7, 8 и 9 классы

БИЛЕТ № 05.

Задание 1:

Вопрос: Роботу на трассе необходимо преодолеть препятствие в виде несимметричной горки: длина подъема на 20% больше, чем длина спуска. В первой попытке робот на спуске едет на 20% быстрее, чем на подъеме. Во второй попытке он может изменить скорости подъема и спуска, но только таким образом, чтобы их произведение осталось неизменным. Во сколько раз нужно изменить скорость спуска, чтобы средняя скорость робота при прохождении горки была максимальна?

Задача: Две модели машин едут по одной и той же круговой трассе с постоянными по величине скоростями. Первая проезжает трассу время $t_1 = 80\,\text{с}$, и при этом каждые $T = 2\,\text{мин}$ обгоняет вторую. На одном из кругов вторая модель, сразу после очередного обгона со стороны первой, резко развернулась и поехала по той же трассе в другую сторону. Через какое время после этого модели встретились?

Ответ на вопрос: Пусть L – длина пути спуска. Тогда длина дороги на подъеме равна $1{,}2L$. Обозначим скорость на подъеме в первой попытке v (соответственно на спуске – $1{,}2v$). Во второй попытке скорость на подъеме $\frac{v}{k}$, а на спуске $1{,}2kv$. Значит, время преодоления оврага станет равно $t = \frac{1{,}2kL}{v} + \frac{L}{1{,}2kv} = \frac{L}{v}\left(1{,}2k + \frac{1}{1{,}2k}\right)$. С помощью очевидного неравенства $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$ можно доказать, что при любом x справедливо неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $x = 1$. Поэтому минимальное время преодоления оврага (а значит, максимальная величина средней скорости) достигается при $k = 5/6$. Значит, скорость на спуске нужно уменьшить в 1,2 раза.

Решение задачи: Пусть L – длина круга, $v_{1,2}$ – скорости первой и второй модели соответственно. Тогда $L = v_1 t_1 = (v_1 - v_2)T$. Из этого соотношения находим, что $v_2 = \frac{T - t_1}{T} v_1$.

После разворота второй модели до встречи моделям вместе нужно проехать путь L, то есть искомое время $t = \dfrac{L}{v_1 + v_2} = \dfrac{T}{2T - t_1}\dfrac{L}{v_1} = \dfrac{t_1 T}{2T - t_1} = 1$ мин.

Задание 2:

Вопрос: Нагретый на печи камень завернули в плотную ткань и вынесли на улицу зимой. От начальной температуры 50°C до 49°C он остыл за 25 с. Какое примерно время уйдет на остывание этого камня от 20°C до 19°C, если температура на улице -10°C ? Ответ объясните.

Задача: В тонкостенную металлическую кастрюлю набросали доверху мокрого снега (состоящего из воды и ледяных кристаллов, находящихся в равновесии). Затем кастрюлю закрыли крышкой и внесли в сауну. За время 12 мин снег полностью растаял, а еще за 1 мин содержимое кастрюли нагрелось до +5°C. Какую часть начальной массы снега (в процентах) составляли ледяные кристаллы? Удельная теплоемкость воды $c \approx 4{,}2$ Дж/(г·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 336$ Дж/г.

Ответ на вопрос: Скорость остывания (вместе с потоком тепла от горячего камня) пропорциональна разности температур камня и окружающей среды. Поэтому во втором случае эта скорость уменьшилась в два раза, и остывание уйдет примерно вдвое большее время, то есть 50 с.

Решение задачи: Пусть n – искомая доля льда. Во время плавления льда тепло, поступающее в кастрюлю, шло только на это плавление, то есть $12Q_1 = \lambda \cdot nm$ (здесь Q_1 – количество теплоты, поступающее в кастрюлю за 1 мин, а m – масса снега). Аналогично $Q_1 = cm\Delta t$. Так как разность температур с окружающей средой почти не изменилась, то и Q_1 не изменилось. Разделив эти соотношения друг на друга, найдем: $n = \dfrac{12c\Delta t}{\lambda} = 0{,}75$. Итак, ледяные кристаллы составляли 75% начальной массы снега.

Задание 3:

Вопрос: Два амперметра подключили к аккумулятору с внутренним сопротивлением 4 Ом последовательно, и они оба показали ток, равный 3 А. Затем их подключили к этому же аккумулятору параллельно, и они оба показали ток, равный 2 А. Чему равно внутреннее сопротивление этих амперметров?

Задача: Нагревательный элемент подключили к аккумулятору последовательно с одним резистором. Мощность тепловыделения в нагревательном элементе составила $P_1 = 400$ Вт. Затем его подключили к этому же аккумулятору последовательно с двумя такими же резисторами. Мощность понизилась до $P_2 = 256$ Вт. Какой станет мощность тепловыделения в нагревательном элементе, если его подключить к этому же аккумулятору последовательно с тремя таким же резисторами?

Ответ на вопрос: Ясно, что внутренние сопротивления амперметров R одинаковы. При последовательном подключении к источнику с ЭДС (напряжением, создаваемым на клеммах при разомкнутой цепи) Е и внутренним сопротивлением r сила тока $I = \dfrac{\mathrm{E}}{r + 2R}$. При параллельном $I' = \dfrac{\mathrm{E}}{2r + R}$. Поэтому $\dfrac{I}{I'} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{2r + R}{r + 2R} \Rightarrow R = \dfrac{r}{4} = 1$ Ом.

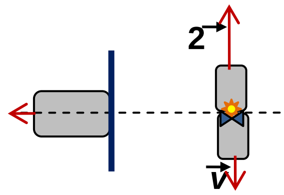
Решение задачи: При подключении нагревательного элемента к источнику с ЭДС (напряжением, создаваемым на клеммах при разомкнутой цепи) Е и внутренним сопротивлением r последовательно с n резисторами сила тока в нем $I = \dfrac{\mathrm{E}}{r + R_H + nR}$. Поэтому мощность тепловыделения $P_n = I^2 R_H = \dfrac{\mathrm{E}^2 R_H}{(r + R_H + nR)^2}$. Удобно изучать более простую зависимость $\dfrac{1}{\sqrt{P_n}} = \dfrac{r + R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} + n\dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$. Тогда из уравнений $\dfrac{1}{\sqrt{P_1}} = \dfrac{r + R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} + \dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$ и

$\frac{1}{\sqrt{P_2}} = \frac{r+R_H}{E\sqrt{R_H}} + 2\frac{R}{E\sqrt{R_H}}$ найдем, что $\frac{1}{\sqrt{P_2}} - \frac{1}{\sqrt{P_1}} = \frac{R}{E\sqrt{R_H}}$. Затем из уравнения $\frac{1}{\sqrt{P_3}} = \frac{r+R_H}{E\sqrt{R_H}} + 3\frac{R}{E\sqrt{R_H}}$ получим $\frac{1}{\sqrt{P_3}} - \frac{1}{\sqrt{P_2}} = \frac{R}{E\sqrt{R_H}} = \frac{1}{\sqrt{P_2}} - \frac{1}{\sqrt{P_1}}$, откуда $P_3 = \frac{P_1 P_2}{(2\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})^2} = \frac{1600}{9}\,\text{Вт} \approx 177{,}8\,\text{Вт}$.

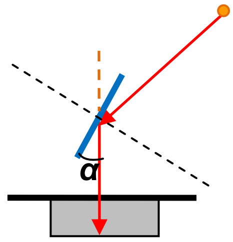
Задание 4:

Вопрос: Человек с зеркалом стоит рядом с очень глубоким узким вертикальным колодцем и держит в руках зеркало. Расположив зеркало над колодцем, он направляет солнечного «зайчика» на дно колодца. Найдите высоту Солнца над горизонтом, если плоскость его зеркала повернута на $15°$ от вертикали.

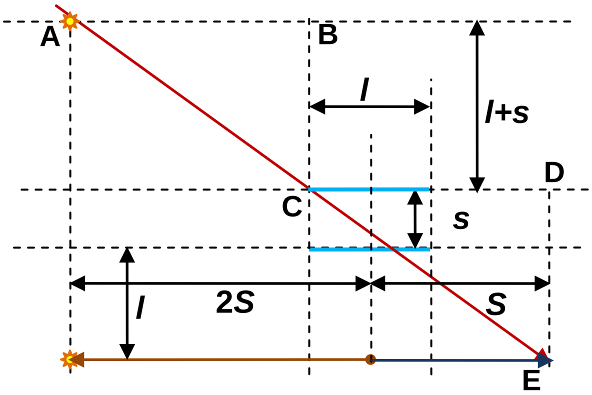
Задача: Три робота расположены на площадке таким образом, что два из них стоят вплотную друг другу, а третий – неподалеку (см. рисунок). На стоящих вплотную роботах размещены небольшие лампочка и фотодатчик (оказавшиеся «совсем рядом»), а на третьем – плоское зеркало шириной $l = 120\,\text{см}$. Середина зеркала находится точно напротив лампочки и фотодатчика на расстоянии $l = 120\,\text{см}$ от них. В некоторый момент времени робот с фотодатчиком начинает двигаться перпендикулярно линии, соединяющей фотодатчик с центром зеркала в одну сторону, робот с лампочкой в тот же момент начинает двигаться в противоположную сторону, а робот с зеркалом – удаляться от них обоих в перпендикулярном направлении. Скорость робота с фотодатчиком (который всегда ориентирован в сторону зеркала и «видит» его целиком) примерно постоянна и равна $v = 0{,}15\,\text{м/с}$, а скорость робота с лампочкой в два раза выше. В течении какого времени после старта фотодатчик принимает свет от лампочки? Временем разгона роботов пренебречь.



Ответ на вопрос: Как нетрудно увидеть из построения, для направления лучей от Солнца вертикально вниз после отражения от зеркала, высота Солнца над горизонтом должна составлять $90° - 2\alpha = 60°$.



Решение задачи: Изобразим крайнее положение роботов, когда лучи от лампочки, отражаясь от зеркала, еще достигают фотодатчика: в следующее мгновение «освещенная зона», границы которой



вместе с лампочкой движутся быстрее, чем фотодатчик, окончательно «убежит» от него. Как видно, независимо от величины смещения зеркала, треугольники ABC и CDE должны быть одинаковы, поэтому $2vt - \frac{l}{2} = vt + \frac{l}{2} \Rightarrow t = \frac{l}{v} = 8\,\text{с}$.

БИЛЕТ № 06.

Задание 1:

Вопрос: Роботу на трассе необходимо преодолеть препятствие в виде несимметричной горки: длина спуска в 4 раза больше, чем длина подъема. В первой попытке робот тратит на подъем 45 с, а спуск 80 с. Во второй попытке он может изменить скорости подъема и спуска, но только таким образом, чтобы их произведение осталось неизменным. Во сколько раз нужно изменить скорость спуска, чтобы средняя скорость робота при прохождении горки была максимальна?

Задача: Две модели машин едут по одной и той же круговой трассе с постоянными по величине скоростями. Первая проезжает трассу время $t_1 = 90$ с, и при этом ее каждые $T = 3$ мин обгоняет вторая. На одном из кругов вторая модель, в очередной раз догнав первую, вместо обгона резко развернулась и поехала по той же трассе в другую сторону. Через какое время после этого модели встретились?

Ответ на вопрос: Пусть L – длина пути подъема. Тогда длина дороги на спуске равна $4L$. Обозначим скорость на подъеме в первой попытке v. Тогда его скорость на спуске равна $v' = \frac{4 \cdot 45v}{80} = \frac{4}{9}v$. Во второй попытке скорость на подъеме $\frac{v}{k}$, а на спуске $\frac{9}{4}kv$. Значит, время преодоления оврага станет равно $t = \frac{kL}{v} + \frac{16L}{9kv} = \frac{4L}{3v}\left(\frac{3k}{4} + \frac{4}{3k}\right)$. С помощью очевидного неравенства $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2x$ можно доказать, что при любом x справедливо неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$, причем равенство (то есть минимальное значение этого выражения) достигается при $x = 1$. Поэтому минимальное время преодоления оврага (а значит, максимальная величина средней скорости) достигается при $k = 4/3$. Значит, скорость на спуске нужно увеличить в $k = 4/3$ раза.

Решение задачи: Пусть L– длина круга, $v_{1,2}$ – скорости первой и второй модели соответственно. Тогда $L = v_1 t_1 = (v_2 - v_1)T$. Из этого соотношения находим, что $v_2 = \frac{T + t_1}{T} v_1$. После разворота второй модели до встречи моделям вместе нужно проехать путь L, то есть искомое время $t = \frac{L}{v_1 + v_2} = \frac{T}{2T + t_1}\frac{L}{v_1} = \frac{t_1 T}{2T + t_1} = 36$ с.

Задание 2:

Вопрос: Воду из холодильника налили в стакан с закрывающейся крышкой, закрыли крышку, и внесли в помещение с температурой +60°C. За 30 с вода нагрелась от 10°C до 11°C. За какое примерно время вода нагреется от 25°C до 26°C? Ответ объясните.

Задача: В тонкостенную металлическую кастрюлю налили воду с температурой +2°C,закрыли крышкой и поставили ее в морозильную камеру, в которой поддерживалась температура ниже -35°C. Через 2 минуты вода в кастрюле начала замерзать. Какая часть массы воды (в процентах) превратится в лед за 20 минут после этого? Удельная теплоемкость воды $c \approx 4{,}2$ Дж/(г·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda \approx 336$ Дж/г.

Ответ на вопрос: Скорость остывания (вместе с потоком тепла от горячего камня) пропорциональна разности температур камня и окружающей среды. Поэтому во втором случае эта скорость уменьшилась в $\frac{50}{35} = \frac{10}{7}$ раза, и на нагрев уйдет примерно во столько же раз большее время, то есть примерно 43 с.

Решение задачи: Пусть n – искомая доля льда. Во время замерзания льда тепло, поступающее в кастрюлю, шло только на это отвердевание, то есть $20Q_1 = \lambda \cdot nm$ (здесь Q_1 – количество теплоты, уходящее из кастрюли за 1 мин, а m – масса снега). Аналогично $Q_1 = cm\Delta t$. Так как разность температур с окружающей средой почти не изменилась, то и Q_1 не изменилось.

Разделив эти соотношения друг на друга, найдем: $n = \dfrac{20c\Delta t}{\lambda} = 0{,}5$. Итак, масса льда составит 05% от начальной массы воды.

Задание 3:

Вопрос: Два вольтметра подключили к аккумулятору с внутренним сопротивлением 5 Ом последовательно, и они оба показали напряжение 20,0 В. Затем их подключили к этому же аккумулятору параллельно, и они оба показали напряжение 39,9 В. Чему равно внутреннее сопротивление этих вольтметров?

Задача: Нагревательный элемент подключили к аккумулятору. Мощность тепловыделения в нагревательном элементе составила $P_0 = 900\,\text{Вт}$. Затем его подключили к этому же аккумулятору последовательно с двумя одинаковыми резисторами. Мощность понизилась до $P_2 = 225\,\text{Вт}$. Какой станет мощность тепловыделения в нагревательном элементе, если его подключить к этому же аккумулятору последовательно с одним из этих резисторов?

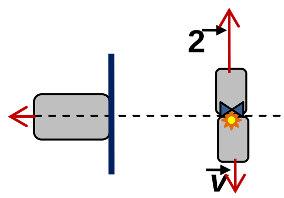
Ответ на вопрос: Ясно, что внутренние сопротивления вольтметров R одинаковы. При последовательном подключении к источнику с ЭДС (напряжением, создаваемым на клеммах при разомкнутой цепи) E и внутренним сопротивлением r напряжение на одном вольтметре $U = \dfrac{\mathrm{E}R}{r+2R}$. При параллельном $U' = \dfrac{\mathrm{E}R}{2r+R}$. Поэтому $\dfrac{U}{U'} = \dfrac{200}{399} = \dfrac{2r+R}{r+2R} \Rightarrow R = 598r = 2{,}99\,\text{кОм}$.

Решение задачи: При подключении нагревательного элемента к источнику с ЭДС (напряжением, создаваемым на клеммах при разомкнутой цепи) E и внутренним сопротивлением r последовательно с n резисторами сила тока в нем $I = \dfrac{\mathrm{E}}{r+R_H+nR}$. Поэтому мощность тепловыделения $P_n = I^2R_H = \dfrac{\mathrm{E}^2R_H}{(r+R_H+nR)^2}$. Удобно изучать более простую зависимость $\dfrac{1}{\sqrt{P_n}} = \dfrac{r+R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} + n\dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$. Тогда из уравнений $\dfrac{1}{\sqrt{P_0}} = \dfrac{r+R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{P_2}} = \dfrac{r+R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} + 2\dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$ найдем, что $\dfrac{1}{\sqrt{P_2}} - \dfrac{1}{\sqrt{P_0}} = 2\dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$. Затем из уравнения $\dfrac{1}{\sqrt{P_1}} = \dfrac{r+R_H}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} + \dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}}$ получим $\dfrac{1}{\sqrt{P_2}} - \dfrac{1}{\sqrt{P_1}} = \dfrac{R}{\mathrm{E}\sqrt{R_H}} = \dfrac{1}{2\sqrt{P_2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{P_0}}$, откуда $P_1 = \dfrac{4P_0P_2}{(\sqrt{P_0}+\sqrt{P_2})^2} = 400\,\text{Вт}$.

Задание 4:

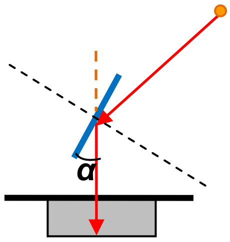
Вопрос: Человек с зеркалом стоит рядом с очень глубоким узким вертикальным колодцем и держит в руках зеркало. Расположив зеркало над колодцем, он направляет солнечного «зайчика» на дно колодца. Найдите высоту Солнца над горизонтом, если плоскость его зеркала повернута на 15° от вертикали.

Задача: Три робота расположены на площадке таким образом, что два из них стоят вплотную друг

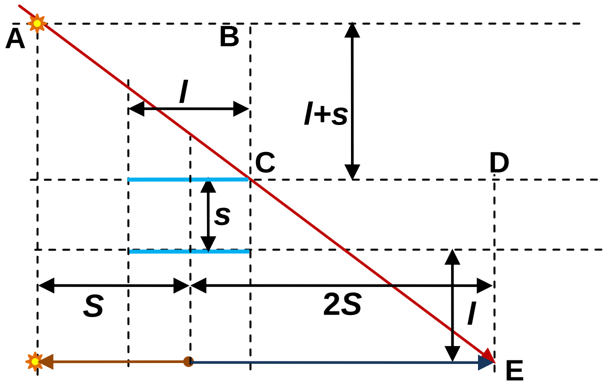


к другу, а третий – неподалеку (см. рисунок). На стоящих вплотную роботах размещены небольшие лампочка и фотодатчик (оказавшиеся «совсем рядом»), а на третьем – плоское зеркало шириной $l = 80\,\text{см}$. Середина зеркала находится точно напротив лампочки и фотодатчика на расстоянии $l = 80\,\text{см}$ от них. В некоторый момент времени робот с лампочкой начинает двигаться перпендикулярно линии, соединяющей лампочку с центром зеркала в одну сторону, робот с фотодатчиком в тот же момент начинает двигаться в противоположную сторону, а робот с зеркалом – удаляться от них обоих в перпендикулярном направлении. Скорость робота с лампочкой примерно постоянна и равна $v = 0{,}1$м/с, а скорость робота с фотодатчиком (который всегда ориентирован в сторону зеркала и «видит» его целиком) в два раза выше. В течении какого времени после старта фотодатчик принимает свет от лампочки? Временем разгона роботов пренебречь.

Ответ на вопрос: Как нетрудно увидеть из построения, для направления лучей от Солнца вертикально вниз после отражения от зеркала, высота Солнца над горизонтом должна составлять $90° - 2\alpha = 60°$.



Решение задачи: Изобразим крайнее положение роботов, когда лучи от лампочки, отражаясь от зеркала, еще достигают фотодатчика: в следующее мгновение «освещенная зона», границы которой



вместе с лампочкой движутся медленнее, чем фотодатчик, окончательно «отстанет» от него. Как видно, независимо от величины смещения зеркала, треугольники ABC и CDE должны быть одинаковы, поэтому $2vt - \frac{l}{2} = vt + \frac{l}{2} \Rightarrow t = \frac{l}{v} = 8$с.