ЗАДАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ: условия, решения и ответы

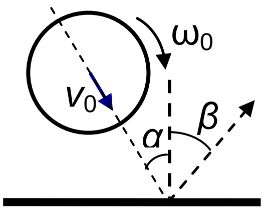
10 и 11 классы

БИЛЕТ № 02: Задания и возможные решения

Задание 1:

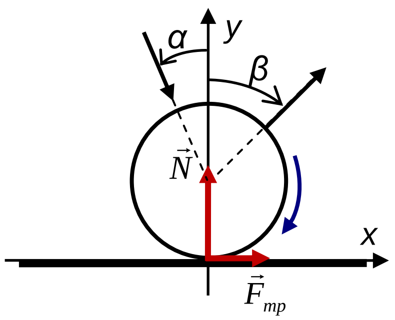
Вопрос: Цилиндрическая труба радиусом 10 см катится по ровной поверхности без проскальзывания, вращаясь с угловой скоростью 10 с$^{-1}$. С какой скоростью движется относительно поверхности ось трубы?

Задача: Отрезок тонкостенной цилиндрической трубы падает на горизонтальную поверхность под углом $\alpha = 30°$ к вертикали (см. рисунок). Перед ударом скорость оси трубы равнялась v_0. Кроме того, перед ударом труба вращалась вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = v_0 / r$ (где r – радиус трубы). Под каким углом β к вертикали будет двигаться ось трубы после удара? Удар считать «мгновенным», а деформации поверхности – упругими (то есть при нормальном падении без вращения удар был бы упругим). Коэффициент трения между трубой и поверхностью $\mu = 0{,}25$.



Ответ на вопрос: При качении без проскальзывания скорость нижней ее точки (касающейся покоящейся поверхности) равна нулю, а она есть векторная сумма скорости оси трубы v_0 и скорости вращения трубы вокруг оси ωr. Так как эти скорости направлены в разные стороны, то $v_0 = \omega r = 1$м/с.

Решение задачи: Рассмотрим взаимодействие трубы с поверхностью. На трубу будут действовать силы нормальной реакции поверхности и сила трения скольжения (в момент касания обязательно будет проскальзывать по поверхности – скорость ее нижней точки в момент касания в проекции на ось x $v_0 \sin(\alpha) - \omega_0 r = -v_0 / 2$).



По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости оси трубы на ось y просто меняет знак, и изменение импульса трубы в проекции на ось y $mv_y - (-mv_0 \cos(\alpha)) = 2mv_0 \cos(\alpha) = N\Delta t$, где $\vec{v}$ - скорость центра масс трубы после удара, а Δt - малое время удара. Тут возможны две ситуации. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса трубы в проекции на ось x равно $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = \mu N \Delta t = 2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Кроме того, <u>та же сила трения</u> тормозит вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Изменение линейной скорости вращательного движения в этом случае можно найти из соотношения $m\omega r - m\omega_0 r = -\mu N \Delta t = -2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Из этих соотношений следует, что $v_x = v_0[\sin(\alpha) + 2\mu\cos(\alpha)] = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а $\omega r = \omega_0 r - 2\mu v_0 \cos(\alpha) = v_0\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Проскальзывание прекращается при выравнивании линейной скорости вращения и скорости движения оси трубы: $v_x = \omega r$, и поэтому этот ответ верен, если $v_x < \omega r \Rightarrow \frac{v_0}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} v_0 < v_0 - \frac{\sqrt{3}}{4} v$, что неверно для нашего случая! Поэтому на самом деле проскальзывание прекратится раньше, чем завершится соударение (некоторые из соотношений неверны – например, теперь $mv_x - mv_0\sin(\alpha) = \mu N\Delta t' < \mu N\Delta t$, где $\Delta t'$ – время скольжения). С другой стороны, это означает, что теперь после удара проскальзывания нет, и $v_x = \omega r$. С учетом того, что $v_x = v_0\sin(\alpha) + \frac{\mu N}{m}\Delta t'$, а $\omega r = v_0 - \frac{\mu N}{m}\Delta t'$, находим: : $\frac{\mu N}{m}\Delta t' = \frac{v_0}{2}(1-\sin(\alpha))$. Таким образом, $v_x = \frac{v_0}{2}(1+\sin(\alpha))$. Теперь понятно, что $tg(\beta) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{1+\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

ОТВЕТ: под углом $\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

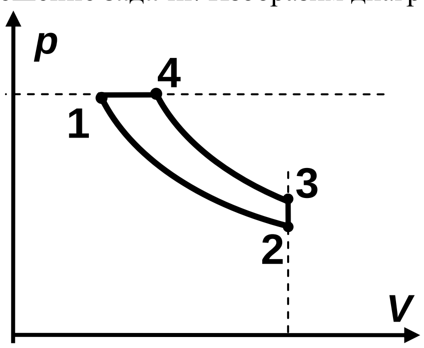
Задание 2:

Вопрос: Холодильным коэффициентом называют отношение $k \equiv Q_X / A$, где Q_X – количество теплоты, отнятое за цикл рабочим телом у содержимого холодильника, а A – работа, совершаемая двигателем установки над рабочим телом за цикл. Чему равен холодильный коэффициент установки, которая сбрасывает в окружающую среду на 10% больше тепла, чем отнимает у содержимого холодильника?

Задача: Для охлаждения процессора используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл гелия состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. Известно, что в ходе изобарического сжатия температура гелия уменьшается на $\Delta t_1 = 20°C$, а в ходе изохорического нагревания – увеличивается на $\Delta t_2 = 30°C$. Какую мощность должен потреблять двигатель холодильника, если его КПД равен 75%, а для поддержания постоянной температуры от процессора нужно отводить тепло с мощностью $P_X = 270$ Вт?

Ответ на вопрос: уравнение энергетического баланса $Q_H = 1{,}1 \cdot Q_X = A + Q_X \Rightarrow A = 0{,}1 Q_X$. Следовательно, $k = 10 = 1000\%$.

Решение задачи: Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок).



Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X, как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H, выражаются через теплоемкости гелия в изобарном и изохорном процессах: $Q_X = c_V\nu(T_3 - T_2) = \frac{3}{2}\nu R\Delta t_2$ и $Q_H = c_p\nu(T_4 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R\Delta t_1$, где R – универсальная газовая постоянная. Из условия энергетического баланса $Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = \frac{\nu R}{2}(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)$. Значит, холодильный коэффициент этой установки $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{3\Delta t_2}{5\Delta t_1 - 3\Delta t_2} = 9$. С другой стороны, за один цикл, проходящий за время τ, $Q_X = P_X \cdot \tau$, а произведенная над гелием работа $A = 0{,}75 \cdot P\tau$, где P – искомая мощность двигателя. Значит, $0{,}75 \cdot P = P_X / k$, то есть $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40$ Вт.

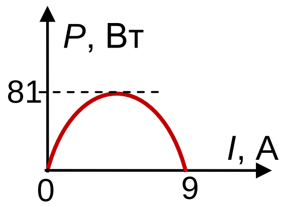
ОТВЕТ: $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40$ Вт.

Задание 3:

Вопрос: Изобразите график зависимости максимальной полезной мощности электродвигателя от величины тока, потребляемого им от аккумулятора с ЭДС 36 В. Сопротивление цепи питания ротора равно 4 Ом.

Задача: Некоторые электродвигатели можно использовать в качестве генератора: при совершении работы по вращению ротора в нем создается ЭДС индукции. При достаточной величине эта ЭДС может заряжать аккумулятор, подключенный к электродвигателю. Пусть ротор электродвигателя вращается за счет натяжения троса с массивным грузом, который плавно (и почти равномерно) опускается с некоторой высоты. В этом случае аккумулятор приобретает заряд $Q_1 = 3000$ мА·час. Если подключить этот генератор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям, и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, вращающих роторы обоих электродвигателей, то приобретаемый заряд $Q_2 = 4000$ мА·час. Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки четыре таких электродвигателя?

Ответ на вопрос: Мощность сторонних сил аккумулятора $P_a = \mathrm{E}I$ равна сумме полезной мощности P, мощности тепловых потерь на сопротивлении ротора $P_T = I^2R$ и мощности прочих потерь. Если «прочих» потерь нет, то полезная мощность максимальна и равна $P = \mathrm{E}I - RI^2$. График это функции – парабола с нулями при $I = 0$ и $I = \dfrac{36\text{ В}}{4\text{Ом}} = 9$ А с максимальным значением $P = 81$Вт при $I = 4{,}5$ А:



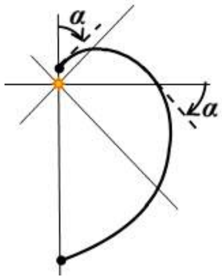
Решение задачи: Рассмотрим сначала случай одного генератора. При опускании груза, согласно условию, его потенциальная энергия переходит в работу по дозарядке источника и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки. Работа над источником равна $A_u = \mathrm{E}Q_1$, а мощность тепловыделения $P_T = I^2R$. Поскольку груз опускается равномерно, то сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q_1 \approx I \cdot t$. Таким образом, $mgH \approx \mathrm{E}Q_1 + I^2Rt = Q_1\left(\mathrm{E} + \dfrac{RQ_1}{t}\right)$. В случае с двумя генераторами они делят нагрузку поровну, то есть сила натяжения каждого троса равна половине силы натяжения для одного троса. Поскольку магнитные силы, действующие на ротор, пропорциональны току через него, то токи через генераторы в этом случае будут равны $I' = I/2$. Суммарный ток остался тем же, то есть теперь $Q_2 \approx I \cdot t'$ Значит, $mgH \approx \mathrm{E}Q_2 + 2\left(\dfrac{I}{2}\right)^2 Rt' = \mathrm{E}Q_2 + R\dfrac{I}{2}It' = Q_2\left(\mathrm{E} + \dfrac{RQ_1}{2t}\right)$. Сопоставляя два выражения, находим, что $Q_2 = \dfrac{2(\mathrm{E}t + RQ_1)}{2\mathrm{E}t + RQ_1}Q_1 = \dfrac{2(x+1)}{2x+1}Q_1$, где введено обозначение $x \equiv \dfrac{\mathrm{E}t}{RQ_1}$. Из этого соотношения выражаем $x = \dfrac{2Q_1 - Q_2}{2(Q_2 - Q_1)}$. Повторив аналогичные рассуждения для случая четырех аккумуляторов, получим $Q_4 = \dfrac{4(x+1)}{4x+1}Q_1 = \dfrac{2Q_1Q_2}{3Q_1 - Q_2} = 4800$ мА·час.

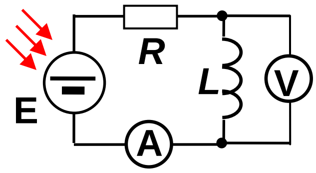
ОТВЕТ: $Q_4 = \dfrac{2Q_1Q_2}{3Q_1 - Q_2} = 4800$ мА·час.

Задание 4:

Вопрос: В каком случае напряжение на катушке индуктивности равно величине ЭДС индукции в ней?

Задача: В архивах был найден отчет о прохождении роботом трассы в виде участка спирали. Форма спирали такова, что все лучи, проведенные из «центра», она пересекает под одним и тем же углом





$\alpha = 45°$. В «центре» размещена небольшая лампа, а робот снабжен датчиком с фотоэлементом, ЭДС которого пропорциональна мощности поступления световой энергии. Фотоэлемент датчика включен в цепь, показанную на схеме. Индуктивность L = 50 мГн мала ($L << R\,t$, где t – время движения робота), вольтметр и амперметр практически идеальны. Информация о времени была утеряна, но были данные о показаниях приборов. Обнаружилась, что значения напряжения на вольтметре и силы тока через амперметр были пропорциональны друг другу: $U \approx I \cdot 6{,}28$ мОм. Как в ходе движения робота изменялось отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра»? Найдите время прохождения роботом трассы.

Ответ на вопрос: В общем случае напряжение на катушке отличается от ЭДС индукции в ней на величину напряжения на омическом сопротивлении катушки. Значит, напряжение на катушке примерно равно ЭДС индукции, если напряжение на омическом сопротивлении много меньше этой ЭДС по величине, то есть при очень малом омическом сопротивлении катушки.

Решение задачи: При малой индуктивности ЭДС индукции будет мала, и ток через катушку будет определяться ЭДС фотоэлемента. Пусть коэффициент пропорциональности между ЭДС фотоэлемента и мощностью светового потока равен α. Тогда напряжение на индуктивности

$$\mathrm{E}_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0} = -\frac{L}{R}\frac{\Delta \mathrm{E}_\phi}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0} = -\alpha\frac{L}{R}\frac{\Delta P_{св}}{\Delta t}\Big|_{\Delta t\to 0}$$

Мощность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поскольку при условиях задачи ЭДС индукции можно пренебречь по сравнению с ЭДС фотоэлемента, то так же изменяется и ток в цепи: $I = I_0\frac{r_0^2}{r^2}$ (и поэтому $r = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I}}$). Заметим, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{(r+\Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2-(r+\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2} = -\frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2}.$$

При малых изменениях расстояния $\Delta r << r$ получаем: $\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) \approx -\frac{2\Delta r}{r^3}$. Значит,

$$U = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = -LI_0r_0^2\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{\Delta t} \approx LI_0r_0^2\frac{2}{r^3}\frac{\Delta r}{\Delta t} = 2\frac{LI_0r_0^2}{r^3}v,$$

где $v \equiv \frac{\Delta r}{\Delta t}$ – скорость удаления источника и датчика. С учетом выражения для расстояния находим, что $U \approx 2\frac{LI^{3/2}}{r_0\sqrt{I_0}}v \Rightarrow v = \frac{r_0\sqrt{I_0}}{2LI^{3/2}}U$. Следовательно, отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра» $\frac{v}{r} = \frac{U}{2LI} \approx 6{,}28\cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$ – эта величина остается постоянной! С другой стороны, при движении по заданной траектории отношение скорости робота вдоль радиуса v и скорости вращения ωr есть тангенс угла, под которым спираль пересекает радиальные лучи, то есть $\frac{v}{\omega r} = tg(\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}ctg(\alpha) = 6{,}28\cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$. Итак, вращение робота вокруг «центра» происходит с постоянной угловой скоростью, и за время прохождения трассы он поворачивается на угол в π радиан. Значит, $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.

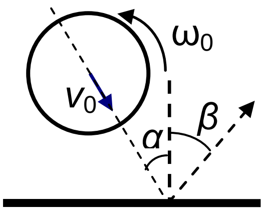
ОТВЕТ: $t = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.

БИЛЕТ № 03: Задания и возможные решения

Задание 1:

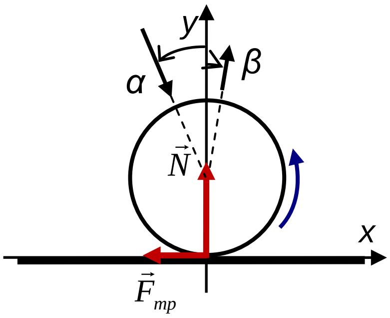
Вопрос: Цилиндрическая труба радиусом 20 см катится по ровной поверхности без проскальзывания, и ее ось движется со 1 м/с относительно поверхности. С какой угловой скоростью вращается труба?

Задача: Отрезок тонкостенной цилиндрической трубы радиуса r падает на горизонтальную плиту под углом $\alpha = 30°$ к вертикали (см. рисунок). Перед ударом скорость оси трубы равнялась v_0. Кроме того, перед ударом труба вращалась вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_0 = v_0 / r$. Под каким углом β к вертикали будет двигаться ось трубы после удара? Удар считать «мгновенным», а деформации поверхности – упругими (то есть при нормальном падении без вращения удар был бы упругим). Коэффициент трения между трубой и поверхностью $\mu = 0{,}25$.



Ответ на вопрос: При качении без проскальзывания скорость нижней ее точки (касающейся покоящейся поверхности) равна нулю, а она есть векторная сумма скорости оси трубы v_0 и скорости вращения трубы вокруг оси ωr. Так как эти скорости направлены в разные стороны, то $\omega = \frac{v_0}{r} = 5$ с$^{-1}$.

Решение задачи: Рассмотрим взаимодействие трубы с поверхностью. На трубу будут действовать силы нормальной реакции поверхности и сила трения скольжения (в момент касания обязательно будет проскальзывать по поверхности – скорость ее нижней точки в момент касания в проекции на ось x $v_0 \sin(\alpha) + \omega_0 r = +3v_0/2$).



По условию, действие силы нормальной реакции совпадает с ее действием при упругом ударе, поэтому проекция скорости оси трубы на ось y просто меняет знак, и изменение импульса трубы в проекции на ось y $mv_y - (-mv_0 \cos(\alpha)) = 2mv_0 \cos(\alpha) = N\Delta t$, где $\vec{v}$ - скорость центра масс трубы после удара, а Δt - малое время удара. Если в процессе удара силы трения не успевают остановить проскальзывание, то в течение всего времени Δt сила трения $F_{тр} = \mu N$, и изменение импульса трубы в проекции на ось x равно $mv_x - mv_0 \sin(\alpha) = -\mu N \Delta t = -2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Кроме того, <u>та же сила трения</u> тормозит вращательное движение кольца одновременно с торможением проскальзывания. Изменение линейной скорости вращательного движения в этом случае можно найти из соотношения $m\omega r - m\omega_0 r = -\mu N \Delta t = -2\mu m v_0 \cos(\alpha)$. Из этих соотношений следует, что $v_x = v_0[\sin(\alpha) - 2\mu\cos(\alpha)] = \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а $\omega r = \omega_0 r - 2\mu v_0 \cos(\alpha) = v_0\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Нетрудно заметить, что и при этих значениях труба продолжает скользить по поверхности: скорость ее нижней точки относительно поверхности $v_x + \omega r = \frac{v_0}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}v_0 + v_0 - \frac{\sqrt{3}}{4}v = \frac{v_0}{2}(3 - \sqrt{3}) > 0$.

Итак, проскальзывание <u>действительно</u> не прекращается до окончания удара, и полученные формулы верны! Теперь понятно, что $tg(\beta) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$.

ОТВЕТ: под углом $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$.

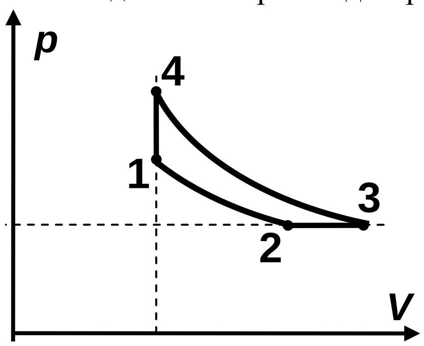
Задание 2:

Вопрос: Холодильным коэффициентом называют отношение $k \equiv Q_X / A$, где Q_X – количество теплоты, отнятое за цикл рабочим телом у содержимого холодильника, а A – работа, совершаемая двигателем установки над рабочим телом за цикл. Во сколько раз теплота, сбрасываемая установкой в окружающую среду, больше A, если $k = 700\%$?

Задача: Для охлаждения процессора используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл гелия состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. Известно, что в ходе изохорического охлаждения температура гелия уменьшается на $\Delta t_1 = 30°C$, а в ходе изобарического расширения – увеличивается на $\Delta t_2 = 15°C$. Какую мощность должен потреблять двигатель холодильника, если его КПД равен 75%, а для поддержания постоянной температуры от процессора нужно отводить тепло с мощностью $P_X = 180$ Вт?

Ответ на вопрос: уравнение энергетического баланса $Q_H = A + Q_X = (k+1)A = 8A$. Следовательно, Q_H больше A в 8 раз.

Решение задачи: Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок).



Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X, как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H, выражаются через теплоемкости гелия в изобарном и изохорном процессах: $Q_X = c_p \nu (T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R \Delta t_2$ и $Q_H = c_V \nu (T_4 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R \Delta t_1$, где R – универсальная газовая постоянная. Из условия энергетического баланса $Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = \frac{\nu R}{2}(3\Delta t_1 - 5\Delta t_2)$.

Значит, холодильный коэффициент этой установки $k \equiv \dfrac{Q_X}{A} = \dfrac{5\Delta t_2}{3\Delta t_1 - 5\Delta t_2} = 5$. С другой стороны, за один цикл, проходящий за время τ, $Q_X = P_X \cdot \tau$, а произведенная над гелием работа $A = 0{,}75 \cdot P\tau$, где P – искомая мощность двигателя. Значит, $0{,}75 \cdot P = P_X / k$, то есть

$$P = \frac{4(3\Delta t_1 - 5\Delta t_2)}{15\Delta t_2} P_X = 48 \text{ Вт}.$$

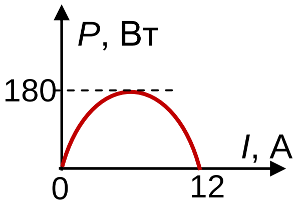
ОТВЕТ: $P = \dfrac{4(3\Delta t_1 - 5\Delta t_2)}{15\Delta t_2} P_X = 48$ Вт.

Задание 3:

Вопрос: Изобразите график зависимости максимальной полезной мощности электродвигателя от величины тока, потребляемого им от аккумулятора с ЭДС 60 В. Сопротивление цепи питания ротора равно 5 Ом.

Задача: Некоторые электродвигатели можно использовать в качестве генератора: при совершении работы по вращению ротора в нем создается ЭДС индукции. При достаточной величине эта ЭДС может заряжать аккумулятор, подключенный к электродвигателю. Пусть ротор электродвигателя вращается за счет натяжения троса с массивным грузом, который плавно (и почти равномерно) опускается с некоторой высоты. В этом случае аккумулятор приобретает заряд $Q_1 = 2000$ мА·час. Если подключить этот генератор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям, и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, вращающих роторы обоих электродвигателей, то приобретаемый заряд $Q_2 = 3000$ мА·час. Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки три таких электродвигателя?

Ответ на вопрос: Мощность сторонних сил аккумулятора $P_a = \mathrm{E}I$ равна сумме полезной мощности P, мощности тепловых потерь на сопротивлении ротора $P_T = I^2R$ и мощности прочих потерь. Если «прочих» потерь нет, то полезная мощность максимальна и равна $P = \mathrm{E}I - RI^2$. График это функции – парабола с нулями при $I = 0$ и $I = \frac{60\,\text{В}}{5\,\text{Ом}} = 12\,\text{А}$ с максимальным значением $P = 180$ Вт при $I = 6$ А:



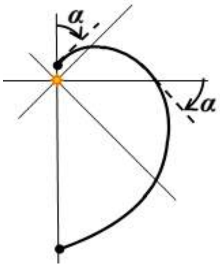
Решение задачи: Рассмотрим сначала случай одного генератора. При опускании груза, согласно условию, его потенциальная энергия переходит в работу по дозарядке источника и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки. Работа над источником равна $A_u = \mathrm{E}Q_1$, а мощность тепловыделения $P_T = I^2R$. Поскольку груз опускается равномерно, то сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q_1 \approx I \cdot t$. Таким образом, $mgH \approx \mathrm{E}Q_1 + I^2Rt = Q_1\left(\mathrm{E} + \frac{RQ_1}{t}\right)$. В случае с двумя генераторами они делят нагрузку поровну, то есть сила натяжения каждого троса равна половине силы натяжения для одного троса. Поскольку магнитные силы, действующие на ротор, пропорциональны току через него, то токи через генераторы в этом случае будут равны $I' = I/2$. Суммарный ток остался тем же, то есть теперь $Q_2 \approx I \cdot t'$ Значит, $mgH \approx \mathrm{E}Q_2 + 2\left(\frac{I}{2}\right)^2 Rt' = \mathrm{E}Q_2 + R\frac{I}{2}It' = Q_2\left(\mathrm{E} + \frac{RQ_1}{2t}\right)$. Сопоставляя два выражения, находим, что $Q_2 = \frac{2(\mathrm{E}t + RQ_1)}{2\mathrm{E}t + RQ_1}Q_1 = \frac{2(x+1)}{2x+1}Q_1$, где введено обозначение $x \equiv \frac{\mathrm{E}t}{RQ_1}$. Из этого соотношения выражаем $x = \frac{2Q_1 - Q_2}{2(Q_2 - Q_1)}$. Повторив аналогичные рассуждения для случая трех аккумуляторов, получим $Q_3 = \frac{3(x+1)}{3x+1}Q_1 = \frac{3Q_1Q_2}{4Q_1 - Q_2} = 3600$ мА·час.

ОТВЕТ: $Q_3 = \frac{3(x+1)}{3x+1}Q_1 = \frac{3Q_1Q_2}{4Q_1 - Q_2} = 3600$ мА·час.

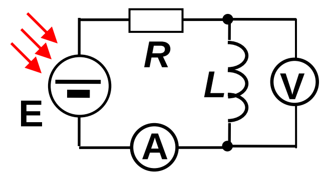
Задание 4:

Вопрос: В каком случае напряжение на катушке индуктивности равно величине ЭДС индукции в ней?

Задача: В архивах был найден отчет о прохождении роботом трассы в виде участка спирали. Форма спирали такова, что все лучи, проведенные из «центра», она пересекает под одним и тем же углом



$\alpha = \mathrm{arctg}(0{,}5)$. В «центре» размещена небольшая лампа, а робот снабжен датчиком с фотоэлементом, ЭДС которого пропорциональна мощности поступления световой энергии. Фотоэлемент датчика включен в цепь, показанную на схеме. Индуктивность $L = 25$ мГн мала ($L << R\,t$, где t – время движения робота), вольтметр и амперметр практически идеальны. Информация о времени была утеряна, но были данные о показаниях приборов. Обнаружилась, что значения напряжения на вольтметре и силы тока через амперметр были пропорциональны друг другу: $U \approx I \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ Ом. Как в ходе движения робота изменялось отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра»? Найдите время прохождения роботом трассы.



Ответ на вопрос: В общем случае напряжение на катушке отличается от ЭДС индукции в ней на величину напряжения на омическом сопротивлении катушки. Значит, напряжение на катушке примерно равно ЭДС индукции, если напряжение на омическом сопротивлении много меньше этой ЭДС по величине, то есть при очень малом омическом сопротивлении катушки.

Решение задачи: При малой индуктивности ЭДС индукции будет мала, и ток через катушку будет определяться ЭДС фотоэлемента. Пусть коэффициент пропорциональности между ЭДС фотоэлемента и мощностью светового потока равен α. Тогда напряжение на индуктивности

$$\mathrm{E}_i = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}\Big|_{\Delta t \to 0} = -\frac{L}{R}\frac{\Delta \mathrm{E}_{\phi}}{\Delta t}\Big|_{\Delta t \to 0} = -\alpha\frac{L}{R}\frac{\Delta P_{св}}{\Delta t}\Big|_{\Delta t \to 0}$$

Мощность светового потока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поскольку при условиях задачи ЭДС индукции можно пренебречь по сравнению с ЭДС фотоэлемента, то так же изменяется и ток в цепи: $I = I_0\frac{r_0^2}{r^2}$ (и поэтому $r = r_0\sqrt{\frac{I_0}{I}}$). Заметим, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{(r+\Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - (r+\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2} = -\frac{2r\Delta r + (\Delta r)^2}{r^2(r+\Delta r)^2}.$$

При малых изменениях расстояния $\Delta r << r$ получаем: $\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right) \approx -\frac{2\Delta r}{r^3}$. Значит,

$$U = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = -LI_0r_0^2\Delta\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{\Delta t} \approx LI_0r_0^2\frac{2}{r^3}\frac{\Delta r}{\Delta t} = 2\frac{LI_0r_0^2}{r^3}v,$$

где $v \equiv \frac{\Delta r}{\Delta t}$ – скорость удаления источника и датчика. С учетом выражения для расстояния находим, что $U \approx 2\frac{LI^{3/2}}{r_0\sqrt{I_0}}v \Rightarrow v = \frac{r_0\sqrt{I_0}}{2LI^{3/2}}U$. Следовательно, отношение скорости удаления робота от «центра» и расстояния до «центра» $\frac{v}{r} = \frac{U}{2LI} \approx 3{,}14 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$ – эта величина остается постоянной! С другой стороны, при движении по заданной траектории отношение скорости робота вдоль радиуса v и скорости вращения ωr есть тангенс угла, под которым спираль пересекает радиальные лучи, то есть $\frac{v}{\omega r} = tg(\alpha) \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}ctg(\alpha) = 6{,}28 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$. Итак, вращение робота вокруг «центра» происходит с постоянной угловой скоростью, и за время прохождения трассы он поворачивается на угол в π радиан. Значит, $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.

ОТВЕТ: $t = \frac{2\pi LI}{U}tg(\alpha) \approx 50$ с.