Многопрофильная олимпиада школьников Уральского федерального университета «Изумруд»
2016-2017 учебный год

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА ПО ФИЗИКЕ

Физика 10 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Невидимые звёзды (25 баллов)

Известный британский астроном конца 18 века, проводивший также исследования в области оптики и гравитации, сделал предположение, что во Вселенной может существовать множество звёзд, с размерами в сотни раз превышающими размеры Солнца, которые, тем не менее, не могут быть увидены с больших расстояний. Считая плотность таких звёзд равной средней плотности Солнца, оцените минимальный радиус такой звезды.

Решение

Оценим радиус такой звезды, считая её плотность равной средней плотности вещества Солнца (во времена Мичелла плотности всех звёзд считались равной плотности Солнца). Воспользуемся известной формулой второй космической скорости

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

где *G* – гравитационная постоянная, *M* – масса и *R* – радиус звезды, и приравняем эту скорость скорости света $v_2 = c$. Тогда минимальный радиус такой звезды

$$R = \frac{2GM}{c^2}.$$

Поскольку плотность звезды равна солнечной плотности, отношение массы звезды к массе Солнца будет равно отношению их объёмов

$$\frac{M}{M_S} = \frac{V}{V_S} = \frac{R^3}{{R_S}^3},$$

Где M_S V_S, R_S – масса, объём и радиус Солнца; отсюда

$$M = \frac{M_S R^3}{{R_S}^3}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу для радиуса звезды, можно выразить отношение радиуса звезды к радиусу Солнца:

$$\frac{R}{R_S} = \sqrt{\frac{c^2 R_S}{2GM_S}} = 485.$$

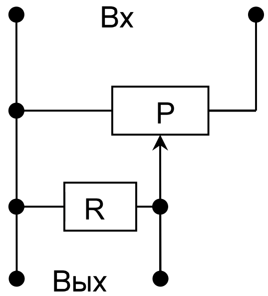
Т.е. минимальный радиус такой звезды составляет 485 радиусов Солнца.

Упомянутый астроном – Джон Мичелл (1724-1793) – известен сейчас как один из первых учёных, предложивших возможность существования чёрных дыр. В 1784 году в журнале Лондонского Королевского общества появилась его статья, в которой высказывалась гипотеза, что свет звезды, чей радиус в 500 раз превышает радиус Солнца, не сможет удалиться от такой звезды на бесконечно большое расстояние, вследствие того, что вторая космическая скорость такого объекта больше скорости света.

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о решающей роли силы гравитации для критерия видимости звезды	10
Записано уравнение для определения радиуса	10
Получен численный ответ	5

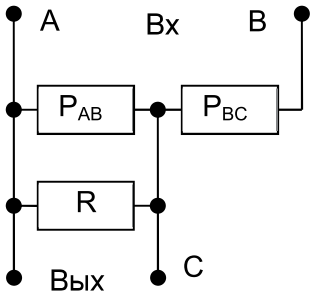
Задание 2. Регулятор громкости (25 баллов)

Найти относительный уровень выходного сигнала *y* (в долях от входного) для схемы с потенциометром от положения его движка x, где $0 \le x \le 1$. Какие значения *R* и *P* необходимо выбрать для получения зависимости наиболее близкой к экспоненциальной $y \sim e^x$? Подобные схемы часто используются для “естественного” регулирования уровня звука. Для простоты удобно принять $R_{\text{Вых}}(x=0) = 0$ *Ом*.



Решение:

Представим схему как смешанное соединение резисторов (см. рис.).



Тогда с учётом, что $R_{Вых}\big|_{x=0} = 0$ и при этом R>0 получаем, что $P_{AB}\big|_{x=0} = 0$. Тогда:

$$R_{AB} = \frac{R \cdot P_{AB}}{R + P_{AB}},\ R_{BC} = P_{BC} = P_{AC} \cdot (1-x),$$

$$P_{AB} = P_{AC} \cdot x \Rightarrow x = \frac{P_{AB}}{P_{AC}}.$$

Пусть $y = \dfrac{U_{Вых}}{U_{Вх}} = \dfrac{R_{AC} \cdot I}{R_{AB} \cdot I} = \dfrac{R_{AC}}{R_{AB}}$, тогда:

$$y = \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_{BC}}{R_{AB}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{P_{BC} \cdot (R + P_{AB})}{R \cdot P_{AB}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{(1-x) \cdot (R + P_{AC} \cdot x)}{R \cdot x}} = \frac{R \cdot x}{R \cdot x + (1-x) \cdot (R + P_{AC} \cdot x)},$$

$$y = \frac{R \cdot x}{R + P_{AC} \cdot x - P_{AC} \cdot x^2} = \frac{x}{1 + \dfrac{P_{AC}}{R} x(1-x)}$$

Если $P_{AC} << R$ то функция линейная:

$$y \cong x$$

Если $P_{AC} >> R$, то функция имеет вид обратной гиперболы, что несколько ближе к $y \sim e^x$:

$$y \cong \frac{1}{\dfrac{P_{AC}}{R}(1-x)} = \frac{R}{P_{AC}} \frac{1}{(1-x)}.$$

Критерий	**Баллы**
Нарисована эквивалентная схема	10
Записаны уравнения для участков цепи до и после точки входа переменного резистора	5
Получен ответ для функции y(x)	5
Проведен анализ функции и получен ответ	5

Задание 3. Посадочные манёвры (20 баллов)
Орбитальная станция Ares-3 со спускаемым модулем подлетает к Марсу по параболической траектории. В момент выхода на круговую орбиту происходит запуск тормозного двигателя, работающего непродолжительное время, после чего завершается выход на орбиту радиуса R_0. Высота орбиты над поверхностью планеты совпадает с высотой точки наибольшего сближения первоначальной траектории. Определить насколько изменилась скорость корабля во время этого манёвра. Масса Марса M_M.

Решение:
Параболическая траектория подразумевает возможность удаления на бесконечно большое расстояние, где полная механическая энергия корабля может быть принята за ноль, тогда в точке максимального сближения закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{M_M m}{R_0} = 0, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{2G\frac{M_M}{R_0}}.$$

Рассмотрим $g_R = G\frac{M_M}{R_0^2}$ -- ускорение свободного падения на орбите радиуса R, тогда $v_0 = \sqrt{2g_R R_0}$.

Найдем v_1 -- первую космическую скорость движения по круговой орбите радиуса R. Она будет характеризоваться центростремительным ускорением $a_n = \frac{v^2}{R_0}$, которое сообщается силой тяготения $F = mg_R$. Следовательно, второй закон Ньютона в проекции на радиус будет записан так: $\frac{mv_1^2}{R_0} = mg_R$.

Следовательно конечная скорость должна составить $v_1 = \sqrt{g_R R_0}$, а изменение скорости $\Delta v = \sqrt{g_R R_0} \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

Критерий	Баллы
Правильная запись закона сохранения энергии	10
Найдена первая космическая скорость на орбите планеты	10

Задание 4. Дырявый метеозонд (30 баллов)
Метеозонд наполняют смесью гелия и воздуха в равных молярных пропорциях. Однако в нем оказывается небольшое отверстие, через которое содержимое устремляется наружу. Найдите молекулярный состав пучка, покидающего шарик в начальный момент времени. Считать, что средние энергии молекул зависят только от температуры и воздух состоит из 25% кислорода и 75% азота.

Решение.
Заметим, что количества молекул $\upsilon_{He} : \upsilon_{N_2} : \upsilon_{O_2}$ соотносится как $4:3:1$.

В силу того что, средние энергии зависят только от температуры, мы имеем равенство кинетических энергий

$$\frac{mv_{He}^2}{2} = \frac{mv_{N_2}^2}{2} = \frac{mv_{O_2}^2}{2},$$

откуда получаем, как соотносятся между собой скорости:
$v_{He} : v_{N_2} : v_{O_2}$ как $2.83 : 1.07 : 1$, заметим, что полученное соотношение не зависит от температуры, т.к. газы находятся в тепловом равновесии.

Далее нам необходимо рассмотреть пучок молекул, покидающих метеозонд. Молекулы, которые его покидают, должны иметь скорость, направленную в отверстие (для простоты рассуждений отверстие будем считать точечным).

Рассмотрим любое из направлений скорости. Обозначим полное количество молекул с таким направлением скорости, покинувших метеозонд за достаточно малый, чтобы не учитывать соударения, промежуток времени Δt как N. Заметим, что $N = N_{He} + N_{N_2} + N_{O_2}$, где $N_{He} = \frac{\upsilon_{He}}{V} \cdot v_{He} \cdot \Delta t$ (аналогично для N_2 и O_2), где *V* – объем метеозонда.

Отсюда получим соотношение между количествами частиц, имеющих выбранное направление скорости $N_{He} : N_{N_2} : N_{O_2}$ как $(\upsilon_{He} \cdot v_{He}) : (\upsilon_{N_2} \cdot v_{N_2}) : (\upsilon_{O_2} \cdot v_{O_2})$, в числах $11.32 : 3.21 : 1$ (заметим, что промежуток времени Δt, введенный ранее, в ответ не входит).

В силу хаотичности движения молекул в газе, все направления скорости равновероятны, а следовательно равнозаполнены частицами, поэтому полученное соотношение распространяется и на другие направления скорости. Распространение же на случай неточечного отверстия еще более тривиально: любое отверстие конечных размеров может быть рассмотрено как совокупность точечных, поскольку для каждого точечного отверстия искомое соотношение установлено, то оно же сохранится и для отверстия конечного размера.

Итоговый ответ: $11.32 : 3.21 : 1$.

Критерий	**Баллы**
Найдено соотношение между скоростями	10
Найдено соотношение между количествами частиц, имеющих одну и ту же скорость	10
Полученный ответ обоснованно распространен на все возможные направления скорости	10

Физика 10 класс

Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Орбитальный зонд (30 баллов)

Космический корабль подходит к неисследованной планете по параболической траектории. В момент максимального сближения кратковременно включается тормозной двигатель, и корабль выходит на круговую орбиту, высота которой над поверхностью планеты совпадает с высотой точки наибольшего сближения первоначальной траектории. Определить какую часть массы корабля должно составлять топливо, если известно, что масса планеты *M,* масса корабля *m*, радиус орбиты *R*.

Решение:

Параболическая траектория подразумевает возможность удаления на бесконечно большое расстояние, где полная механическая энергия корабля может быть принята за ноль, тогда в точке максимального сближения закон сохранения энергии может быть записан следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}.$$

Рассмотрим $g_R = G\frac{M}{R^2}$ -- ускорение свободного падения на орбите радиуса R, тогда $v_0 = \sqrt{2g_R R}$.

Найдем v_1 -- первую космическую скорость движения по круговой орбите радиуса R. Она будет характеризоваться центростремительным ускорением $a_n = \frac{v^2}{R}$, которое сообщается силой тяготения $F = mg_R$. Следовательно, второй закон Ньютона в проекции на радиус будет записан так: $\frac{mv_1^2}{R} = mg_R$.

Следовательно, конечная скорость должна составить $v_1 = \sqrt{g_R R}$, а изменение скорости

$$\Delta v = \sqrt{g_R R} \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

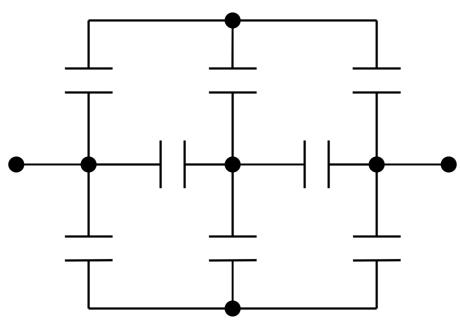
Оценим изменение массы корабля из закона сохранения импульса

$$(m - \Delta m)\Delta v = \Delta m v_0, \; \Delta m = \frac{\Delta v}{v_0 + \Delta v} m.$$

Критерий	**Баллы**
Закон сохранения энергии	10
Выражение для первой космической скорости на орбите планеты	10
Выражение для изменения массы	10

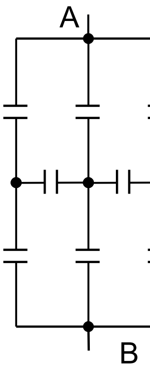
Задание 2. Емкостный коллапс (20 баллов)

Определить общую ёмкость электрической цепи из одинаковых конденсаторов, изображённой на рисунке. Ёмкость одного элемента считать равной *C*.



Решение

Стоит учесть, что поскольку потенциалы между средними точками равны друг-другу, конденсаторы не будут заряжаться, а поэтому их вклад в суммарную емкость отсутствует. В результате ответом является суммарная емкость трёх параллельных ветвей конденсаторов по два последовательно расположенных конденсатора в каждой.



Емкость каждой ветки:

$$C_B = \frac{C^2}{2C} = \frac{C}{2}.$$

Суммарная емкость:

$$C_{AB} = 3C_B = \frac{3C}{2}.$$

Критерий	**Баллы**
Сделан вывод о том, что потенциалы в средних точках равны / нарисована эквивалентная схема	10
Сделан вывод о том, что средние конденсаторы не вносят вклад в суммарную емкость	5
Получена суммарная емкость	5

Задание 3. “Колыбель Ньютона” (20 баллов)

Настольная антистресс-инсталляция, известная как “Колыбель Ньютона” часто встречается в кабинетах физики. Ее используют для демонстрации законов сохранения энергии и импульса. Однако в реальных физических системах потерь энергии избежать нельзя, и колебания рано или поздно затухают. Известно, что, если крайний шарик отклонить от положения равновесия на угол α, то шарик с противоположного конца колыбели поднимется на угол β. На какой угол отклонится первый шар после *n*-го цикла соударений, если считать, что при каждом соударении в тепло переходит одна и та же доля потенциальной энергии деформации?

Решение

Закон сохранения энергии для крайних верхних положений двух последовательных актов соударений будет выглядеть следующим образом: $mgh_1 = mgh_2 - Q_1$, где h_1 и h_2 две высоты подъема шарика, а Q_1 -- тепло, которое выделяется в результате неупругого соударения.

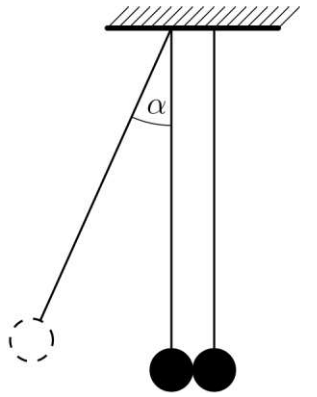
Нам известно, что в каждом цикле соударений $Q_i = \eta mgh_i$, а

$$\eta = \frac{mgh_i - mgh_{i+1}}{mgh_1} = \frac{h_i - h_{i+1}}{h_i},$$

сохранятся от цикла к циклу, то есть

$$\eta = \frac{h_1 - h_2}{h_1}.$$

Отсюда мы можем найти максимальную потенциальную энергию после i-го соударения: $mgh_{i+1} = (1-\eta)^i mgh_1$, соответственно высота подъема составит



$$h_{i+1} = (1-\eta)^i h_1 = \left(1 - \frac{h_1 - h_2}{h_1}\right)^i h_1 .$$

Заметим, что в тексте задачи задан вопрос про высоту подъема 1го шарика после n-го цикла соударений, значит, в дальнейших выкладках необходимо принять $i = 2n$.

Теперь выразим высоты подъема через соответствующие углы. Обозначим длину подвеса как L, тогда $h_1 = (1-\cos\alpha)L$, $h_2 = (1-\cos\beta)L$ и $h_i = (1-\cos\gamma)L$, подставим в полученное ранее соотношение:

$$(1-\cos\gamma)L = \left(1 - \frac{(1-\cos\alpha)L - (1-\cos\gamma)L}{(1-\cos\alpha)L}\right)^{2n} (1-\cos\alpha)L .$$

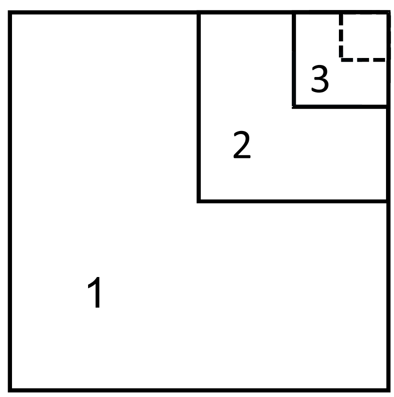
После преобразований:

$$\cos\gamma = 1 - \left(1 - \frac{(1-\cos\alpha) - (1-\cos\gamma)}{(1-\cos\alpha)}\right)^{2n} (1-\cos\alpha) .$$

Критерий	**Баллы**
Запись закона сохранения энергии	5
Выражение для η	5
Выражение для h_i	5
учтено количество соударений и записан ответ	5

Задание 4. Новый русский процессор (30 баллов)

В НИИ им. Скулкова разработали новый микропроцессор. Он представляет квадратный чип со стороной 2 *см*, который разделен на 13 рабочих секторов по следующему правилу: каждый новый сектор представляет собой квадрат со вдвое меньшей стороной, отделенный от предыдущего разметкой, как на рисунке справа. Как только в процессе работы на испытательном стенде сектора с нечетными номерами нагрелись до температуры T_1 = 50°*C*, а с четными – до T_2 = 90°*C*, испытания остановили. Определите установившуюся после остановки испытаний температуру кристалла. Толщина изобретения всего 3 *мм*, удельная теплоемкость материала кристалла 760 *Дж*/(*кг·К*), а плотность 2.3 *г*/*см*^{3}. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.



Решение:

Данных в задаче достаточно для того, чтобы найти объёмы и массы всех секторов, после чего написать уравнение теплового баланса и получить ответ. Однако, этого можно и не делать, увидев определённые закономерности в условии задачи.

Дело в том, что каждый следующий сектор имеет объём, а, значит, и массу, ровно в четыре раза меньшую, чем предыдущий. Например, если обозначить массу первого сектора m, то масса второго сектора равняется *m*/4. Разобьём теперь сектора на пары: 1-й со 2-м, 3-й с 4-м и т.д. В каждой паре больший сектор имеет температуру T_1=50°C, а меньший - T_2=90°C, причем их массы отличаются в 4 раза. Установившаяся температура будет одна и та же в каждой паре, следовательно, это и будет температура, установившаяся в кристалле.

Запишем уравнение теплового баланса для каждой пары:

$$cm(T - T_1) + c\frac{m}{4}(T - T_2) = 0, \qquad (1)$$

где T – температура, установившаяся в паре после остановки испытаний, c – удельная теплоемкость кристалла. После сокращения общего множителя c·m, из (1) выразим T:

$$T = \frac{T_2 + 4T_1}{5} = 58°C. \qquad (2)$$

До сих пор мы никак не учитывали теплоту, заключенную в 13-м секторе, ведь пары у него нет. Масса этого сектора составляет всего лишь 10^{-12} от общей массы кристалла, а температура имеет тот же порядок, что и установившаяся в каждой паре. Значит, учет теплоты этого сектора не приведет к сколь-нибудь видимому изменению равновесной температуры, и им можно пренебречь.

Критерий	**Баллы**
Простой вариант	
Догадка о принципе попарного разбиения	10
Уравнение попарного теплового баланса	10
Пренебрежение теплотой 13-го сектора	5
Длинный вариант	
Уравнение теплового баланса	10
Связь площади сектора с его тепловой энергией	5
Обоснованное пренебрежение секторами малой площади	5
Получение численного ответа	5