7, 8 и 9 классы

БИЛЕТ № 05: Задания и возможные решения

Задание 1:

Вопрос: У небольшой обтекаемой модели автомобиля сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Ее аэродинамический профиль нейтрален (то есть при движении обтекающий поток воздуха не создает ни прижимной, ни подъемной силы), а двигатель имеет регулируемую мощность. Сначала разгон происходил при малой мощности, затем ее увеличили, а потом еще раз увеличили. При первом увеличении максимальная достижимая скорость модели $v_{\max}$ возросла, а при втором – осталась без изменения. Объясните такое поведение $v_{\max}$.

Задача: Робот с нейтральным аэродинамическим профилем разгоняется из состояния покоя по прямой на горизонтальной поверхности. При этом его максимальное ускорение оказывается равным $a_{\max} = 0{,}36$ м/с^2, а максимальная скорость, достигнутая за достаточно большое время, $v_{\max} = 2$ м/с. На робота установили антикрыло. После этого максимальная скорость робота увеличилась до $\tilde{v}_{\max} = 3$ м/с. Найти максимальное ускорение робота в процессе разгона после установки антикрыла. Считать, что величина силы сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости робота (он существенно больше по размерам, чем модель из предыдущего задания), а величина создаваемой антикрылом прижимающей силы – пропорциональна скорости. Мощность двигателя робота достаточно велика, чтобы колеса при $v = v_{\max}$ чуть-чуть проскальзывали.

Ответ на вопрос: Максимальная скорость достигается в тот момент, когда сила трения ведущих колес (которая как раз и разгоняет автомобиль) уравновешивается силой сопротивления воздуха: $F_{mp} = F_c = \alpha \cdot v_{\max}$. При этом сила трения не превышает $F_{mp}^{\max} = \mu N$. Таким образом, если колеса проскальзывают, то максимальная скорость не зависит от мощности двигателя: $v_{\max} = \dfrac{\mu N}{\alpha}$ (при нейтральном профиле сила N не зависит от скорости). В этом режиме часть мощности двигателя идет на компенсацию тепловых потерь при проскальзывании, то есть мощность двигателя должна быть не меньше, чем мощность, расходуемая на разгон: $P \ge F_{mp} v_{\max} = \dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$. Если мощность меньше этой, то скорость $v_{\max} = \dfrac{\mu N}{\alpha}$ недостижима – при меньшей скорости проскальзывание колес прекратится, и сила трения станет меньше $F_{mp} = \alpha v < \mu N$, а значит и скорость будет падать с понижением мощности: $P = F_{mp} v = \alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{P}{\alpha}}$. Как видно, при мощности меньше $\dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ максимальная скорость растет пропорционально корню квадратному из мощности, а при $P \ge \dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ максимальная скорость уже не зависит от мощности. Теперь можно объяснить наблюдаемое поведение скорости: первое значение мощности было меньше $\dfrac{\mu^2 N^2}{\alpha}$ (колеса не проскальзывали), и поэтому ее увеличении привело к увеличению максимальной скорости, а уже во втором случае колеса проскальзывали (как и в третьем), и второе увеличение мощности не изменило $v_{\max}$.

Решение задачи: В отсутствие антикрыла уравнение движения робота имеет вид $ma = \mu mg - \beta v^2$, где μ – коэффициент трения ведущих колес о поверхность, а сила сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$. Поэтому максимальное ускорение достигается при нулевой скорости и равно $a_{\max} = \mu g$, а максимальная скорость – при $a = 0$ (когда сила трения ведущих колес уравновешивается силой сопротивления воздуха) и равна $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{\mu mg}{\beta}}$. С учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальности ускорения нам снова нужен именно такой режим) $ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2$. Выделяя из этого выражения полный квадрат $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2 \gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m}\left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta}\right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение $\tilde{a}_m$ достигается при $v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $\tilde{a}_m = \mu g + \frac{\mu^2\gamma^2}{4m\beta}$. Следовательно, $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = 1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}$. Из этого соотношения находим, что $\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta} = \frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1$. Максимальная скорость по-прежнему достигается при $a = 0$, то есть при $\mu g + \mu \frac{\gamma}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, обнаруживаем, что $\tilde{v}_{\max} = \frac{\mu\gamma}{2\beta} + \sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{4\beta^2} + \frac{\mu m g}{\beta}}$. Таким образом,

$$\frac{\tilde{v}_{\max}}{v_{\max}} = \sqrt{1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} + \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} = \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m}} + \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1}.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{\tilde{a}_m}{a_m}$, получаем: $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 = \frac{169}{144}$. Поэтому $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}4225$ м/с^2.

ОТВЕТ: $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}4225$ м/с^2.

Задание 2:

Вопрос: Количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционален разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционален толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но внешний имеет в три раза большую толщину и в два раза большую площадь. Между слоями, внутри и снаружи – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 10°C$, а снаружи $t_2 = 5°C$. Какова температура вещества между слоями?

Задача: Собираясь на соревнования, школьник взял с собой упаковку бутербродов в сумке с теплоизолирующими стенками и с электронным датчиком внутренней и внешней температуры. Бутерброды он положил в сумку из холодильника, где рядом с ними долго стояла кружка с водой, в которой плавала маленькая льдинка (школьник вел за ней наблюдения по заданию учителя физики, но льдинка не росла). По показаниям датчика он определил, что за время сборов $\tau = 2$ минуты внутренняя температура возросла на $\Delta t = 0{,}4°C$ при неизменной внешней температуре $t_0 = 20°C$. Когда он пришел на соревнования, внутренняя температура равнялась $t_1 = 10°C$, а внешняя – $t_0' = 25°C$. За какое время после этого внутренняя температура возрастет еще на $\Delta t' = 0{,}6°C$, если внешняя температура меняться не будет?

Ответ на вопрос: Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной. Рассмотрим установившийся режим. В нем поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев (иначе температура вещества между слоями изменялась бы). Поэтому $(t_1 - t)\frac{S}{d} = (t - t_2)\frac{2S}{3d}$, откуда находим, что $t = \frac{3t_1 + 2t_2}{5} = 8°C$.

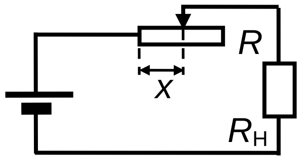
Решение задачи: Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0°C$. Поэтому скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 20°C$. На соревнованиях эта скорость была пропорциональна $t_0' - t_1 = 15°C$ с тем же коэффициентом пропорциональности. Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0{,}6°C$ нужно в $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1{,}5$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0{,}4°C$. Поэтому $\frac{\tau'}{\tau} = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1} = 2$, то есть $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t}{t_0' - t_1}\tau = 4$ мин.

ОТВЕТ: $\tau' = \frac{\Delta t'}{\Delta t}\frac{t_0 - t_1}{t_0' - t}\tau = 4$ мин.

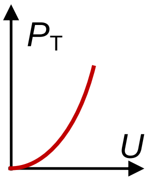
Задание 3:

Вопрос: Изобразите график зависимости мощности тепловых потерь в резисторе от приложенного напряжения (сопротивление резистора неизменно).

Задача: Постоянная (повышенная) температура датчика поддерживается с помощью нагревательного элемента, цепь питания которого показана на схеме (xR – сопротивление части реостата, включенной в цепь). При температуре внешней среды $t_1 = 23°C$ положение движка реостата соответствует $x_1 = 0{,}65$, при $t_2 = 18°C$ – $x_2 = 0{,}35$. Каким должно быть x при температуре $t_3 = 11°C$?



Ответ на вопрос: Поскольку, согласно закону Джоуля-Ленца, $P_T = U^2 / R$,то нужный график – это парабола:



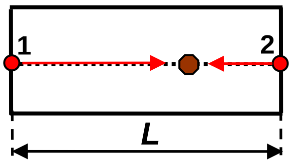
Решение задачи: При перемещении движка изменяется напряжение U_H, подаваемое на нагревательный элемент. Считая источник идеальным, и обозначая его ЭДС символом E, запишем: $U_H = IR_H = \frac{\mathrm{E}}{xR + R_H}R_H$. Введем обозначение $k \equiv \frac{R}{R_H}$. Тогда $U_H = \frac{\mathrm{E}}{1 + k \cdot x}$. Затем заметим, что из условия баланса тепловыделения нагревательного элемента и потерь на теплообмен с окружающей средой следует, что $\frac{U_H^2}{R(t_0)} = k \cdot (t_0 - t) \Rightarrow U_H^2 = \alpha R(t_0) \cdot (t_0 - t)$. Здесь α – некоторая постоянная, t_0 – температура, необходимая для работы датчика, а $R(t_0)$ – сопротивление нагревательного элемента при этой температуре. Так как t_0 по условию постоянна, то $\frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{t_0 - t_2}{t_0 - t_1} = 1 + \frac{t_1 - t_2}{t_0 - t_1}$ ($U_{1,2,3}$ – значения напряжения на нагревательном элементе при соответствующем положении движка реостата). Из этого соотношения выражаем $t_0 - t_1 = \frac{U_1^2}{U_2^2 - U_1^2}(t_1 - t_2)$. По аналогичным соображениям $\frac{U_3^2}{U_1^2} = \frac{t_0 - t_3}{t_0 - t_1} = 1 + \frac{t_1 - t_3}{t_0 - t_1}$. Подставляя сюда выражение для $t_0 - t_1$, получаем: $\frac{U_3^2}{U_1^2} = 1 + \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}\frac{U_2^2 - U_1^2}{U_1^2}$. Теперь используем соотношения $\frac{U_3}{U_1} = \frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_3}$ и $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_2}$. В результате: $\frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_3} = \sqrt{\frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_2}\left(\frac{1 + k \cdot x_1}{1 + k \cdot x_2}\right)^2 - \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_2}}$. Из этого уравнения выражается искомая величина: $x_3 = \dfrac{(1+k\cdot x_1)(1+k\cdot x_2)}{k\sqrt{\dfrac{t_1-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_1)^2 - \dfrac{t_2-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_2)^2}}$, где $k \equiv \dfrac{R}{R_H}$. С учетом известных числовых значений: $x_3 = \dfrac{(2+1{,}3k)(2+0{,}7k)\sqrt{5}}{k\sqrt{12(2+1{,}3k)^2 - 7(2+0{,}7k)^2}}$.

ОТВЕТ: $x_3 = \dfrac{(2+1{,}3k)(2+0{,}7k)\sqrt{5}}{k\sqrt{12(2+1{,}3k)^2 - 7(2+0{,}7k)^2}}$, где $k \equiv \dfrac{R}{R_H}$.

Задание 4:

Вопрос: Ток фотодатчика пропорционален мощности света, попадающего на фотодатчик. В каком случае этот ток будет быстрее изменяться при изменении расстояния до источника света – (1) источник – маленькая лампа или (2) источник – плоская светящаяся панель больших размеров? Ответ объяснить.

Задача: Робот, оснащенный двумя фотодатчиками, перемещается по прямой на площадке длиной $L = 12$ м. На границах его области движения установлены две маленькие лампочки, каждая из которых испускает свет равномерно по всем направлениям внутрь площадки. Ток каждого фотодатчика пропорционален мощности излучения, попадающего в его «окно». Логическая схема получает информацию о величине суммарного тока датчиков $I = I_1 + I_2$. В центре отрезка $I = 2$ мА. На каком расстоянии от лампы 1 может находиться робот при $I = 6$ мА?



Ответ на вопрос: В случае (1) энергия, излучаемая лампой, на расстоянии r от нее распределяется практически равномерно по сфере радиуса r, и поэтому мощность света, попадающего на датчик, будет убывать обратно пропорционально r^2. В случае (2) на расстояниях, много меньших размеров «большой» панели, площадь, по которой распределяется энергия излучения, почти не убывает, и поэтому мощность света будет изменяться очень медленно. Значит, ток датчика быстрее изменяется при изменении расстояния в случае (1).

Решение задачи: Обозначим расстояние от робота до лампы 1 r_1. Тогда расстояние от него до лампы 2 равно $r_2 = L - r_1$. Удобно ввести «координату» x, отсчитываемую от центра отрезка движения в направлении лампы 1. Тогда $r_1 = \dfrac{L}{2} - x$ и $r_2 = \dfrac{L}{2} + x$. По условию ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2} = \dfrac{\alpha}{r_{1,2}^2}$ (α – некоторая постоянная величина). Поэтому суммарный ток

$$I = \alpha\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \alpha\left(\frac{4}{(L-2x)^2} + \frac{4}{(L+2x)^2}\right) = \alpha\frac{8(L^2+4x^2)}{(L^2-4x^2)^2}.$$

При нахождении робота в центре отрезка ($x = 0$) получаем $I_0 = \alpha\dfrac{8}{L^2}$. Таким образом, $\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{L^2(L^2+4x^2)}{(L^2-4x^2)^2}$. Из этого уравнения можно найти x^2: $x^2 = \dfrac{L^2}{8}\left(2 + \dfrac{I_0}{I} - \sqrt{8\dfrac{I_0}{I} + \dfrac{I_0^2}{I^2}}\right)$. Для заданных значений ($I = 6$ мА и $I_0 = 2$ мА) получается $x^2 = \dfrac{L^2}{12} \Rightarrow x = \pm\dfrac{L}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{3}$ м. Значит, расстояние до первой лампы может принимать два значения: $r_1 = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 - 2\sqrt{3})$ м и $r_1' = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 + 2\sqrt{3})$ м. Если участник знает примерное значение $\sqrt{3}$, он может получить значения $r_1 \approx 2{,}54$ м и $r_1' \approx 9{,}46$ м.

ОТВЕТ: $r_1 = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 - 2\sqrt{3})$ м и $r_1' = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (6 + 2\sqrt{3})$ м (или $r_1 \approx 2{,}54$ м и $r_1' \approx 9{,}46$ м).

БИЛЕТ № 06: Задания и возможные решения

Задание 1:

Вопрос: У небольшой обтекаемой модели автомобиля сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Ее аэродинамический профиль нейтрален (то есть при движении обтекающий поток воздуха не создает ни прижимной, ни подъемной силы), а двигатель имеет постоянную мощность. После первого разгона шины заменили на такие же по форме и размерам, но с большим коэффициентом трения, и максимальная достижимая скорость модели $v_{\max}$ возросла. Затем поставили шины с еще большим коэффициентом трения, но $v_{\max}$ осталась прежней. Объясните такое поведение $v_{\max}$.

Задача: Робот с нейтральным аэродинамическим профилем разгоняется из состояния покоя по прямой на горизонтальной поверхности. При этом его максимальное ускорение оказывается равным $a_{\max} = 0{,}32$ м/с^2, а максимальная скорость, достигнутая за достаточно большое время, $v_{\max} = 1{,}5$ м/с. На робота установили антикрыло. После этого максимальная скорость робота увеличилась до $\tilde{v}_{\max} = 3$ м/с. Найти максимальное ускорение робота в процессе разгона после установки антикрыла. Считать, что величина силы сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости робота (он существенно больше по размерам, чем модель из предыдущего задания), а величина создаваемой антикрылом прижимающей силы – пропорциональна скорости. Мощность двигателя робота достаточно велика, чтобы колеса при $v = v_{\max}$ чуть-чуть проскальзывали.

Ответ на вопрос: Максимальная скорость достигается в тот момент, когда сила трения ведущих колес (которая как раз и разгоняет автомобиль) уравновешивается силой сопротивления воздуха: $F_{mp} = F_c = \alpha \cdot v_{\max}$. При этом сила трения не превышает $F_{mp}^{\max} = \mu N$. Таким образом, если колеса проскальзывают, то максимальная скорость растет пропорционально коэффициенту трения: $v_{\max} = \frac{\mu N}{\alpha}$ (при нейтральном профиле сила N не зависит от скорости). В этом режиме часть мощности двигателя идет на компенсацию тепловых потерь при проскальзывании, то есть мощность двигателя должна быть не меньше, чем мощность, расходуемая на разгон: $P \ge F_{mp} v_{\max} = \frac{\mu^2 N^2}{\alpha}$, и соответственно $\mu \le \frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$. Если коэффициент трения станет больше $\frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$, то скорость $v_{\max} = \frac{\mu N}{\alpha}$ станет недостижима – при меньшей скорости проскальзывание колес прекратится, и сила трения станет меньше $F_{mp} = \alpha v < \mu N$, и скорость перестанет зависеть от коэффициента трения: $P = F_{mp} v = \alpha v^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$. Теперь можно объяснить наблюдаемое поведение скорости: для первых шин значение коэффициента трения было меньше $\frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$ (колеса проскальзывали), и поэтому увеличение μ привело к увеличению максимальной скорости, а уже со вторыми шинами колеса не проскальзывали (как и с третьими, выполнялось соотношение $\mu > \frac{\sqrt{\alpha P}}{N}$), и замена вторых шин на третьи не изменила $v_{\max}$.

Решение задачи: В отсутствие антикрыла уравнение движения робота имеет вид $ma = \mu mg - \beta v^2$, где μ – коэффициент трения ведущих колес о поверхность, а сила сопротивления воздуха $|\vec{F}_c| = \beta v^2$. Поэтому максимальное ускорение достигается при нулевой скорости и равно $a_{\max} = \mu g$, а максимальная скорость – при $a = 0$ (когда сила трения ведущих колес уравновешивается силой сопротивления воздуха) и равна $v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu mg}{\beta}}$. С учетом прижимной силы сила нормальной реакции дороги становится равной $N = mg + \gamma v$. Поэтому уравнение движения в режиме проскальзывания колес (ясно, что для обеспечения максимальности ускорения нам снова нужен именно такой режим) $ma = \mu(mg + \gamma v) - \beta v^2 \Rightarrow a = \mu g + \mu\frac{\gamma}{m}v - \frac{\beta}{m}v^2$. Выделяя из этого выражения полный квадрат $a(v) = \mu g + \frac{\mu^2\gamma^2}{4m\beta} - \frac{\beta}{m}\left(v - \frac{\mu\gamma}{2\beta}\right)^2$, замечаем, что максимальное ускорение $\tilde{a}_m$ достигается при $v_0 = \frac{\mu\gamma}{2\beta}$, и оно равно $\tilde{a}_m = \mu g + \frac{\mu^2\gamma^2}{4m\beta}$. Следовательно, $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = 1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}$. Из этого соотношения находим, что $\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta} = \frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1$. Максимальная скорость по-прежнему достигается при $a = 0$, то есть при $\mu g + \mu\frac{\gamma}{m}v - \frac{\beta}{m}v^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, обнаруживаем, что $\tilde{v}_{\max} = \frac{\mu\gamma}{2\beta} + \sqrt{\frac{\mu^2\gamma^2}{4\beta^2} + \frac{\mu mg}{\beta}}$. Таким образом,

$$\frac{\tilde{v}_{\max}}{v_{\max}} = \sqrt{1 + \frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} + \sqrt{\frac{\mu\gamma^2}{4mg\beta}} = \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m}} + \sqrt{\frac{\tilde{a}_m}{a_m} - 1}.$$

Решая это уравнение относительно $\frac{\tilde{a}_m}{a_m}$, получаем: $\frac{\tilde{a}_m}{a_m} = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 = \frac{25}{16}$. Поэтому $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}5$ м/с^2.

ОТВЕТ: $\tilde{a}_m = \left(\frac{v_{\max}^2 + \tilde{v}_{\max}^2}{2v_{\max}\tilde{v}_{\max}}\right)^2 a_m = 0{,}5$ м/с^2.

Задание 2:

Вопрос: Количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой вещества постоянного сечения, прямо пропорционален разности температур по разные стороны от него и обратно пропорционален толщине слоя. Допустим, что два слоя теплоизоляции изготовлены из одного материала, но внешний имеет в два раза меньшую толщину и в три раза большую площадь. Между слоями, внутри и снаружи – вещество, которое очень хорошо проводит тепло. Температура внутри равна $t_1 = 12°C$, а снаружи $t_2 = 5°C$. Какова температура вещества между слоями?

Задача: Собираясь на соревнования, школьник взял с собой упаковку бутербродов в сумке с теплоизолирующими стенками и с электронным датчиком внутренней и внешней температуры. Бутерброды он положил в сумку из холодильника, где рядом с ними стояла кружка с водой, в которой плавала маленькая льдинка (школьник вел за ней наблюдения по заданию учителя физики, но льдинка не росла). По показаниям датчика он определил, что за время сборов $\tau = 3$ минуты внутренняя температура возросла на $\Delta t = 0{,}3°C$ при неизменной внешней температуре $t_0 = 25°C$. Когда он пришел на соревнования, внутренняя температура равнялась $t_1 = 7°C$, а внешняя – $t_0' = 27°C$. За какое время после этого внутренняя температура возрастет еще на $\Delta t' = 0{,}5°C$, если внешняя температура меняться не будет?

Ответ на вопрос: Так как вещество между слоями «очень хорошо проводит тепло», то его температуру t можно считать почти постоянной. Рассмотрим установившийся режим. В нем поток тепла (количество теплоты, протекающее в единицу времени через слой теплоизоляции) должен быть одинаков для обоих слоев (иначе температура вещества между слоями изменялась бы). Поэтому $(t_1 - t)\dfrac{S}{d} = (t - t_2)\dfrac{3S}{(d/2)}$, откуда находим, что $t = \dfrac{t_1 + 6t_2}{7} = 6°C$.

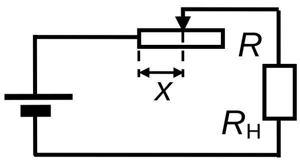
Решение задачи: Из условия ясно, что температура в холодильнике $t = 0°C$. Поэтому скорость поступления тепла в сумку в первом случае была пропорциональна $t_0 - t = 25°C$. На соревнованиях эта скорость была пропорциональна $t_0' - t_1 = 20°C$ с тем же коэффициентом пропорциональности. Для нагрева содержимого сумки на $\Delta t' = 0{,}5°C$ нужно в $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t} = \dfrac{5}{3}$ раза больше тепла, чем для нагрева на $\Delta t = 0{,}3°C$. Поэтому $\dfrac{\tau'}{\tau} = \dfrac{\Delta t'}{\Delta t}\dfrac{t_0 - t}{t_0' - t_1} = \dfrac{25}{12}$, то есть $\tau' = \dfrac{\Delta t'}{\Delta t}\dfrac{t_0 - t}{t_0' - t_1}\tau = 6\dfrac{1}{4}$ мин.

ОТВЕТ: $\tau' = \dfrac{\Delta t'}{\Delta t}\dfrac{t_0 - t_1}{t_0' - t}\tau = 6$ мин 15 с.

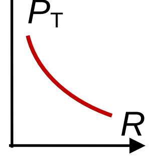
Задание 3:

Вопрос: Изобразите график зависимости мощности тепловых потерь в реостате от его сопротивления (при неизменном приложенном напряжении).

Задача: Постоянная (повышенная) температура датчика поддерживается с помощью нагревательного элемента, цепь питания которого показана на схеме (xR – сопротивление части реостата, включенной в цепь). При температуре внешней среды $t_1 = 25°C$ положение движка реостата соответствует $x_1 = 0{,}75$, при $t_2 = 18°C$ – $x_2 = 0{,}5$. Найдите x при температуре $t_3 = 9°C$?



Ответ на вопрос: Поскольку, согласно закону Джоуля-Ленца, $P_T = U^2 / R$, то нужный график – это гипербола:



Решение задачи: При перемещении движка изменяется напряжение U_H, подаваемое на нагревательный элемент. Считая источник идеальным, и обозначая его ЭДС символом E, запишем: $U_H = IR_H = \dfrac{\mathrm{E}}{xR + R_H}R_H$. Введем обозначение $k \equiv \dfrac{R}{R_H}$. Тогда $U_H = \dfrac{\mathrm{E}}{1 + k \cdot x}$. Затем заметим, что из условия баланса тепловыделения нагревательного элемента и потерь на теплообмен с окружающей средой следует, что $\dfrac{U_H^2}{R(t_0)} = k \cdot (t_0 - t) \Rightarrow U_H^2 = \alpha R(t_0) \cdot (t_0 - t)$. Здесь α – некоторая постоянная, t_0 – температура, необходимая для работы датчика, а $R(t_0)$ – сопротивление нагревательного элемента при этой температуре. Так как t_0 по условию постоянна, то $\frac{U_2^2}{U_1^2}=\frac{t_0-t_2}{t_0-t_1}=1+\frac{t_1-t_2}{t_0-t_1}$ ($U_{1,2,3}$ – значения напряжения на нагревательном элементе при соответствующем положении движка реостата). Из этого соотношения выражаем $t_0-t_1=\frac{U_1^2}{U_2^2-U_1^2}(t_1-t_2)$. По аналогичным соображениям $\frac{U_3^2}{U_1^2}=\frac{t_0-t_3}{t_0-t_1}=1+\frac{t_1-t_3}{t_0-t_1}$. Подставляя сюда выражение для t_0-t_1, получаем: $\frac{U_3^2}{U_1^2}=1+\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}\frac{U_2^2-U_1^2}{U_1^2}$. Теперь используем соотношения $\frac{U_3}{U_1}=\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_3}$ и $\frac{U_2}{U_1}=\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_2}$. В результате: $\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_3}=\sqrt{\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}\left(\frac{1+k\cdot x_1}{1+k\cdot x_2}\right)^2-\frac{t_2-t_3}{t_1-t_2}}$. Из этого уравнения выражается искомая величина: $x_3=\frac{(1+k\cdot x_1)(1+k\cdot x_2)}{k\sqrt{\frac{t_1-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_1)^2-\frac{t_2-t_3}{t_1-t_2}(1+k\cdot x_2)^2}}$, где $k\equiv\frac{R}{R_H}$.

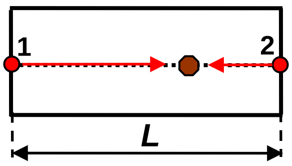
С учетом известных числовых значений: $x_3=\frac{(2+1{,}5k)(2+k)\sqrt{7}}{k\sqrt{16(2+1{,}5k)^2-9(2+k)^2}}$.

ОТВЕТ: $x_3=\frac{(2+1{,}5k)(2+k)\sqrt{7}}{k\sqrt{16(2+1{,}5k)^2-9(2+k)^2}}$, где $k\equiv\frac{R}{R_H}$.

Задание 4:

Вопрос: Ток фотодатчика пропорционален мощности света, попадающего на фотодатчик. В каком случае этот ток будет быстрее изменяться при изменении расстояния до источника света – (1) источник – маленькая лампа или (2) источник – плоская светящаяся панель больших размеров? Ответ объяснить.

Задача: Робот, оснащенный двумя фотодатчиками, перемещается по прямой на площадке длиной $L=12$ м.



На границах его области движения установлены две маленькие лампочки, каждая из которых испускает свет равномерно по всем направлениям внутрь площадки. Ток каждого фотодатчика пропорционален мощности излучения, попадающего в его «окно». Логическая схема получает информацию о величине суммарного тока датчиков $I=I_1+I_2$. В центре отрезка $I=8$ мА. На каком расстоянии от лампы 1 может находиться робот при $I=19$ мА?

Ответ на вопрос: В случае (1) энергия, излучаемая лампой, на расстоянии r от нее распределяется практически равномерно по сфере радиуса r, и поэтому мощность света, попадающего на датчик, будет убывать обратно пропорционально r^2. В случае (2) на расстояниях, много меньших размеров «большой» панели, площадь, по которой распределяется энергия излучения, почти не убывает, и поэтому мощность света будет изменяться очень медленно. Значит, ток датчика быстрее изменяется при изменении расстояния в случае (1).

Решение задачи: Обозначим расстояние от робота до лампы 1 r_1. Тогда расстояние от него до лампы 2 равно $r_2=L-r_1$. Удобно ввести «координату» x, отсчитываемую от центра отрезка движения в направлении лампы 1. Тогда $r_1=\frac{L}{2}-x$ и $r_2=\frac{L}{2}+x$. По условию ток каждого датчика пропорционален мощности сигнала, а мощность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $I_{1,2}=\frac{\alpha}{r_{1,2}^2}$ (α – некоторая постоянная величина). Поэтому суммарный ток

$$I=\alpha\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}\right)=\alpha\left(\frac{4}{(L-2x)^2}+\frac{4}{(L+2x)^2}\right)=\alpha\frac{8(L^2+4x^2)}{(L^2-4x^2)^2}.$$

При нахождении робота в центре отрезка ($x=0$) получаем $I_0=\alpha\dfrac{8}{L^2}$. Таким образом, $\dfrac{I}{I_0}=\dfrac{L^2(L^2+4x^2)}{(L^2-4x^2)^2}$. Из этого уравнения можно найти x^2: $x^2=\dfrac{L^2}{8}\left(2+\dfrac{I_0}{I}-\sqrt{8\dfrac{I_0}{I}+\dfrac{I_0^2}{I^2}}\right)$. Для заданных значений ($I=19$ мА и $I_0=8$ мА) получается $x^2=\dfrac{L^2}{76}(23-8\sqrt{5})\Rightarrow x=\pm L\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{76}}$. Значит, расстояние до первой лампы может принимать два значения: $r_1=\dfrac{L}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)=6\left(1-\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)$ м и $r_1'=\dfrac{L}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)=6\left(1+\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)$ м. Если участник может оценить примерное значение $\sqrt{5}$, он может получить значения $r_1\approx 2{,}9$ м и $r_1'\approx 9{,}1$ м.

ОТВЕТ: $r_1=\dfrac{L}{2}\left(1-\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)=6\left(1-\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)$ м и $r_1'=\dfrac{L}{2}\left(1+\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)=6\left(1+\sqrt{\dfrac{23-8\sqrt{5}}{19}}\right)$ м (или $r_1\approx 2{,}9$ м и $r_1'\approx 9{,}1$ м). Допустима более грубая оценка.

ЗАДАНИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СОРЕВНОВАНИЙ

И на отборочном, и на заключительном этапах использовались одни и те же задания, причем участники между этапами (и в ходе каждого этапа) имели возможность совершенствовать своих роботов.

НАПРАВЛЕНИЕ «РОБОКАРУСЕЛЬ»

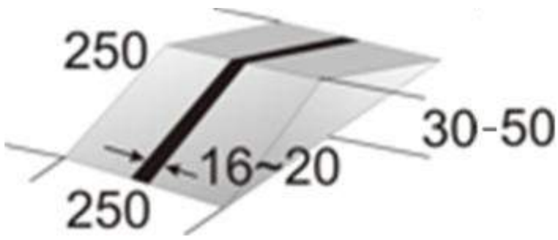
Упражнение «РобоСчётчик»

Условия состязания

За отведенное время робот должен преодолеть трассу, подсчитав количество цилиндров определенных цветов, расставленных вдоль трассы.

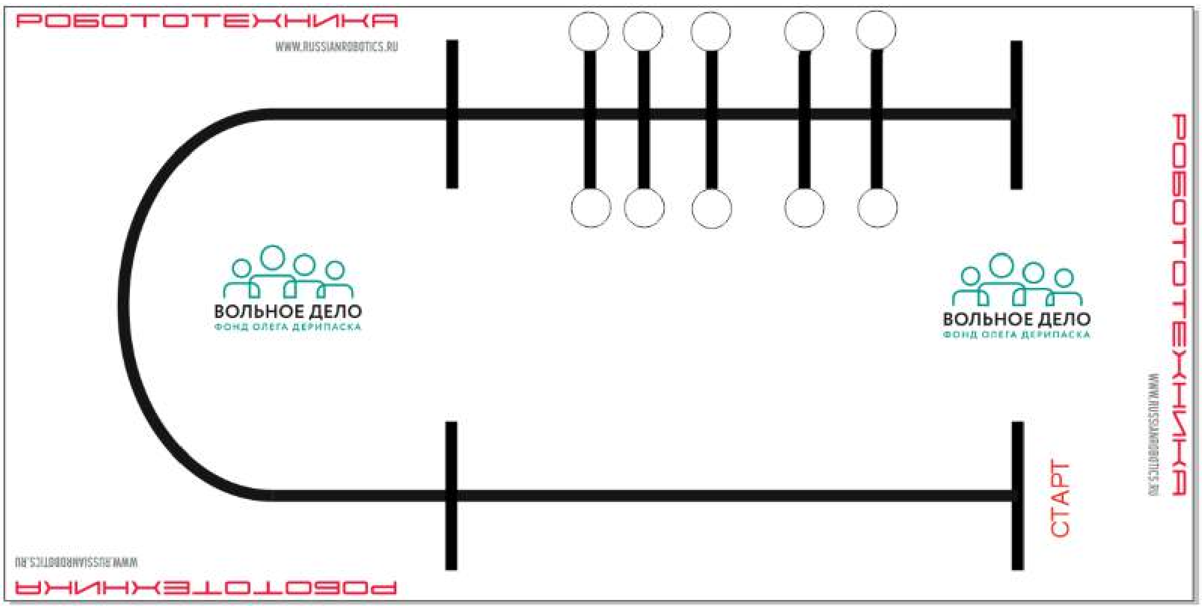
Игровое поле

1. Размеры игрового поля 2000x1000 мм.
2. Поле – белое основание с черной линией траектории шириной 16-20 мм.
3. На линии (в зоне после СТАРТА) размещается препятствие – горка (размер: 250 мм шириной, 250 мм длиной и 30-50 мм высотой; основной цвет поверхности белый). Препятствие жестко закреплено на поверхности поля, линия трассы на препятствии не прерывается. Место расположения препятствия объявляется в день соревнований. На момент соревнований организаторы оставляют за собой право изменить размеры препятствия, предусмотренного данным регламентом.



Горка для соревнования “Счетчик-траектория”

4. Цилиндр – диаметр 66 мм, высота не более 125 мм, вес не более 20 грамм. Цвета цилиндров определяются в день соревнований. Возможные цвета: белый, черный, красный, синий, желтый, зеленый.
5. Количество цилиндров, а также их расстановка на отметках определяется Главным судьей соревнований перед началом заезда, после сдачи роботов в карантин.



Поле для соревнования “РобоСчётчик”

Робот

1. Робот должен быть автономным.
2. Размер робота на старте не превышает 250x250x250 мм.
3. В конструкции робота ограничивается количество следующих элементов:
    a. Моторы – не более 3 (трех);
    b. Датчик освещенности/цвета – не более 3 (трех);
    c. Датчик расстояния – не более 2 (двух).
4. В микрокомпьютер должна быть загружена только одна исполняемая программа под названием «Robofest2018».

Упражнение «РобоСквош»

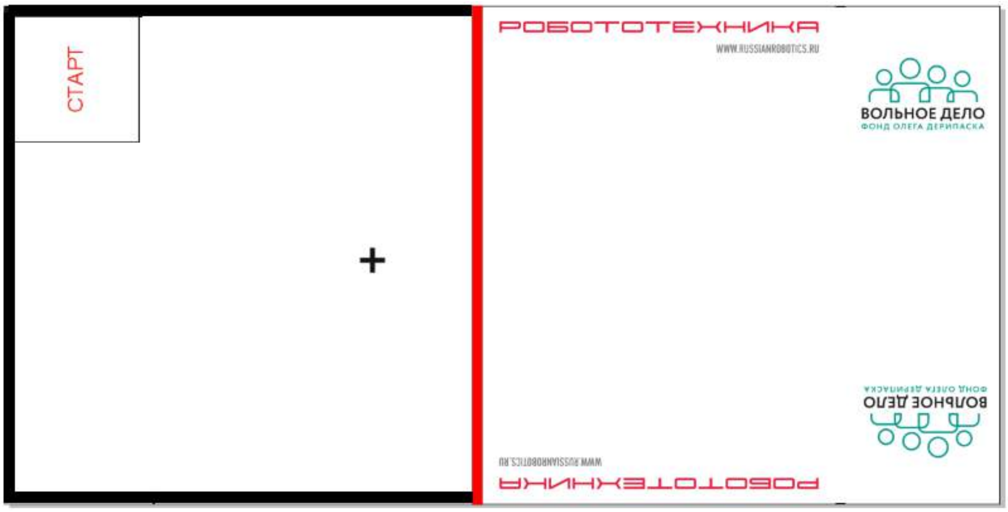
Условия состязания

За отведенное время робот должен совершить максимальное количество поочередных ударов «ракеткой» по мячу, который должен ударяясь о стену возвращаться обратно к роботу.

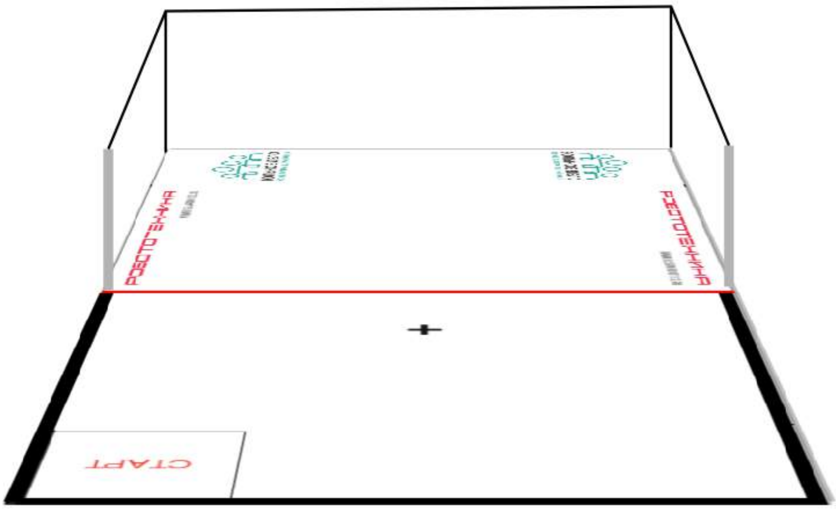
Игровое поле

1. Размеры игрового поля 2000x1000 мм.

2. Поле представляет собой белое основание, посередине разделенное красной линией и тремя стенками (высотой 200 мм), ограничивающие пространство за красной линией по периметру поля.
3. Зона перемещения робота ограничена по периметру тремя черными и одной красной линиями шириной 16-20 мм.
4. Специальная отметка, для обозначения начального положения мяча.
5. Мяч – диаметр не более 45 мм, масса не более 40 гр, материал – пластик, полиуретан.



Поле для соревнования "РобоСквош"



Поле для соревнования "РобоСквош" (вид на стенки)

Робот

1. Робот должен быть автономным.
2. Размер робота на старте не превышает 250x250x250 мм.
3. Робот должен иметь приспособление, осуществляющее **удар по мячу аналогично удару ракеткой**.

Упражнение «РобоБоулинг»

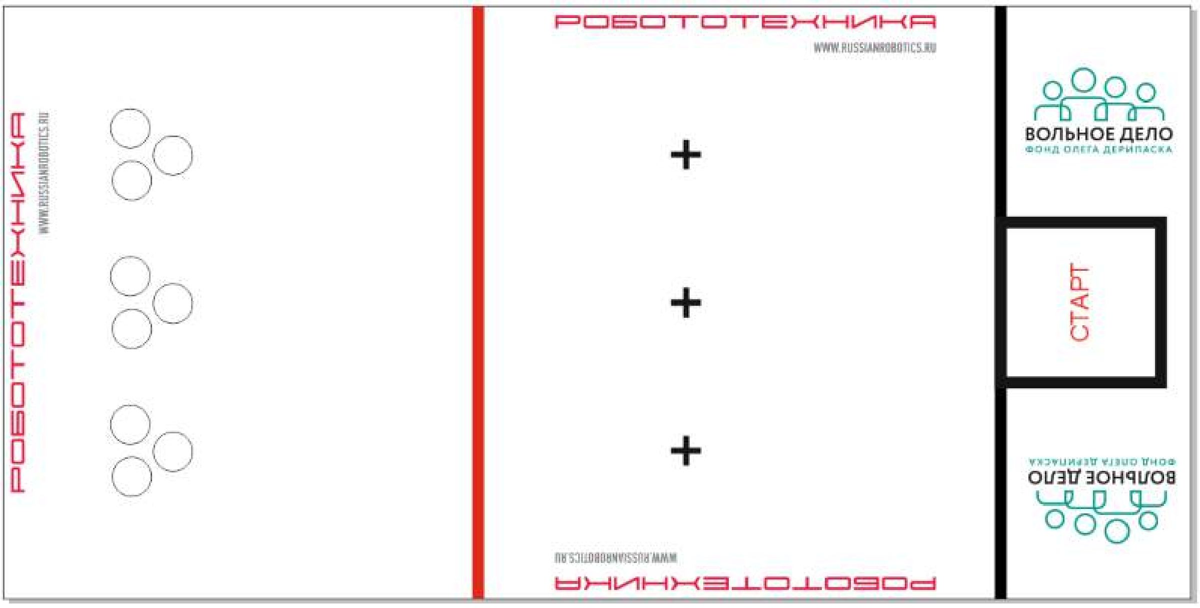
Условия состязания

За отведенное время робот должен сбить шарами максимальное количество цилиндров.

Игровое поле

1. Размеры игрового поля 2000x1000 мм.

2. Поле представляет собой белое основание с нанесенными на него отметками.
3. На поле располагаются 3 отметки для постановки шаров, и 9 отметок для постановки цилиндров.
4. Цилиндр – диаметр 66 мм, высота не более 125 мм, вес не более 20 грамм.
5. Шар – диаметр не более 65 мм, масса не более 55 гр. (шар для большого тенниса).



Поле для соревнования "РобоБоулинг"

Робот

1. Робот должен быть автономным.
2. Максимальный размер робота 250x250x250 мм. Во время выполнения задания робот не может изменять свои размеры.
3. Робот не должен иметь подвижных ударных элементов.
4. Робот не должен иметь съемных частей, в том числе для позиционирования на старте. Все детали робота должны быть жестко закреплены.

Направление «AutoNet 14+»

Условия состязания

Подбор груза, доставка этого груза по случайно заданному перед матчем адресу и возврату в стартовую точку, соблюдая все правила дорожного движения.
Весь процесс сборки и отладки робота отражается в инженерной книге.

Игровое поле

Игровое поле – поле размером 7м x 7м и все игровые элементы.

На поле присутствуют следующие игровые зоны и элементы:

• Зона Старта-финиша (позиция 1 и 2 в верхнем и нижнем левых углах поля) – пространство отделенное визуально другим цветом, из которого стартует и в которое финиширует робот. Размер зоны старта-финиша по сторонам 0,5 м на 0,5 м.

• Точка забора груза (Склад) (точки 1 и 2 в прямоугольниках в центре поля) - пространство отделенное визуально различимыми линиями, из которого роботу необходимо забрать груз. Размер Склада 0,9 м на 0,3 м.

• Груз представляет собой деревянный брусок размером 50х50х100 мм. В каждой Точке забора груза находится по 5 (пять) брусков.

• Поле состоит из нескольких улиц, на каждой из которых есть дома. Улицы называются Зеленая, Желтая, Красная, Синяя. Дома имеют номера, состоящие из одной или двух цифр (10). Номер дома - квадрат размером 0,2х0,2 м определенного цвета с белой цифрой (цифрами) на нем. Номер дома расположен в правом верхнем углу дома. По одной стороне улицы идут четные номера домов, по противоположной стороне – нечетные.

• Перед каждым домом есть Подъезд (зона разгрузки), длиной равной длине дома (0,5м или 0,4м соответственно) и шириной 0,15 м (пространство отделенное визуально другим цветом).

• Дороги по типу движения делятся на одностороннюю (часть Красной улицы состоит из одной полосы для движения робота) и двухсторонние (состоят из двух полос для движения робота).

• Ширина одной полосы – 0,5 м. Ширина двухполосной дороги – 1 м.

• Движение правостороннее.

• Проезжая часть (дороги) разделена на полосы линиями горизонтальной разметки (тонкие черные линии), движение роботов должно осуществляться строго по обозначенным полосам.

• Край проезжей части – это граница между полосой движения (белый цвет) и крайней линией разметки (черный цвет).

• На поле есть 2 (два) перекрестка – один регулируемый светофором и один регулируемый знаками дорожного движения.

• Знаки дорожного движения (согласно нумерации ПДД РФ):

• Знак 2.4 «Уступи дорогу» - 1шт.,

• Знак 2.1 «Главная дорога» - 2шт.,

• Знак 3.1 «Въезд запрещен» - 1шт.,

• Знак 5.5 «Одностороннее движение» - 1шт.;

• Представляют собой белый треугольник (равносторонний треугольник с длиной сторон 250мм), желтый ромб (200х200мм), красный круг (диаметр 200мм) и синий квадрат (200х200мм) соответственно, прикрепленные к основанию;

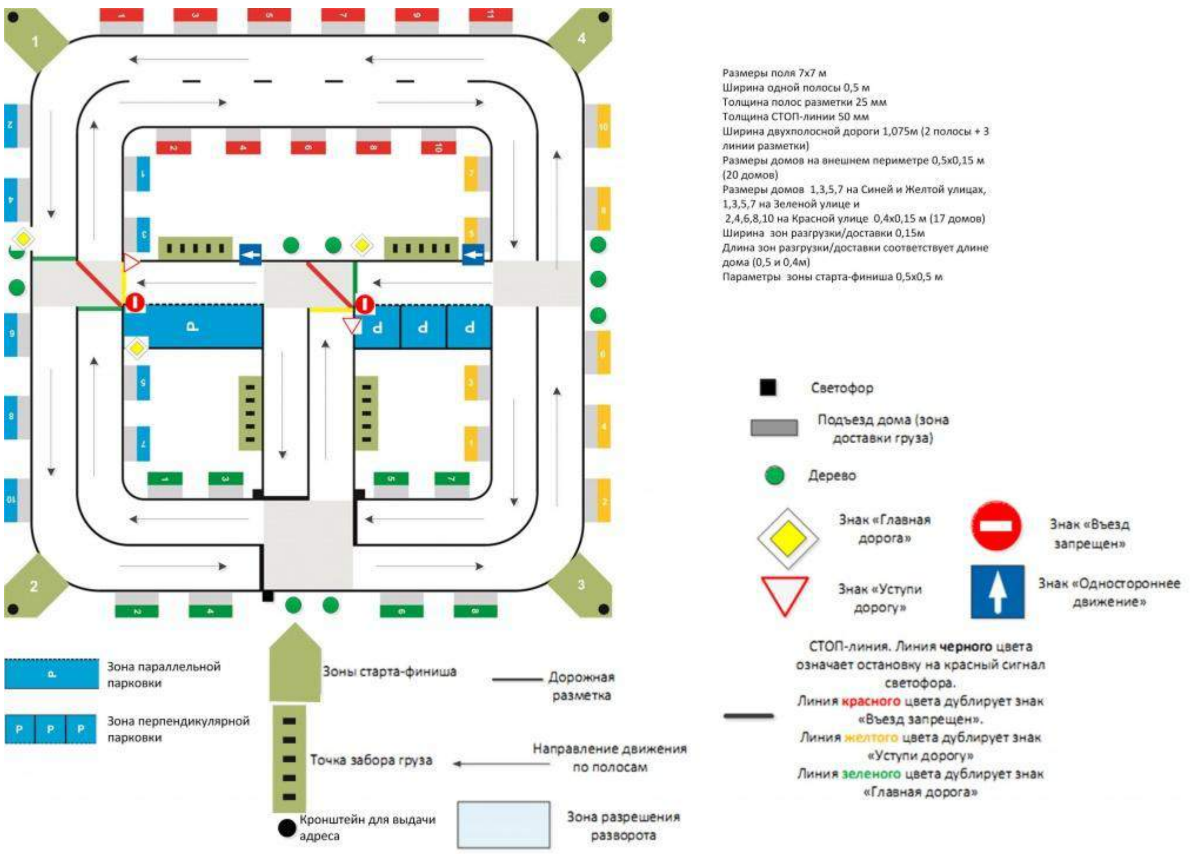
• Верхний край дорожного знака устанавливается на высоте 500 мм;

• Вертикальная ось знака на расстоянии 100-250 мм перпендикулярно от края проезжей части.

• Для каждого знака предусмотрена специальная линия разметки, дублирующая его действие:

•Зона разворота – пространство отделенное визуально серым цветом, в котором разрешен разворот робота.

• Деревья диаметром 200мм и высотой не более 350 мм.



Робот

В матче участвуют одновременно два робота. Каждый робот стартует с заранее определенной зоны старта. В начале матча каждому роботу выдается адрес, обозначающий дом, к которому нужно доставить груз. Робот должен с помощью бортовых систем распознавания в автономном режиме считать адрес, затем добраться до склада, взять груз, доставить его по указанному адресу и вернуться в свою зону старта-финиша, уложившись в 5 минут. Роботам запрещено двигаться задним ходом, по встречной полосе и разворачиваться вне зон разворота кроме случаев, специально оговоренных регламентом.

Начисление очков

Очки в матче присуждаются за преодоление перекрестков при условии соблюдения ПДД; выполнение разворота в зоне разворота; загрузку и доставку груза; выполнение парковки; распознавание точного адреса, цвета или номера дома; возврат в зону старта-финиша. Кроме того, команды могут заработать дополнительные баллы за демонстрацию технического зрения во время прохождения квалификации и во время матча. Также команда обязана представить техническую документацию, содержащую подробное описание робота.

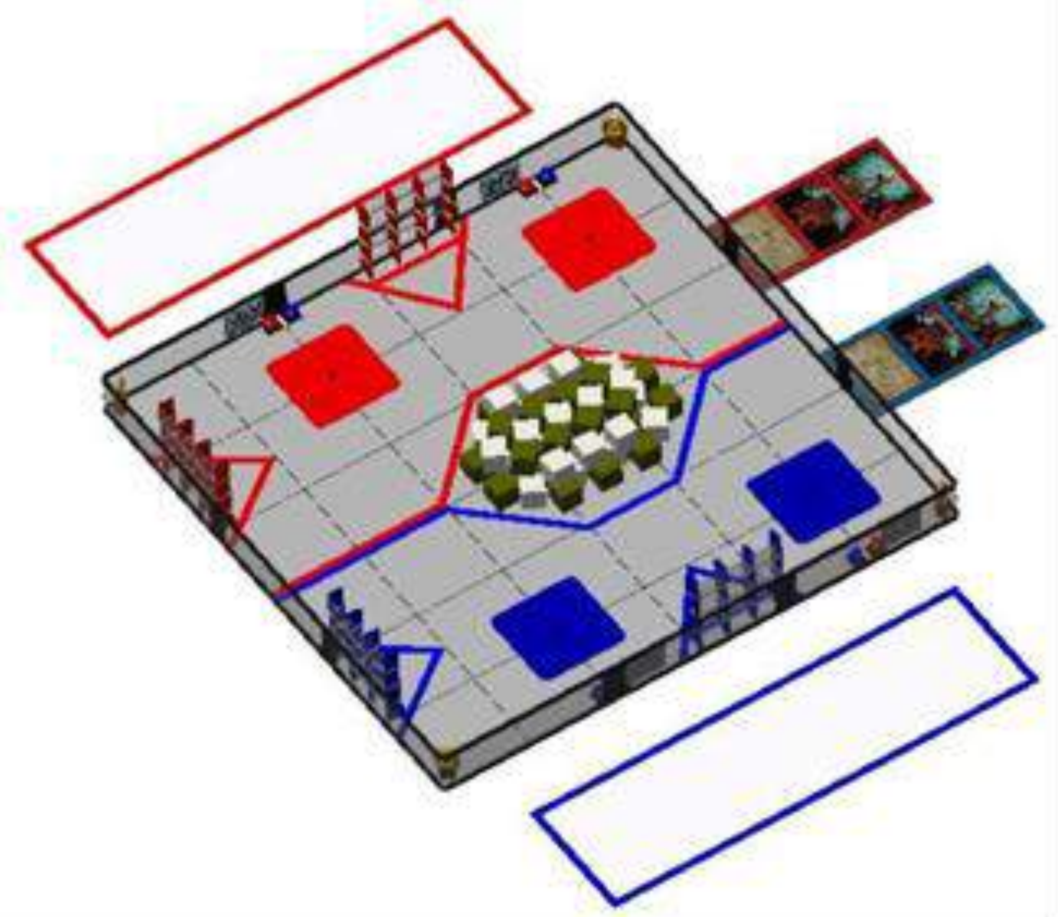
Направление «FIRST FTC»

Условия состязания

Цель игры – заработать очков больше альянса оппонентов, (1) помещая игровые кубики в специальные ящики, складывая их в ряды, колонки, создавая специальный рисунок; (2) перемещая игровые элементы за поле, в зону хранения; (3) собирая шары; (4) паркуясь на балансировочном камне; и (5) перемещаясь в определенные положения на игровом поле

Игровое поле

Поле поделено по центру на две половины – красную и синюю в соответствие с цветами альянса. Центр поля ограничен полосами, в котором расположены фигуры людей (символические знаки). Зачётными элементами в игре FIRST RELIC RECOVERY℠ являются 48 нейтральных кубиков (24 серых и 24 коричневых), 8 шаров цветов альянсов (по 4 на альянс) и 4 фигуры людей цветов альянсов (по 2 на альянс). Там также расположены 4 шкафе цветов альянса (по два на альянс) с выделенными перед ними зонами безопасности. Также там расположены 4 балансировочных камня цветов альянса (по 2 на альянс), с которых роботы начинают и заканчивают игру. К полю примыкают две зоны хранения цветов альянса, куда роботы помещают собранные реликты в конце матча.



Матчи

Матчи делятся на два различных периода: 30- секундный автономный период, за которым следует двухминутный телеуправляемый период. Последние 30 секунд телеуправляемого периода называются финальным периодом, в ходе которого роботам доступны новые возможности для зарабатывания очков.

Робот

В матче участвуют одновременно четыре робота, по два с каждого альянса. Каждый робот стартует с заранее определенной зоны старта. Перед началом игры в каждый робот загружается кубик. В автономном периоде Робот должен с помощью бортовых систем распознавания в автономном режиме считать адрес, затем доехать до шкафа и правильно сдвинуть шарик. В управляемом режиме робот должен уметь в перемещать кубики в шкафы и двигать фигуру человека за пределы поля.