, и к концу сжатия возрастет в 3 раза. Давление насыщенного водяного пара зависит только от температуры, и поэтому оно останется неизменным. Значит, в отсутствие конденсации относительная влажность возрастает в 3 раза и составит 90%. Как видно, пар остался не насыщенным. Значит, предположение об отсутствии конденсации верно и относительная влажность станет равна 90%.

Указано, что масса водяного пара может меняться только из-за конденсации	3
Указано, что в отсутствие конденсации давление растет обратно пропорционально объему	2
Указано (используется в решении), что давление насыщенного пара при постоянной	2

температуре неизменно	
Дан правильный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: В соответствии с уравнением Менделеева-Клапейрона, давление паров воды массой m в помещении объемом V при температуре T равно $p = \frac{mRT}{\mu V}$. Давление насыщенного пара, согласно условию, можно записать в виде $p_n(T) = aT + b$. Поэтому относительная влажность воздуха $r(T) = \frac{mR}{\mu V} \frac{T}{aT+b}$, и можно заметить, что обратная величина является линейной функцией обратной абсолютной температуры: $\frac{1}{r} = A + B \frac{1}{T}$. Запишем эти соотношения для температур t_0 и t_1 : $\frac{1}{r_0} = A + B \frac{1}{T_0}$ и $\frac{1}{r_1} = A + B \frac{1}{T_1}$. Выразим из них коэффициенты зависимости $A = \frac{r_0 T_1 - r_1 T_0}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)}$ и $B = -\frac{T_0 T_1 (r_0 - r_1)}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)^2}$, и с их помощью вычисляем относительную влажность при t_2 : $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_0 r_1 (T_1 - T_0)} \left(r_0 T_1 - r_1 T_0 - \frac{T_0 T_1}{T_2} (r_0 - r_1) \right)$. В результате получаем:

$$r_2 = \frac{r_0 r_1 (T_1 - T_0) T_2}{T_2 (r_0 T_1 - r_1 T_0) - T_0 T_1 (r_0 - r_1)} \approx 19,9\%.$$

Допустимо частичное использование числовых данных: например, при подстановке значений температур $r_3 = \frac{291 r_0 r_1}{586 r_0 - 295 r_1} \approx 19,9\%$.

Давление паров выражено из уравнения Менделеева-Клапейрона	3
Используется формула линейной зависимости для $p_n(T)$	2
Записана линеаризованная связь r и температуры	3
Коэффициенты линейной зависимости выражены через данные задачи (аналитически или численно)	2+2=4
Записано выражение для r_2	1
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	15

Задание 3:

Вопрос: Две горизонтальные трубы проложены параллельно, имеют одинаковую длину и одинаковое сечение почти по всей длине, кроме участка в середине, где у одной из труб имеется сужение (сечение трубы плавно уменьшается, а потом плавно увеличивается до первоначального значения). На вход обеих труб вода подается с одинаковой скоростью. В некоторый момент времени на вход труб одновременно попадают частицы краски, плывущие по течению, не касаясь стенок. В какой из труб (постоянного сечения или с сужением) частицы краски доплывут до конца трубы раньше? Сжимаемостью и вязкостью воды можно пренебречь. Ответ объяснить.

Задача: На конце шланга диаметром 3,6 см поставили коническую насадку длиной $l = 50$ см с диаметром выходного отверстия 1,8 см. Струю направляют горизонтально, а давление в шланге таково, что струя попадает в мишень, расположенную от выходного отверстия на расстоянии по горизонтали L и ниже по высоте на H . Известно, что $H = \frac{1}{3}L$ и что необходимое давление оказалось на $\Delta p = 54$ кПа больше атмосферного. Затем насадку поменяли на другую – такой же длины, но с диаметром выходного отверстия 1,2 см, и установили ее концом вверх под углом 45° к горизонту. Какое избыточное давление нужно создать в шланге теперь, чтобы струя по-прежнему попадала в мишень (положение выходного отверстия и мишени не изменились)? Плотность воды $\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$, ускорение свободного падения $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

Ответ на вопрос: Для стационарного течения расход воды в каждом сечении постоянен. Так как сжимаемостью воды можно пренебречь, то это условие можно записать в виде $vS = \text{const}$. Значит, в области сужения вода (а вместе с ней и частицы краски) движутся быстрее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения. Поэтому до конца трубы частицы краски раньше доплывут в трубе с сужением.

Указано, что расход воды в каждом сечении постоянен	3
Условие постоянства расхода используется в виде $vS = \text{const}$	2
Указано, что в области сужения вода и частицы краски движутся быстрее, чем на аналогичном участке трубы постоянного сечения	2
Дан верный ответ	3
ВСЕГО	10

Решение задачи: Поскольку струя попадает в мишень, то скорость ее выхода из насадки в первом случае определяется из соотношения $L = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow v_0^2 = \frac{gL^2}{2H}$. Так как расход воды при прохождении

конической насадки в каждом сечении постоянен, то скорость воды на входе в насадку $V = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 v_0$.

Перепад давлений можно определить из уравнения Бернулли (давление на выходе из насадки считаем равным атмосферному): $\frac{\rho V^2}{2} + p = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 \Rightarrow \Delta p = \frac{\rho v_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4 \right] = \frac{15gL^2}{64H}$. Во втором случае для

нахождения скорости выхода воды из насадки запишем уравнение траектории «маленькой» порции воды

$$\begin{cases} x(t) = v'_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = v'_0 \sin(\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x - \frac{g x^2}{2v_0'^2 \cos^2(\alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha)x - \frac{g x^2}{2v_0'^2} [1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)].$$

Для точки падения $-H = L \cdot \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{gL^2}{2v_0'^2} [1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)]$. По условию, $\alpha = 45^\circ$, и поэтому $v_0'^2 = \frac{gL^2}{2(L+H)}$.

Скорость входа воды в насадку теперь $V' = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 v'_0$, а уравнение Бернулли принимает вид

$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$. При прохождении насадки центр масс слоя поднимается на высоту

$h_2 - h_1 \approx l \sin(\alpha)$. Значит, $\frac{\rho V'^2}{2} + p' = \frac{\rho v_0'^2}{2} + \rho gl \sin(\alpha) + p_0$, и

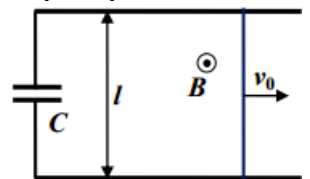
$$\Delta p' = \frac{\rho v_0'^2}{2} \left(1 - \frac{d_2^4}{d_0^4} \right) + \rho gl \sin(\alpha) = \frac{20}{81} \frac{gL^2}{L+H} + \rho gl \sin(\alpha) = \frac{256}{243} \frac{H}{L+H} \Delta p + \rho gl \sin(\alpha) \approx 17 \text{ кПа}.$$

Правильно определено v_0 (для первого случая)	1
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V = \left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 v_0$	2
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для первого случая	1
Получена формула, эквивалентная $\Delta p = \frac{15gL^2}{64H}$	2
Правильно определено v'_0 (для второго случая)	2
Записано выражение для скорости на входе в насадку $V' = \left(\frac{d_2}{d_0}\right)^2 v'_0$	1
Записано уравнение Бернулли (закон сохранения энергии) для второго случая	2
Получена правильная формула для $\Delta p'$	2
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	15

Задание 4:

Вопрос: Найдите ЭДС индукции в проводящем стержне длиной $l = 0,5\text{ м}$, скользящем по параллельным соединенным шинам, плоскость которых перпендикулярна вектору индукции $B = 0,5\text{ Тл}$ однородного магнитного поля со скоростью $v = 1\text{ м/с}$. Стержень перпендикулярен шинам.

Задача: Изучите возможность преобразования энергии, теряемую массивным телом при торможении, в энергию заряда конденсатора емкостью $C = 6\text{ Ф}$. Дрезина массой $m = 12\text{ т}$ движется со скоростью $v_0 = 25\text{ м/с}$, и опускает на горизонтальные сверхпроводящие шины проводящую перемычку длины $l = 1,5\text{ м}$, замыкая цепь заряда конденсатора. Шины и перемычка находятся в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 8\text{ Тл}$. Трение перемычки о шины пренебрежимо мало. Найдите максимальный заряд конденсатора и КПД его зарядки до этого заряда (затратами считать потерю кинетической энергии дрестины).



Ответ на вопрос: При движении перемычки изменяется площадь контура, и поэтому изменяется магнитный поток. В соответствии с законом Фарадея, величина ЭДС индукции

$$E_i = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv = 0,25 \text{ В.}$$

Правильно указано, что изменение магнитного потока связано с изменением площади контура	3
Правильно записан закон Фарадея	3
Получена правильная формула для ЭДС индукции	2
Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО	10

Решение задачи: При движении перемычки в магнитном поле в ней наводится ЭДС индукции. В

соответствии с законом Фарадея, величина этой ЭДС $E_i = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv$. Ток зарядки конденсатора в

момент, когда его заряд $q = CU_C$ определяется из соотношения $I = \frac{E_i - U_C}{R} = \frac{Bl}{R}v - \frac{q}{CR}$. Ускорение

дрезины создается силой Ампера, действующей на перемычку: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{IBl}{m}$. Заметим, что для любого

малого интервала времени $\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{Bl}{m} \frac{\Delta q}{\Delta t}$, то есть заряд растет, а скорость падает – пока ЭДС индукции не

сравняется с напряжением на конденсаторе: $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$ (после этого заряд конденсатора перестанет

расти, а скорость – уменьшаться). Кроме того, $\Delta v = -\frac{Bl}{m} \Delta q$, и, суммируя все малые изменения, находим:

$v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m} q_{\max}$. Из двух полученных уравнений для минимальной скорости и максимального заряда

находим: $v_0 - v_{\min} = \frac{B^2 l^2 C}{m + B^2 l^2 C} v_0$, $q_{\max} = \frac{m B l v_0 C}{m + B^2 l^2 C} \approx 1679 \text{ Кл}$. Максимальная энергия заряда

конденсатора $E_{\max} = \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{m^2 B^2 l^2 C v_0^2}{2(m + B^2 l^2 C)^2}$, а потеря кинетической энергии дрезины

$\Delta E_K = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{m v_{\min}^2}{2} = \frac{m(2m + B^2 l^2 C) B^2 l^2 C v_0^2}{2(m + B^2 l^2 C)^2}$, поэтому КПД зарядки $\eta = \frac{E_{\max}}{\Delta E_K} = \frac{m}{2m + B^2 l^2 C} \approx 48\%$.

В целом можно заметить, что вообще максимальное возможное значение КПД близко к 50% при $B^2 l^2 C \ll m$. Можно также заметить, что $v_0 - v_{\min} \approx 0,067 \cdot v_0$, то есть зарядка одного конденсатора в таком режиме тормозит дрезину лишь на небольшую часть скорости (а при существенном торможении заметно уменьшается КПД зарядки), поэтому в реальности имеет смысл использовать большое количество последовательно заряжаемых конденсаторов.

Правильно определена ЭДС индукции в перемычке	1
Правильно записана связь тока в перемычке со скоростью и зарядом конденсатора	2
Правильно записано уравнение движения дрезины	2
Записано условие баланса напряжений для установившегося режима, эквивалентное $Blv_{\min} = \frac{q_{\max}}{C}$	2
Получено соотношение, эквивалентное $v_0 - v_{\min} = \frac{Bl}{m} q_{\max}$	3
Правильно найден максимальный заряд конденсатора (формула или число)	2
Правильно найдены максимальное значение энергии конденсатора и изменение кинетической энергии дрезины	1+1=2
Получен правильный численный ответ для КПД зарядки (в интервале от 47% до 50%)	1
ВСЕГО	15