Многопрофильная олимпиада школьников Уральского федерального университета «Изумруд»
2016-2017 учебный год

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ

Физика 9 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Последняя ступень (20 баллов)

Последняя ступень ракеты имеет два маршевых двигателя, которые могут сообщать ей постоянные ускорения a_1 и a_2, направленные вертикально вверх. Первый двигатель рассчитан на работу в течение времени t_1, второй – t_2, $a_1 > a_2$, $t_1 < t_2$. Двигатели могут включаться как одновременно, так и последовательно. Какой порядок включения двигателей следует выбрать для того, чтобы к моменту окончания работы двигателей ракета поднялась на максимальную высоту?

Решение

При одновременном включении двигателей силы их тяги складываются, следовательно, сначала ракета будет двигаться с ускорением $a_1 + a_2$ в течение t_1, а затем в течение $t_2 - t_1$ с ускорением a_2. За это время ракета поднимется на высоту

$$h_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)t_1^2 + (a_1 + a_2)t_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 = \frac{a_2t_2^2}{2} - \frac{a_1t_1^2}{2} + a_1t_1t_2.$$

Далее рассмотрим случай последовательного запуска двигателей. Высота подъёма ракеты зависит от порядка включения двигателей. Если первым включили двигатель, обеспечивающий ускорение a_1, итоговая высота ракет будет

$$h_2 = a_1\frac{t_1^2}{2} + (a_1t_1)t_2 + a_2\frac{t_2^2}{2},$$

в противоположном случае

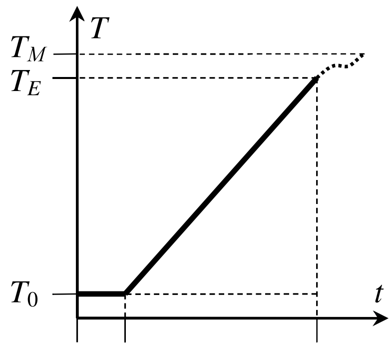
$$h_3 = a_2\frac{t_2^2}{2} + (a_2t_2)t_1 + a_1\frac{t_1^2}{2}.$$

Очевидно, из трёх приведённых высот наибольшей будет h_2, следовательно, двигатели нужно включать последовательно, запустив сначала двигатель, обеспечивающий большее ускорение.

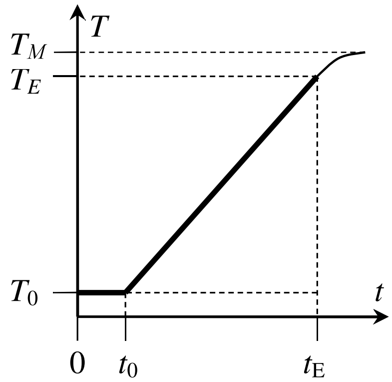
Критерий	**Баллы**
Записана высота ракеты после одновременной работы двигателей (h_1)	5
Учен порядок последовательного запуска двигателей	10
Записана высота ракеты после последовательной работы двигателей (h_2 или h_3)	5

Задание 2. Водонагреватель (30 баллов)

При включении в сеть с напряжением U накопительного водонагревателя температура, воды, отбираемой с самого верха его бака, начинает расти не сразу, а спустя некоторое время t_0 после момента включения. Используя график, определите массу воды m в баке и конечную температуру T_M отбираемой жидкости спустя некоторое время после момента выключения t_E, за которое установится тепловое равновесие. Обычный накопительный водонагреватель оснащается массивным ТЭН-ом (электроводонагревателем), расположенным на дне устройства и имеющем сопротивление R. Весь бак с водой теплоизолирован и герметичен. Теплоёмкость воды считать известной.



Решение



Очевидно, что задержка роста температуры после включения нагревателя определяется теплоёмкостью некоторой совокупности элементов – спирали, корпуса ТЭН-а и некоторым слоем воды, который успевает нагреться до запуска процессов конвекции и теплопроводности.

Единственный вариант простого решения этой задачи – это оценить, сколько тепловой энергии успела накопить система ТЭН-бак-вода до того, как начался рост температуры. Очевидно, что это количество может быть найдено по закону Джоуля-Ленца для нагревателя, который потребляет из сети электрическую мощность $P = U \cdot I = U^2/R$, переводя её в теплоту Q:

$$Q_0 = P \cdot t_0 = \frac{U^2 t_0}{R}. \tag{1}$$

Затем процесс нагревания идет «как положено» с ростом температуры от времени. Если мы знаем начальную температуру T_0 и время t_0 и конечные их значения T_E и t_E, то можем записать уравнение теплового баланса, которое после необходимых преобразований сведётся к:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_E - T_0) = c \cdot m \cdot \Delta T .$$

С другой стороны за время $\Delta t = t_E - t_0$ выделяется теплота, эквивалентная работе э.д.с.: $Q = A_{ЭЛ} = \dfrac{U^2 \Delta t}{R}$. Отсюда:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U^2}{c \cdot m \cdot R} \Rightarrow m = \frac{\Delta t}{\Delta T} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R} = \frac{t_E - t_0}{T_E - T_0} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R}.$$

Что же касается конечной температуры, то очевидно, что она будет достигнута не сразу в момент выключения нагревателя, а только спустя некоторое время, которое потребуется, чтобы в системе установилось тепловое равновесие. В условиях отсутствия теплопотерь равновесие установится только после того, как вся ранее накопленная «скрытая» теплота, которая была необходима для запуска процесса нагрева «как положено» перейдёт в теплоту нагрева воды в баке, что и приведёт к выравниванию температур во всех точках системы. Тогда:

$$Q_0 = c \cdot m \cdot (T_M - T_E) \Rightarrow T_M = T_E + \frac{Q_0}{c \cdot m}.$$

Подставляя полученные ранее выражения, получаем:

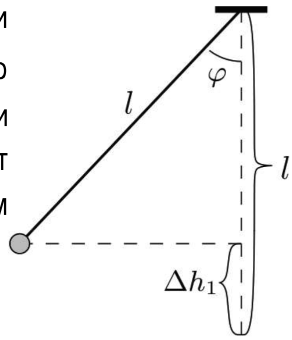
$$T_M = T_E + t_0 \frac{T_E - T_0}{t_E - t_0} = \frac{T_E t_E - T_0 t_0}{t_E - t_0}.$$

Критерий	**Баллы**
Предположение о накоплении энергии зам время t_0	10
Записан закон Джоуля-Ленца (1)	5
Выражение для определения m	10
Выражение для определения T_M	5

Задание 3. Лампочка в лифте (25 баллов)
В кабине лифта к потолку подвешен математический маятник (небольшое тело, например, лампочка Ильича на нерастяжимом невесомом проводе). Маятник отклонили на 90° от вертикали и отпустили. В момент прохождения лампочкой точки равновесия лифт начал двигаться вверх с постоянным ускорением a. Найти максимальный угол отклонения лампочки от равновесия в движущемся лифте.

Решение
Из закона сохранения энергии кинетическая энергия лампочки при прохождении равновесия будет равна изменению её потенциальной энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\Delta h = mgl,$$



l – длина подвеса лампочки. Скорость лампочки в нижней точке траектории $v = \sqrt{2gl}$. Движение лампочки в ускоренно движущемся лифте эквивалентно её движению в поле тяжести с ускорением свободного падения равным *g* + *a* и направленным вниз. В этом случае потенциальная энергия лампочки будет равна$m(g+a)h$. Тогда из закона сохранения энергии при максимальном отклонении лампочки

$$m(g+a)\Delta h_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

Изменение высоты лампочки при отклонении на угол φ равно $\Delta h_1 = l - l cos\varphi = l(1 - cos\varphi)$.

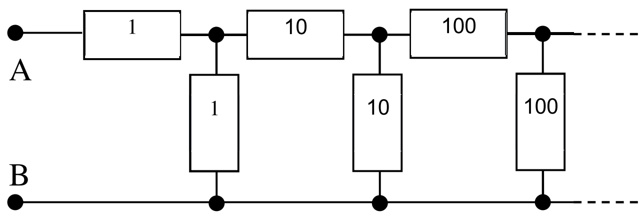
Имеем

$$m(g+a)l(1 - cos\varphi) = mgl,$$

откуда $cos\varphi = \frac{a}{g+a}$, или $\varphi = arccos\frac{a}{g+a}$.

Критерий	Баллы
Записан закон сохранения энергии в неподвижном лифте	5
Показана эквивалентность движения в ускоренно движущемся лифте и в поле тяжести	10
Записан закон сохранения энергии в движущемся лифте	5
Получен верный ответ	5

Задание 4. Длинная цепь (25 баллов)
В спец. устройстве есть резисторный 20-ти звенный делитель – цепь, содержащая 20 пар резисторов. Сопротивления резисторов в паре равны и нарастают между соседними парами каждый раз в 10 раз относительно предыдущей пары. Найдите входное сопротивление делителя (между точками A и B).



Решение

Из условия видно, что сопротивления звеньев быстро возрастают, поэтому для приближённого вычисления можно не учитывать вклад «удалённых» от входа звеньев. При этом ответ почти не изменится. Пусть мы отбрасываем все звенья кроме первого – тогда сопротивление составит $R_1 = 2$ *Ом*. Далее оставляем два первых звена – получаем последовательно-параллельную двухзвенную схему, сопротивление которой:

$$R_2 = 1 + \frac{1 \cdot 20}{1 + 20} \cong 1.952\,Ом.$$

Для трёх звеньев $R_3 = 1.951$ *Ом*, т.е. то же с точностью до 3-го знака. Можно этим и ограничиться, ну а можно включить ещё несколько звеньев, однако ответ будет меняться всё меньше и меньше по порядку величины.

Другой способ заключается в следующем. Если мы представим цепь с бесконечным числом звеньев, то вся цепь справа от 20-го звена изменит измеряемое сопротивление очень мало, поэтому можно рассчитывать на точность результата. Пусть Искомое сопротивление Z, тогда если мы отбросим первое звено, то сопротивление всей оставшейся бесконечной цепи с хорошей точностью будет $10Z$. После этого рассмотрим цепь, в которой есть первое звено, а вся остальная цепь заменена на сопротивление $10Z$, тогда:

$$Z = 1 + \frac{1 \cdot 10Z}{1 + 10Z},$$

т.е. получаем квадратное уравнение $10Z^2 - 19Z - 1 = 0$.

Отсюда $Z = \left(19 + \sqrt{401}\right)/20 \cong 1.951\,Ом$.

Критерий	Баллы
Метод последовательного приближения	
Составление последовательно-параллельной схемы	10
Расчёт её сопротивления	5
Показано, что при увеличении звеньев ответ почти не меняется	10
Метод бесконечной цепи	
Рассмотрение бесконечной цепи	10
Составление квадратного уравнения	10
Нахождение ответа	5

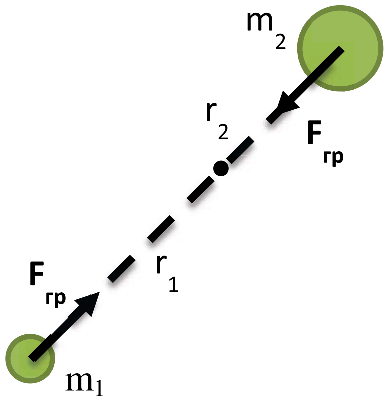
Физика 9 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Неожиданный поворот (30 баллов)

Два космических тела с массами 7 и 10 *m* вращаются вокруг общего центра масс вдали от других тел. В результате катаклизма масса большего тела уменьшилась на 30%. На сколько процентов изменился период обращения?

Решение:



Сделаем два упрощающих решение предположения:

1). Тела до и после катаклизма движутся по круговым орбитам

2). Диаметры орбит остаются неизменными

В системе отсчета, связанной с центром масс, между телами действует сила гравитационного притяжения

$$F_{\text{гр}} = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \qquad (1)$$

которая сообщает им центростремительное ускорение. Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел:

$$m_1\omega^2 r_1 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} \qquad (2)$$

$$m_2\omega^2 r_2 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}, \qquad (3)$$

где ω – угловая скорость вращения тел вокруг центра масс, связанная с периодом обращения соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (4)$$

Складывая (2) и (3), получаем

$$\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^3}. \qquad (5)$$

Подстановка (5) в (4) дает выражение для периода T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^3}{G(m_1+m_2)}}. \qquad (6)$$

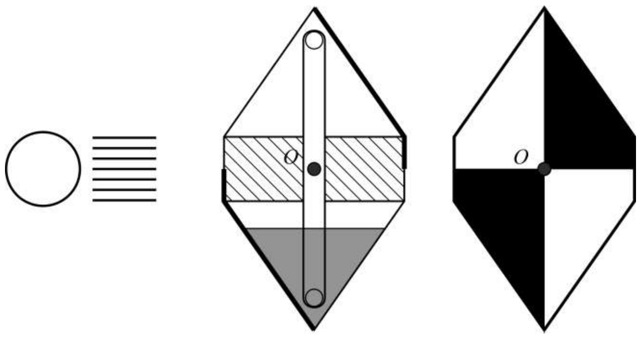
С учетом предположений, выдвинутых в начале, согласно формуле (6), период обращения T зависит только от масс космических тел. Соотношение периодов до и после катастрофы

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1+0{,}7m_2}} = 1{,}1 \qquad (7)$$

Критерий	Баллы
Сделаны упрощающие решение предположения	10
Записан второй закон Ньютона в системе отсчета, связанной с центром масс тел	5
Показано, что период T обратно пропорционален корню из суммы масс тел	10

Задание 2. Имперский крейсер (25 баллов)

Сегодня существует огромное количество игрушек с “вечным двигателем”. Одна из них – “Настольный Имперский звездный крейсер”. Он закреплен на продольном держателе так, что может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через точку *O*, выполняя фигуру высшего пилотажа под названием “бочка”. Внутри крейсер разделен на 3 отсека, как показано на рисунке справа. Средний отсек изолирован от остальных, а верхний и нижний соединены трубкой. В нижний отсек налито “топливо” – немного летучей жидкости (эфира). Раскрашен крейсер в черный и белый цвета, чтобы устрашать врагов и пробуждать ликование в душах союзников. Если игрушку поставить на солнце, крейсер станет выполнять маневры: переворачиваться вверх-вниз без всякой видимой причины. Объясните, почему это происходит. Откуда он берет энергию для своего вращения?



Решение:

Принцип работы “крейсера” основан на принципе теплового насоса. Пока есть перепад температур между верхним и нижним отсеками - крейсер совершает манёвры. При этом температура нижнего отсека всегда должна быть выше температуры верхнего – этим и объясняется специфический окрас “крейсера”. Чёрная боковая поверхность хорошо поглощает тепло, в то время как светлая – отражает. Это вызывает активное испарение “топлива” в нижнем отсеке и конденсацию его в верхнем, что при перетекании большего количества “топлива” в верхний отсек смещает центр тяжести “крейсера”, переводя его в положение неустойчивого равновесия, – и крейсер совершает очередной “манёвр”. Крейсер не зря повёрнут к солнцу боком – верхний солнечный бок всегда светлый, в то время как нижний – всегда тёмный. Манёвры продолжаются пока светит солнце, т.е. существует тепловой поток от солнца в воздух последовательно через нижний и верхний отсеки.

Критерий	**Баллы**
Рассмотрение поглощения и отражения света	10
Рассмотрение испарения и конденсации	10
Нарушение равновесия из-за смещения центра тяжести	5

Задание 3. Самолётобоязнь (20 баллов)

Замечали ли Вы, что если пригнуться в тот момент, когда слышен шум пролетающего самолёта, то тон звука, который вы слышите, изменится? Как он изменится и почему это происходит?

Решение

Суть явления в интерференции волн – взаимодействие “прямой” звуковой волны от самолёта и отраженной от земли приводит к образованию стоячих волн. При этом волны меньшей длины образуют пучности, в которых слышен максимальный тон этой частоты на меньшем расстоянии от земли, чем более длинные низкочастотные волны. Т.е. чем ближе к земле, тем более высокочастотный звук мы слышим как преобладающий. Как следствие при нагибании к земле мы наблюдаем повышение слышимой частоты гула самолёта.

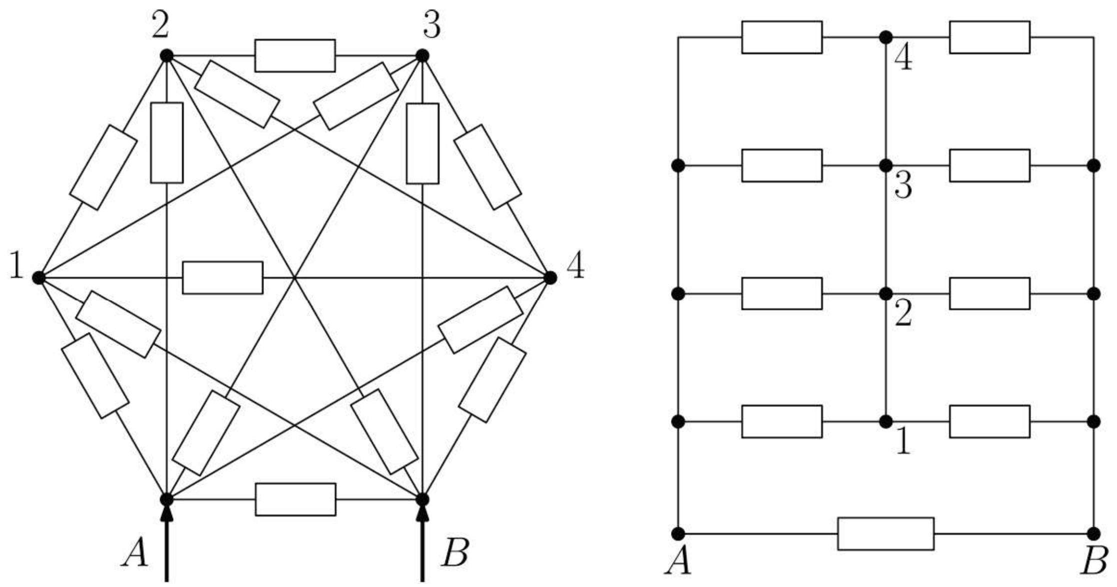
Критерий	**Баллы**
Рассмотрение интерференции звуковых волн	5
Возникновение стоячих волн	10
Зависимость резонирующей частоты от расстояния до земли	10

Задание 4: Резистивная сота (25 баллов)

В доску в вершинах правильного шестиугольника вбиты шесть гвоздей. Все гвозди попарно соединены резисторами с сопротивлением R. Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

Решение

На рисунке представлена схема соединения, сопротивление каждого из резисторов R. Искомое сопротивление — сопротивление между точками A и B. Для решения задачи используем симметрию схемы.



Точки A и B непосредственно подсоединяются к источнику напряжения. Покажем, что потенциал точек 1, 2, 3, 4 одинаковы. Действительно, каждая из остальных вершин присоединена через резистор R к точкам A и B, а также ко всем оставшимся точкам, то есть точки 1–4 находятся в равных условиях относительно A и B. Следовательно, через резисторы, соединяющие точки 1, 2, 3, 4 ток течь не будет. Эквивалентная схема с учётом симметрии соединения приведена на рисунке.

В эквивалентной схеме также возможно удалить соединения точек 1, 2, 3, 4 вследствие равенства их потенциалов. В таком случае имеем параллельное соединение четырёх ветвей сопротивлением $2R$ и одной ветви сопротивлением R. Общее сопротивление этой схемы

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{4}{2R}+\frac{1}{R}} = \frac{R}{3}.$$

Ответ: сопротивление между двумя соседними гвоздями равно R/3.

Критерий	Баллы
Составлена схема соединения	5
Рассмотрена симметрии соединения	10
Составлена эквивалентная схема	5
Найдено общее сопротивление схемы	5