

# 10 класс

## Задача 1. Ящик фараона

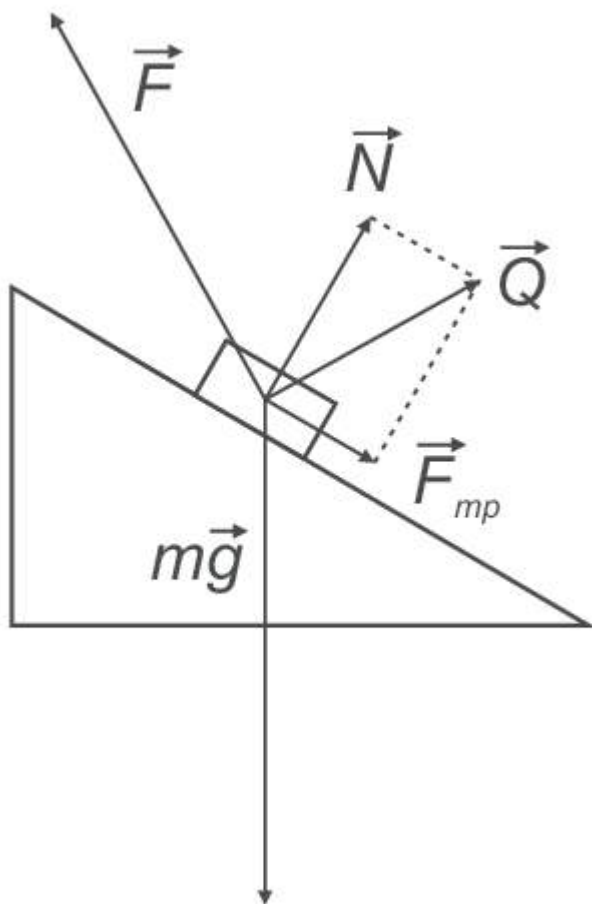
По наклонной плоскости, образующей угол  $20^\circ$  с горизонтом, за веревку затаскивают ящик. Коэффициент трения ящика о плоскость равен 0,58. Под каким углом к горизонту следует направить веревку, чтобы с наименьшим усилием равномерно затаскивать ящик? Ответ запишите в градусах, округлив до целого числа.

### Решение

На ящик действует сила тяжести  $mg$ , сила натяжения веревки  $F$ , сила нормальной реакции опоры  $N$  и сила трения  $F_{тр}$ . Спроецируем все силы на направления вдоль сходящей и перпендикулярно к ним, и запишем соответствующие уравнения движения.

*(Дальнейшее решение возможно и путем отыскания производной  $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ , но, поскольку задача рассчитана на 10 класс, мы пойдем другим путем)*

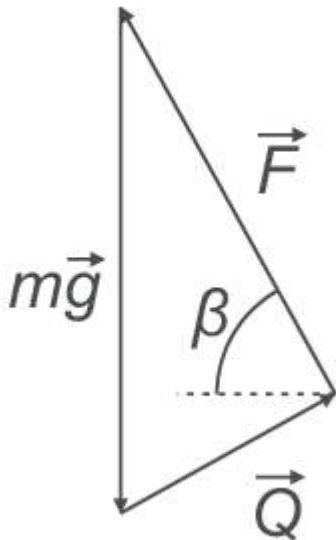
Заменим силы  $N$  и  $F_{тр}$  их равнодействующей - полной силой реакции опоры  $Q = N + F_{тр}$  (см. рис.).



При равномерном движении сумма сил  $\vec{Q}$ ,  $\vec{F}$  и  $m\vec{g}$  должна равняться нулю, а их векторы образовывать замкнутый треугольник. Из статики известно, что направление силы  $\vec{Q}$  составляет с нормалью к наклонной плоскости угол  $\delta$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} \delta = F_{\text{тр}}/N = \mu.$$

Отсюда видно, что при изменении модуля и направления силы  $\vec{F}$  направление силы  $\vec{Q}$  остается неизменным. Т.к. модуль и направление  $m\vec{g}$  неизменны, то модуль  $\vec{F}$  окажется минимальным, если этот вектор окажется перпендикулярным  $\vec{Q}$  (см. рис.).



При этом  $\vec{F}$  будет составлять с горизонтом угол

$$\beta = \alpha + \delta = \alpha + \arctg \mu = 50^\circ$$

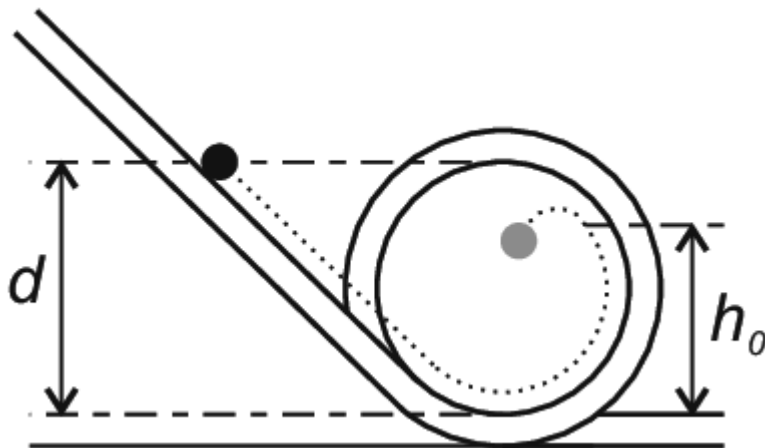
Критерий	Числ. ответ	Баллы
$\beta = 50^\circ$	50	20

## Задача 2. Мертвая петля

По гладкому желобу, изогнутому в виде петли в вертикальной плоскости, соскальзывает без трения шарик. Прямая наклонная часть желоба плавно, по касательной, переходит в окружность радиуса  $R = 60$  см, которая, в свою очередь, также плавно переходит в горизонтальный прямой участок. С какой минимальной высоты нужно запустить шарик, чтобы он совершил «мертвую петлю», т.е. проскользнул по круглому участку без отрыва от желоба.

На какой высоте  $h_0$  произойдет отрыв шарика от желоба, если пустить его с высоты  $d$ , равной диаметру петли ( $h = 2R = 120$  см)?

Оба ответа выразите в сантиметрах, округлив каждый до целого числа.



## Решение

В верхней точке «мертвой петли» минимальная скорость определяется соотношением  $(v_{\min})^2 / R = g$ .

Учитывая, что потеряв высоту  $h$ , тело приобретает скорость  $v = (2gh)^{1/2}$ , имеем

$$2(H_{\min} - 2R) / R = 1$$

откуда:

$$H_{\min} = 0,5R + 2R = 2,5R = 150 \text{ см.}$$

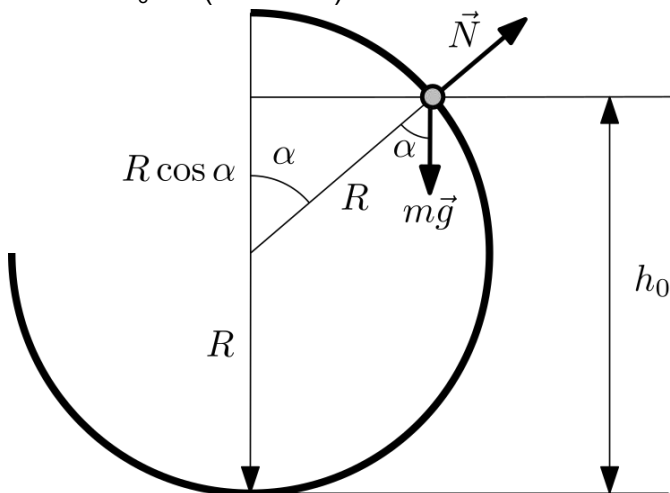
Во время «мертвой петли» нормальное давление шарика на опору равно

$$N = m(v^2 / R - g \cos \alpha),$$

где  $\alpha$  – центральный угол дуги между шариком и верхней точкой окружности. При спуске шарика с начальной высоты  $h = 2R$  это выражение принимает вид:

$$N = m[2g(1 - \cos \alpha) - g \cos \alpha] = mg(2 - 3 \cos \alpha).$$

Отрыв произойдет при  $N = 0$ , т.е., в точке, для которой  $\cos \alpha = 2/3$ . Она находится на высоте:  $h_0 = R(1 + \cos \alpha) = 5R/3 = 100 \text{ см}$ . Ответ:  $H_{\min} = 2,5R = 150 \text{ см}$ ;  $h_0 = 5R/3 = 100 \text{ см}$



Критерий	Числ. ответ	Баллы
$H_{\min} = 2,5R = 150 \text{ см}$	150	10
$h_0 = 5R/3 = 100 \text{ см}$	100	10

## Задача 3. Наутилус

Для участия в соревнованиях моделей подводных лодок в Баренцевом море команда школьников изготовила модель «Наутилус». Чтобы модель не тонула в воде, к ней были прикреплены несколько герметичных пакетов с воздухом. Плотность воды в море  $1050 \text{ кг/м}^3$ , при погружении на глубину, не превышающую критической – 7 м, модель всплывает, а при погружении на большую – тонет. В устье реки Печоры, где плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ , критическая глубина всего 1 м. Найдите плотность модели «Наутилуса» в  $\text{кг/м}^3$ , округлив до десятков.

К воздуху применим закон Бойля-Мариотта – для постоянного количества газа при неизменной температуре произведение давления  $p$  газа на занимаемый им объём  $V$  постоянно:  $pV = const$ . Атмосферное давление на уровне моря  $105 \text{ кПа}$ . Ускорение свободного падения  $10 \text{ м/с}^2$ .

## Решение

Критическая глубина погружения модели соответствует положению неустойчивого равновесия; сила тяжести уравнивается выталкивающей силой, действующей на суммарный объём модели и пакетов с воздухом. Обозначив через  $M$ ,  $\rho_m$ ,  $V_m$  массу, плотность и объём модели, через  $V_0$ ,  $V_c$  и  $V_n$  – объёмы воздуха в полиэтиленовых пакетах, соответственно, над водой и при погружении на критическую глубину в морской и речной воде, а через  $p_0$  – атмосферное давление, запишем:

$$\text{в морской воде: } Mg = \rho_c(V_m + V_c)g \quad (1)$$

$$\text{в речной воде: } Mg = \rho_n(V_m + V_n)g \quad (1')$$

При погружении объём воздуха в полиэтиленовых пакетах уменьшается, причем согласно закону Бойля – Мариотта

$$p_0V_0 = (p_0 + \rho_cgh_c)V_c \quad (2)$$

$$p_0V_0 = (p_0 + \rho_ngh_n)V_n \quad (2')$$

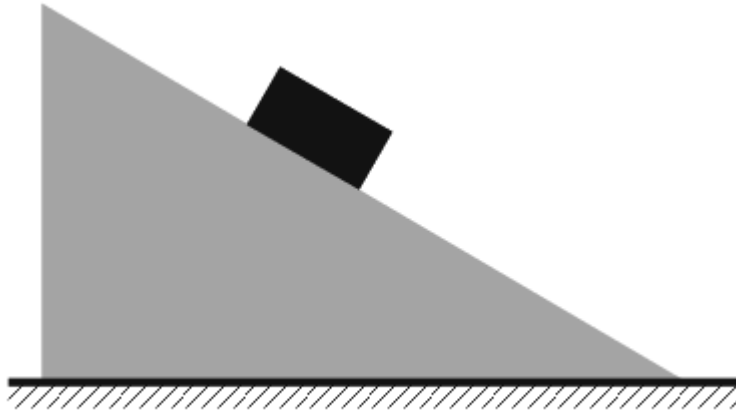
Решая систему уравнений, находим  $\rho_c(p_0 + \rho_ngh_n)(\rho_m - \rho_n) = \rho_n(p_0 + \rho_cgh_c)(\rho_m - \rho_c)$

$$\text{откуда } \rho_m = \frac{h_c \rho_c - h_n \rho_n}{h_c - h_n - \left(\frac{p_0}{\rho_c g}\right)(\rho_c - \rho_n)} = 1154. (54) \approx 1150 \text{ кг/м}^3$$

Критерий	Числ. ответ	Баллы
$\rho_m = 1150 \text{ кг/м}^3$	1150	20

## Задача 4. Клин

На горизонтальной поверхности стола лежит клин высотой  $h = 60 \text{ см}$  и основанием  $b = 80 \text{ см}$ . Масса клина  $M = 160 \text{ г}$ . По его гладкой наклонной поверхности соскальзывает без трения брусок массой  $m = 500 \text{ г}$ . Определите минимальный коэффициент трения между столешницей и клином, при котором клин будет оставаться в покое относительно стола. Ускорение свободного падения примите равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Ответ округлите до десятых.



### Решение

Брусок будет скользить по клину равноускоренно. Если  $\alpha$  – угол наклона плоскости клина к горизонту, то ускорение бруска

$$a = g \cdot \sin \alpha,$$

а его горизонтальная компонента

$$a_x = g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда, горизонтальная компонента силы давления бруска на клин, а, значит, и сила трения, которая должна удерживать клин в покое:

$$F_{\text{тр}} = mg \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2,4 \text{ Н};$$

Вертикальная компонента силы давления бруска на клин равна  $mg \cdot \cos^2 \alpha$ .

К ней нужно добавить вес самого клина. Т.о., сила давления всей системы на пол, как, впрочем, и сила нормальной реакции пола, равна:

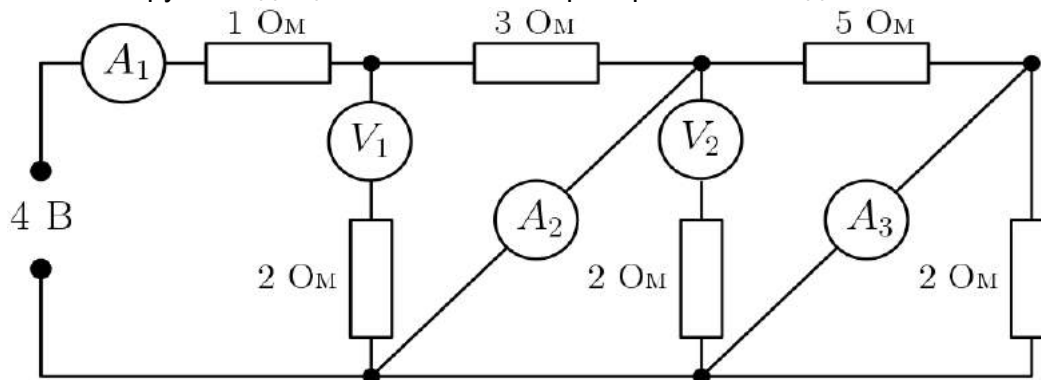
$$N = g (M + m \cos^2 \alpha) = 4,8 \text{ Н};$$

Сила трения, действующая на клин со стороны стола, ровно в 2 раза меньше, чем сила нормальной реакции опоры. Это возможно, если коэффициент трения клина о столешницу больше или равен 0,5.

Критерий	Числ. ответ	Баллы
$\mu = 0,5$	0,5	20

## Задача 5. Схема

Определите показания всех приборов на схеме, которая изображена на рисунке ниже. Ответы округлите до целых чисел. Все приборы считать идеальными.



Решение:

Все приборы являются идеальными (их подключение в цепь ничего не изменяет в цепи), а значит вольтметр не пропускает ток, а амперметр является просто проводом и не имеет сопротивления.

Можно заметить, что правая часть схемы закорочена проводом. Отсюда получаем значение тока  $I = 4/4 = 1$  А, соответственно амперметр  $A_1$  покажет именно это значение. Зная ток, можно легко вычислить показания всех остальных приборов. Стоит сразу отметить, что показания амперметра  $A_3$  и вольтметра  $V_2$  являются нулевыми, поскольку токи в тех участках цепи отсутствуют. Рассмотрим оставшиеся приборы.

Показания амперметров  $A_1$  и  $A_2$  совпадают. Показания вольтметра  $V_1$  равны падению напряжения на резисторе 3 Ом. При токе в 1 А оно составит:  $U = I \cdot R = 3$  В.

Критерий	Числ. ответ	Баллы
Значение тока амперметра $A_1 = 1$ А.	1	5
Значение тока амперметра $A_2 = 1$ А.	1	5
Показания вольтметра $V_1 = 3$ В.	3	5
Показания амперметра $A_3 = 0$ А	0	3
Показания вольтметра $V_2 = 0$ В и	0	2