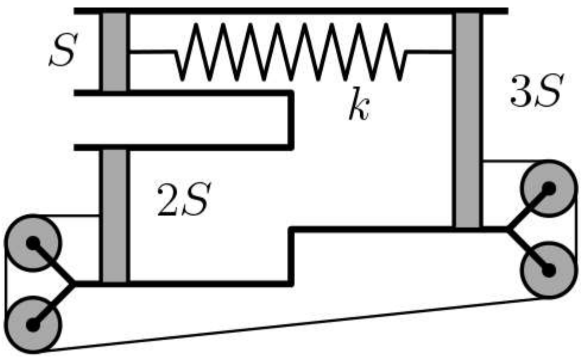
Многопрофильная олимпиада школьников Уральского федерального университета «Изумруд»
2016-2017 учебный год

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ

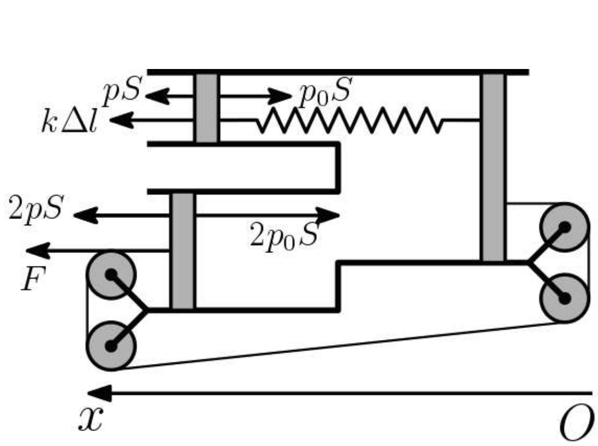
Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

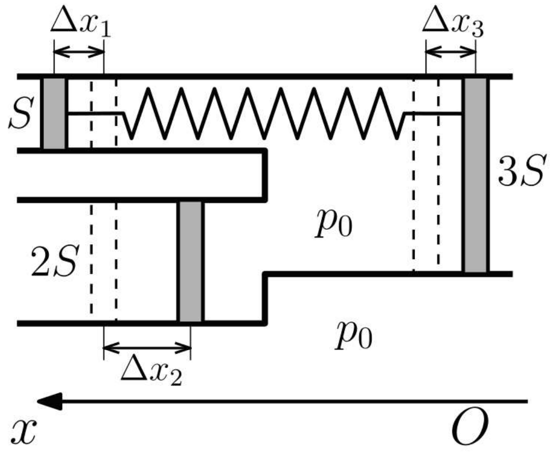
Задание 1: Тепловая машина (30 баллов)



На рисунке изображена система, состоящая из трубы сложной формы, выходы из которой закупорены тремя поршнями с площадями 3*S*, 2*S* и *S*. Внутри трубы находятся *ν* молей идеального газа. Правый поршень соединен с верхним левым пружиной с жесткостью *k*, а с нижним – тонкой нерастяжимой нитью через систему блоков, как показано на рисунке. Снаружи системы находится воздух при нормальных условиях, давление p_0, температура T_0. В начальный момент времени система находится в равновесии, нить имеет натяжение *F*. Насколько сдвинется каждый из поршней, если перерезать нить? Считать, что прошло достаточно времени, чтобы система пришла в равновесие. Температура газа постоянна и равна T_0, массами газа, пружины и нити пренебречь.

Решение:





Рассмотрим начальное состояние системы до перерезания нити. Введем ось *Ox*, как показано на рисунке, все величины будем проектировать на эту ось. Найдем, под каким давлением *P* находится газ в трубе и какова деформация пружины Δl. Для этого запишем второй закон Ньютона для поршней *S* и *2S* (все силы, действующие на них, указаны на рисунке). Очевидно, что пружина в исходном состоянии сжата, ибо атмосферное давление больше, чем давление внутри трубы:

$$k\Delta l + pS - p_0 S = 0,\ F + 2pS - 2p_0 S = 0$$

Из этой системы уравнений сразу находим, что: $p = -p_0 + F/2S$, $\Delta l = -F/2k$.

Пусть теперь нить перерезали. Искомые смещения поршней *S, 2S* и *3S* обозначим через Δx_1, Δx_2 и Δx_3 соответственно. В задаче три неизвестных, следовательно, нужно выписать три уравнения.

Первое уравнение дает пружинка. Заметим, что в конечном состоянии давление газа в трубе сравнивается с атмосферным. После того как все установится, на поршень 2*S* будут действовать только атмосфера и газ в трубе, а значит, их давления совпадают. Используя этот факт, можно сделать вывод, что в конечном состоянии пружина уже не деформирована. Для этого достаточно посмотреть на поршень *S*. Силы давлений атмосферы и газа на него скомпенсированы, а значит сила Гука обращается в ноль и пружина не сжата. Таким образом, расстояние между поршнями *S* и *3S* увеличилось на Δl. Это и дает первое уравнение: $-\Delta x_1 + \Delta x_3 = \Delta l$.

Второе уравнение вытекает из закона сохранения импульса. На систему не действует никаких внешних сил, а значит, центр масс системы не сдвигается. Массой газа можно пренебречь по сравнению с массой поршней, поэтому его перемещение не изменяет центр масс системы. В итоге для смещения поршней получаем уравнение: $\Delta x_1 m + \Delta x_2 m + \Delta x_3 m = 0$, где *m* – масса поршня (все поршни имеют одинаковую массу). В итоге получаем уравнение: $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 0$.

Последнее уравнение дается термодинамикой. Система поддерживается при постоянной температуре T_0, значит процесс изотермический. Газ в трубе идеальный, следовательно, для него выполняется уравнение Клапейрона-Менделеева. Найдем начальный объем газа V_0. До перерезания нити его давление было *p*, по уравнению состояния идеального газа имеем: $pV_0=\nu RT_0$. Откуда получаем, что$V_0=\nu RT_0/p$. При изотермическом процессе произведение объема идеального газа на его давление остается постоянным. Пусть ΔV – изменение объема газа.

Вспоминая, что в конечном состоянии давление газа совпадает с атмосферным, имеем

$$pV_0=p(V_0+\Delta V)=\nu RT_0.$$

Осталось связать изменение объема газа ΔV со смещениями поршней. Ясно, что смещение левых поршней налево приводит к увеличению объема, а смещение правого поршня влево приводит к его уменьшению (при нашем выборе оси), следовательно, $\Delta V = S(\Delta x_1+2\Delta x_2-3\Delta x_3)$. В итоге имеем следующее уравнение:

$$\frac{\nu RT_0}{p_0} = \frac{\nu RT_0}{p_0} + S(\Delta x_1 + 2\Delta x_2 - 3\Delta x_3).$$

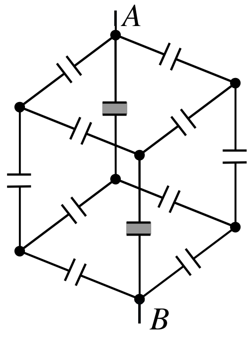
Для получения ответа необходимо решить систему из трех уравнений. В итоге имеем:

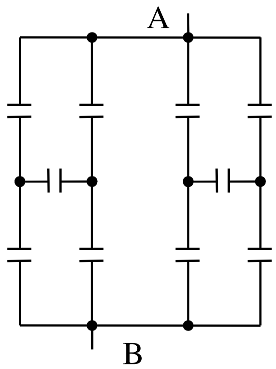
$$\Delta x_1 = -\frac{5F}{12k} - D,\ \Delta x_2 = -\frac{F}{3k} + 2D,\ \Delta x_3 = \frac{F}{12k} - D,\text{ где } D = \frac{\nu RT_0 F}{6p_0 S(2p_0 S - F)}.$$

Критерий	**Баллы**
Вывод о том, что после перерезания нити давление внутри будет равно атмосферному	5
Составление уравнения для смещений поршней с использованием деформации пружины	5
Составление уравнения для смещений поршней через смещение центра масс	5
Составления уравнения для смещения поршней через уравнения для изотермического процесса	5
Получение итогового ответа	10

Задание 2: Конденсатор в кубе (20 баллов)

В процессе производства нового устройства из одинаковых конденсаторов два конденсатора “пробило”, т.е. в диэлектрике появился проводящий мостик. Определите общую ёмкость между точками *A* и *B* новой цепи с пробитыми конденсаторами. Ёмкость одного элемента считать равной *C*. “Прибитые” диэлектрики обозначены серым цветом.





Решение:

Для решения данной задачи нарисуем эквивалентную схему.

Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг-другу, горизонтально расположенные конденсаторы не будут заряжаться, а поэтому их вклад в суммарную емкость отсутствует. В результате ответом является суммарная емкость четырёх параллельных ветвей конденсаторов по два последовательно расположенных конденсатора в каждой. Емкость каждой ветки:

$$C_B = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}.$$

Суммарная емкость:

$$C_{AB} = 4C_B = \frac{4C}{2} = 2C.$$

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / нарисована эквивалентная схема	10
Сделан вывод о том, что средние конденсаторы не дают вклада в суммарную емкость	5
Получен ответ	5

Задание 3: Горячий светодиод (20 баллов)

В большинстве современных светодиодов в целях экономии используется кристалл синего спектра свечения, на который сверху для получения нужного “цвета светодиода” (белого, красного, жёлтого и т.п.) наносится специальный люминофор. Пусть такой кристалл излучает в секунду 1x10^{18} фотонов с длиной волны 435 нм. При этом люминофор, нанесённый сверху, испускает по 5x10^{17} фотонов/сек с длинами волн 600 и 555 нм, создавая “оранжевое” свечение. Найти максимальную мощность теплоотвода, требуемого для охлаждения данного типа люминофора и его К.П.Д. Считать, что люминофор обеспечивает полное поглощение первичного излучения.

Решение:

Согласно формуле Планка энергия одного кванта света

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тогда за секунду кристалл излучает энергию (мощность поглощения люминофора)

$$P_{Bx} = P_C = N_C \frac{hc}{\lambda_C} = 10^{18} \cdot \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 8 \cdot 10^8}{4.35 \cdot 10^{-7}} \cong 0.41 \tfrac{Дж}{c} = 0.41 Вт.$$

На выходе люминовора

$$P_{Вых} = hc\left(\frac{N_K}{\lambda_K} + \frac{N_З}{\lambda_З}\right) = 6.6 \cdot 10^{-34} \cdot 8 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{17}\left(\frac{1}{6 \cdot 10^{-7}} + \frac{1}{5.55 \cdot 10^{-7}}\right) \cong 0.31 Вт.$$

Тогда при условии, что вся тепловая мощность P_{Bx} поглощается, и при этом излучается мощность $P_{Вых}$, получаем, что максимальные потери энергии на нагрев:

$$Q = P_{Bx} - P_{Вых} \cong 0.1 Вт.$$

КПД очевидно:

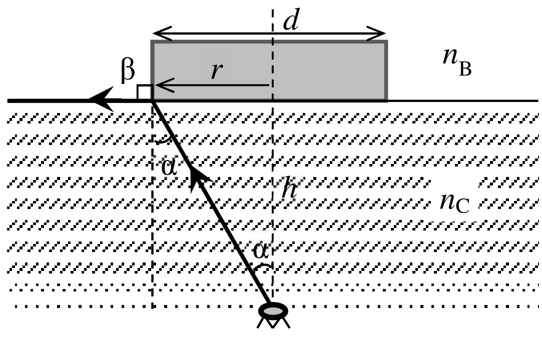
$$\eta = \frac{P_{Вых}}{P_{Bx}} \cong 0.754 \text{ или } 75\%.$$

Критерий	**Баллы**
Определение энергии кванта света	**5**
Формула для Q	**5**
Формула для КПД	**5**
Получен численный ответ	**5**

Задание 4: Невидимый жучок (30 баллов)

На дне прозрачного пруда лежит толстый лист стекла, толщиной h (показатели преломления $n_В$ и $n_С$ соответственно). На листе лежит монета диаметром d. Сможет ли жучок заползти под стекло так, чтобы его не было видно ни одной рыбе, плавающей в пруду? Куда ему необходимо двигаться, чтобы «уменьшить» свою видимость? Жучка считать очень маленьким и свободно ползающим под стеклом.

Решение



Задача на закон полного внутреннего отражения. Полезно знать, что для выполнения условия полного внутреннего отражения (и как следствие создания возможности жучку остаться незамеченным) должно выполняться условие $n_В < n_С$.

Единственный вариант остаться незамеченным – это двигаться под центр монеты. В этом случае лучи, исходящие от жучка, будут выходить из под края монеты, только если угол их падения α на границу раздела стекло-вода будет меньше предельного, показанного на рисунке. Если

$$\alpha = \alpha_{пр}, \text{ то } \beta = 90°. \quad (1)$$

Запишем закон преломления для границы раздела стекло-вода:

$$\sin\alpha \cdot n_C = \sin\beta \cdot n_B,$$

Тогда для всех лучей, которые не смогут выйти из под стекла в месте за границей монеты:

$$\sin\alpha > \frac{n_B}{n_C},$$

С другой стороны

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}},$$

Тогда получаем неравенство:

$$\frac{r^2}{r^2+h^2} > \left(\frac{n_B}{n_C}\right)^2,$$

или

$$\frac{2h}{d} < \sqrt{\left(\frac{n_C}{n_B}\right)^2 - 1}.$$

Если показатели преломления стекла и воды будут равны, то ни при каких условиях полная невидимость жучка невозможна. Т.к. нас интересуют вещественные значения r и h, то должно выполняться условие $n_В < n_С$, что при реальных значениях $n_В$ = 1.33(3) и $n_С$ = 1.5 выполняется. В остальном видно, что стекло не должно быть толще, чем определённое значение, зависящее от диаметра монеты, т.е. чем больше монета, тем толще может быть стекло.

Критерий	**Баллы**
Определение места возможной «невидимости»	5
Закон преломления на границе стекло-вода и предельный угол (1)	5
Условие для невыхода лучей из под стекла (неравенство)	5
Условие на соотношение показателей преломления	5
Соотношение между h и d	10

Физика 11 класс

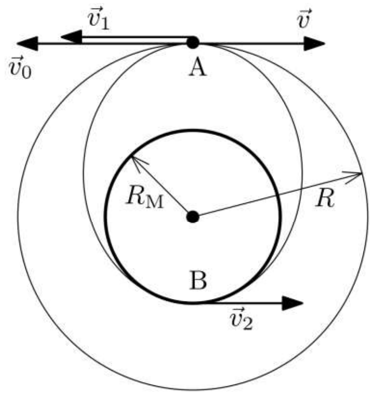
Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1: Марсоход (25 баллов)

Исследовательская станция вышла на круговую орбиту Марса радиусом *R*. С какой скоростью нужно выбросить спускаемый модуль с марсоходом по касательной к траектории станции, чтобы он совершил посадку с противоположной стороны планеты от текущего положения станции, затратив на это минимальное время? Определите это время. Радиус Марса R_M, ускорение свободного падения 0,378 g. Условием посадки на поверхность считать только касание зондом поверхности Марса, скорость относительно поверхности планеты в точке касания погасится за счет трения.

Решение

Спускаемый модуль, выброшенный со станции, должен двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Марса. Большая ось этой орбиты равна $R+R_M$, где R и R_M радиус орбиты станции и радиус Марса соответственно.



Потенциальная энергия в точках A и B (афелии и перигелии этой орбиты соответственно) может быть записана следующим образом:

$$W_A = -G\frac{M_M m}{R}, \; W_B = -G\frac{M_M m}{R_M},$$

где M_M и m массы Марса и спускаемого модуля соответственно.

Закон сохранения энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{mv_A^{\,2}}{2} - G\frac{M_M m}{R} = \frac{mv_B^{\,2}}{2} - G\frac{M_M m}{R_M},$$

где v_A и v_B скорости в точках A и B соответственно. Учитывая, что $G\frac{M_M}{R_M^2} = g_M$, получаем:

$$\frac{v_A^2}{2} - g_M\frac{R_M^2}{R} = \frac{v_A^2}{2} - g_M R_M.$$

В то же время, согласно второму закону Кеплера радиус вектор заметает равные площади за одинаковые промежутки времени:

$$\frac{v_A\cdot\Delta t\cdot R}{2} = \frac{v_B\cdot\Delta t\cdot R_M}{2} \text{ или } v_A R = v_B R_M.$$

Отсюда находим

$$v_A = R_M\sqrt{\frac{2g_M R_M}{R(R_M+R)}}.$$

Теперь найдем v_0 – скорость станции на круговой орбите:

$$G\frac{M_M m_C}{R^2} = \frac{m_c v_0^{\,2}}{R}, \; v_0 = \sqrt{\frac{GM_M}{R}} = \sqrt{\frac{g_M R_M}{2}}.$$

Итого, спускаемый модуль нужно выбросить назад со скоростью

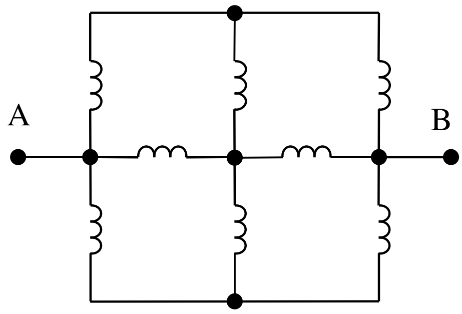
$$v = v_0 - v_A = \sqrt{\frac{g_M R_M}{2}} - R_M\sqrt{\frac{2g_M R_M}{R(R_M+R)}}.$$

Время спуска оценим из третьего закона Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Обозначим период обращения тела по круговой орбите как T_0, искомый период как T, тогда:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0}, \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R+R_M}{2R_M}\right)^3, \; T = \frac{2\pi R}{v_0}\left(\frac{R+R_M}{2R_M}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Соответственно, искомое время составляет $T/2$.

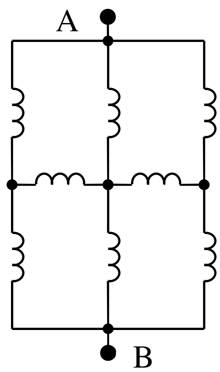
Критерий	Баллы
Получено соотношение между скоростями станции и спускаемого модуля	10
Определена скорость станции на орбите	10
Найдено время падения спутника	10



Задание 2: Всюду поле (20 баллов)

Определить общую индуктивность L_{AB} электрической цепи из одинаковых катушек, изображённой на рисунке. Индуктивность одного элемента считать равной L.

Решение:



Для решения данной задачи нарисуем эквивалентную схему. Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг другу, то индуктивности, соединяющие эти точки, не будут участвовать в протекании тока, а поэтому их вклад в суммарную индуктивность отсутствует. В результате ответом является суммарная индуктивность трёх параллельных ветвей индуктивностей по два последовательно расположенных индуктивности в каждой.

Индуктивность каждой ветки: L=L+L=2L.

Суммарная индуктивность: $\frac{1}{L_{AB}} = 3 \cdot \frac{1}{2L}$ и соответственно $L_{AB} = \frac{2L}{3}$.

Критерий	Баллы
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / составлена эквивалентная схема	**10**
Сделан вывод о том, что средние индуктивности не вносят вклад в суммарную величину	**5**
Получен численный ответ	**5**

Задание 3: Волшебный камень (20 баллов)

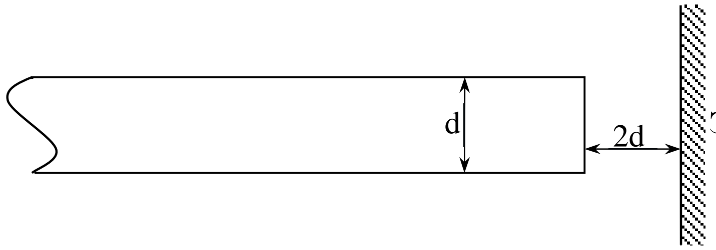
Согласно легендам у викингов был волшебный “солнечный камень”, который помогал найти солнце в облачную погоду, либо даже когда его не было на горизонте, что актуально в северных широтах. Как известно на севере солнце может даже в полдень не показаться над горизонтом.

Сегодня известны природные минералы, которые меняют свой цвет на основе явления дихроизма: в при повороте плоскости поляризации падающего света на 90° они могут менять свой оттенок, например, со слегка желтоватого на тёмно-синий. Можно ли (и если да, то как) использовать такой камень для “нахождения” солнца?

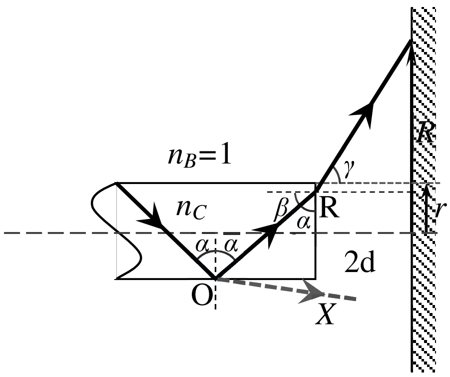
Решение:
Поляризация солнечного света обусловлена теми же явлениями, что и синий цвет неба (неполяризованный падающий свет возбуждает атомы газов в воздухе).
При этом свет с вертикальной поляризацией максимально излучается в горизонтальном направлении, в то время как свет с горизонтальной – распространяется в вертикальном. Когда солнце находится за горизонтом, например, на западе – мы “видим” горизонтальную поляризацию в плоскости, расположенной на линии север-юг. Следовательно, “проградуировав” камень, мы можем по цвету проходящего сквозь него света определять положение солнца даже в облачную погоду, направляя его на ясный участок неба.

Критерий	**Баллы**
Рассмотрение поляризации “отраженного” света	5
Определение верных связей плоскостей поляризации с положением солнца	10
Предположение об использовании камня	10

Задание 4: Волноводный зайчик (30 баллов)
Рассчитайте максимально возможный размер яркого светового пятна на экране, расположенном на расстоянии 2*d* от цилиндрического длинного неизолированного стеклянного световода диаметром *d*. Показатель преломления стекла n_C.



Решение
Главным предположением возможности распространения света по волноводу должно стать наличие полного внутреннего отражения для луча света, способного двигаться «вдоль» волновода постоянно переотражаясь от его стенок. Для этого угол падения света на стенку α должен быть больше предельного.
При рассмотрении всех возможных лучей, падающих на торцевую стенку волновода перед выходом из него, убеждаемся в том, что максимальный радиус пятна даст луч, падающий на торцевую границу в самой близи от боковой границы и при этом ранее переотражённый от противоположной боковой границы. Например, такой, как показан на рисунке. Любые лучи, которые могли бы выйти не через торец, а через боковую стенку не рассматриваем, т.к. они по волноводу не распространяются, а покидают его (например, направление X). При этом помним, что т.к. $n_C > n_B$, то угол преломления будет больше угла падения γ > β, что в том числе и даёт максимальный размер пятна.



Запишем закон полного внутреннего отражения для т. O:

$$\sin\alpha > \frac{1}{n_C}, \text{ т.к. } n_B=1.$$

Другое условие является требованием того, чтобы лучи всё же при этом смогли выйти из торца волновода, преломившись в точке R:

$$\sin\beta \cdot n_C < \sin\gamma,$$

Отсюда, учитывая что $\beta = 90° - \alpha$ и $\gamma \le 90°$ получаем второе условие на углы:

$$\cos\alpha \cdot n_C < 1.$$

В результате:

$$\frac{1}{\sin\alpha} < n_C < \frac{1}{\cos\alpha},$$

Что даёт нам минимально возможный угол, при котором возможен выход света из волновода $\alpha > 45°$. Возводя все части неравенства в квадрат и проделав необходимые преобразования, получаем, что:

$$\frac{1}{n_C^2} < 1 - \sin^2\alpha, \text{ или } \frac{1}{n_C^2} < 1 - \frac{\sin^2\gamma}{n_C^2}.$$

Отсюда

$$\sin^2\gamma < n_C^2 - 1,$$

что даёт для предельного (максимального) угла γ_{max}:

$$\sin^2\gamma_{max} = n_C^2 - 1.$$

С другой стороны из треугольника, образованного точкой R, лучом и экраном:

$$\tan\gamma = \frac{R-r}{2d},$$

или

$$(R-r)^2 = 4d^2\tan^2\gamma = 4d^2\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}.$$

Тогда для предельного угла γ_{max} получаем:

$$(R_{max} - r)^2 = 4d^2\frac{n_C^2-1}{2-n_C^2},$$

или

$$R_{max} = d\left(2\sqrt{\frac{n_C^2-1}{2-n_C^2}} + \frac{1}{2}\right).$$

Видим, что для получения действительных значений R_{max} показатель преломления волновода не должен быть меньше чем $\sqrt{2}$: $n_C \geq \sqrt{2}$, что для стекла с $n_C = 1.5$ выполняется. При $n_C = \sqrt{2}$, $R_{max} \to \infty$, $\gamma_{max} \to 90°$ что для реального стекла невозможно, следовательно, максимальный радиус пятна конечен.

Критерий	**Баллы**
Определение наличия эффекта полного внутреннего отражения	5
Закон преломления на торцевой границе световода	5
Определение луча, дающего пятно наибольшего радиуса	5
Условие на показатель преломления стекла	5
Определение R_{max}	10

Многопрофильная олимпиада школьников Уральского федерального университета «Изумруд»
2016-2017 учебный год

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ

8 класс

Вариант 1	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	25	25	20	100
Вариант 2	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	30	20	20	100

9 класс

Вариант 1	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	20	30	25	25	100
Вариант 2	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	25	20	25	100

10 класс

Вариант 1	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	25	25	20	30	100
Вариант 2	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	20	20	30	100

11 класс

Вариант 1	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	20	20	30	100
Вариант 2	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Всего
Максимум баллов	30	20	20	30	100

Многопрофильная олимпиада школьников Уральского федерального университета «Изумруд»
2016-2017 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЕРОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ

Класс	**Победители**	**Призеры**	
	Дипломанты 1 степени	**Дипломанты 2 степени**	**Дипломанты 3 степени**
	Критерии определения	**Критерии определения**	**Критерии определения**
8	Не присуждать	Не присуждать	Не присуждать
9	От 55 баллов и выше	Не присуждать	От 35 до 45 баллов
10	Не присуждать	От 46 до 54 баллов	Не присуждать
11	От 55 баллов и выше	От 46 до 54 баллов	От 35 до 45 баллов