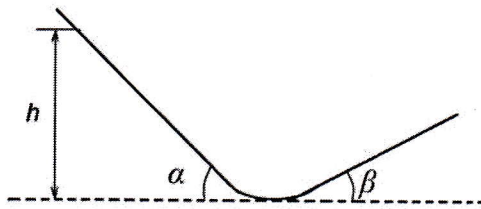


Время выполнения заданий – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (15 баллов)



Склоны заснеженного ущелья пологие, и переход между ними плавный (см. рисунок). Забравшись на высоту h , сноубордист, не прилагая усилий, начал свободно съезжать вниз. Считая, что сноуборд скользит по снегу без трения, а человек специально не тормозит, найдите период T его колебаний. Уклон левого склона α , правого - β . Геометрическими размерами сноуборда и человека на нем пренебречь.

Решение.

Период колебаний складывается из времени спуска и подъёма для каждой горки:

$$T = t_{\text{спуска}}^{\alpha} + t_{\text{подъёма}}^{\alpha} + t_{\text{спуска}}^{\beta} + t_{\text{подъёма}}^{\beta}. \quad (1)$$

Поскольку время подъёма равно времени спуска (сноубордист поднимается на высоту, с которой спускается), то

$$L_{\alpha} = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{g \cdot t_{\alpha}^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2}, \quad (2)$$

$$t_{\alpha} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2 \alpha}}. \quad (3)$$

Аналогично

$$t_{\beta} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g \cdot \sin^2 \beta}}. \quad (4)$$

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right). \quad (5)$$

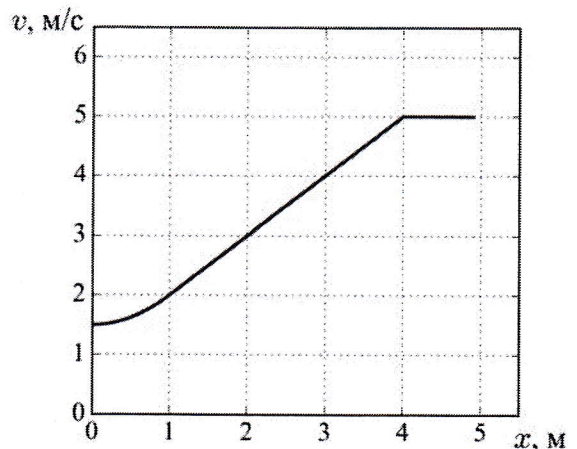
Критерии:

- Верное определение периода колебаний, например (1)
- Получены выражения (3), (4) или аналогичные
- Найден период (5)

Критерии	Баллы
Верное определение периода колебаний, например (1)	4
Получены выражения (3), (4) или аналогичные	8
Найден период (5)	3

Задание 2. (25 баллов)

Тело движется вдоль оси x , а график зависимости его скорости v от координаты показан на рисунке. Найдите ускорение тела a в точке с координатой $x = 3$ м. В какой точке отрезка от 0 до 5 м ускорение a принимает максимальное значение? Тело считать материальной точкой.



Решение. На участке от $x = 1$ м до $x = 4$ м скорость меняется по закону

$$v = v_1 + k \cdot (x - 1). \quad (1)$$

где $k = 1 \text{ с}^{-1}$, $v_1 = 1 \text{ м/с}$. Ускорение, по определению, равно

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2)$$

Но $\Delta x = v \cdot \Delta t$, откуда $\Delta t = \Delta x / v$. (3)

Следовательно,

$$a = \frac{v \cdot \Delta v}{\Delta t} . \quad (4)$$

Поскольку

$$k = \frac{\Delta v}{\Delta x}, \quad (5)$$

то

$$a = k \cdot v. \quad (6)$$

В точке $x = 3$ м $v = 4$ м/с и $a = 4$ м/с².

Ответим на вопрос о том, когда a будет максимальным. На участке $1 \text{ м} < x < 4$ м параметр k постоянный, а максимальное значение $v = 5$ м/с достигается при приближении к точке $x = 4$ м, поэтому по мере приближения к этой точке ускорение будет увеличиваться и стремиться к значению $a_{\text{max}} = 5$ м/с². На отрезке $4 \text{ м} < x < 5$ м ускорение равно нулю, т.к. скорость не меняется.

(7)

На участке $0 \text{ м} < x \leq 1$ м ускорение явно меньше a_{max} , ведь и значения скорости v и наклона касательной к графику k здесь меньше, чем при $1 \text{ м} < x < 4$ м.

(8)

Таким образом, максимально ускорение достигается вблизи точки $x = 4$ м. Также принимается ответ "в точке $x = 4$ м".

Критерии:

Баллы

Высказано утверждение, аналогичное формуле (1)

6

Получено соотношение (4)

8

Получены соотношение (5) и численный ответ

2

Приведены рассуждения, аналогичные (7)

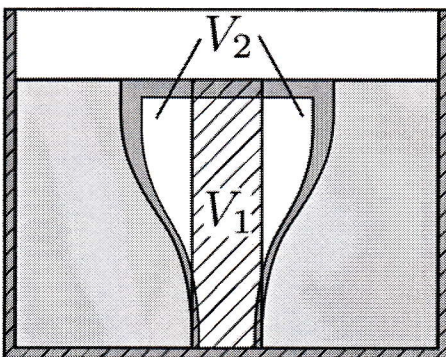
7

За утверждение (8)

2

Задание 3. (25 баллов)

В кабинете биологии Вовочка нашел колбу неправильной формы, расширяющуюся книзу. Он поставил ее перевернутой на дно аквариума, и начал медленно наполнять его водой. Горлышко плотно прижато ко дну, так что вода под него не затекает. Колба начинает всплывать ровно в тот момент, когда оказывается полностью погруженной. Определите вместимость колбы, если ее высота $H = 30$ см, масса $M = 1$ кг, площадь горлышка $S = 0,1$ см², а плотность материала $\rho_1 = 2,5$ г/см³. Плотность воды считать равной $\rho_0 = 1,0$ г/см³. Колба в аквариуме изображена на рисунке.



Решение. Обозначим наружный объем колбы V . Мысленно разобьем колбу на две части: цилиндр в центре, лежащий непосредственно над горлышком – $V_1 = S \cdot H$, и область вокруг него V_2 . Под горлышко вода не затекает, значит на часть V_1 не будет действовать гидростатическое давление, и, следовательно, сила Архимеда. Вода будет выталкивать только V_2 . Силу Архимеда найдем как

$$F_a = \rho_0 \cdot g \cdot (V - S \cdot H). \quad (1)$$

В момент, когда колба всплывает,

$$F_a = M \cdot g. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$V = \frac{M}{\rho_0} + S \cdot H. \quad (3)$$

Внутренний объем колбы (вместимость) – это полный объем, минус объем стенок:

$$V_{\text{внутр}} = V - \frac{M}{\rho_1} = M \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right) + S \cdot H. \quad (4)$$

Критерии:

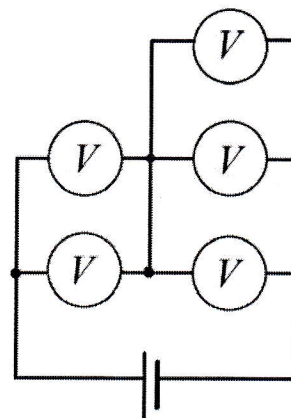
	Баллы
Догадка о том, что сила Архимеда будет уменьшена из-за того, что тело прижато ко дну	8
Выражение для силы Архимеда, аналогичное (1)	4
Сформулировано условие всплытия, к примеру (2)	3
Учет объема стенок	8
Вычисления проведены без ошибок	2

Задание 4. (15 баллов)

Батарейка имеет напряжение 10 В. В схеме, изображенной на рисунке, использованы одинаковые вольтметры. Что они будут показывать?

Решение.

Ток батарейки в этой схеме протекает через параллельно соединённые два вольтметра, разделившись пополам между ними, а затем – через тройку вольтметров, при этом он делится на три равные доли (вольтметры одинаковые). Во-первых, ясно, что показания любого вольтметра из тройки меньше показаний «парных» вольтметров в 3:2=1,5 раза. В сумме же показания любого вольтметра из пары и любого из тройки составляет 10 В. Итак, вольтметры в паре показывают по 6 В, вольтметры в тройке – по 4 В.



Критерии:

	Баллы
Вольтметры реальные, и их сопротивление конечно (через них идет конечный ток)	5
Вольтметры в паре и тройке соединены параллельно, поэтому их показания будут одинаковы	3
Пара и тройка соединены последовательно, поэтому напряжение между ними поделится	4
Указан верный ответ	3

Задание 5. (20 баллов)

Возьмите линейку и положите её концы плашмя на две одинаковые ручки (карандаша, фломастера). Если теперь двигать ручки навстречу друг к другу, то они встретятся примерно в середине линейки. Если же положить середину линейки на сведённые вместе ручки и пытаться двигать их друг от друга к концам линейки, то одна ручка будет двигаться от центра, а вторая – нет. Почему?

Решение.

При движении от центра одна ручка всегда стартует чуть быстрее и обгоняет вторую. Поэтому над второй ручкой оказывается всё большая часть веса линейки, и из-за трения она не может двигаться. Первой же ручке, наоборот, всё легче и легче.

(1)

При движении к центру, если одна из ручек оказывается ближе к центру масс, чем другая, на неё начинает действовать большая сила трения, в результате чего она замедляется и останавливается. При этом начинает двигаться вторая ручка, пока не окажется ближе первой к центру масс. Таким образом, центр масс линейки всегда находится между ручками.

(2)

Критерии:

	Баллы
Объяснение того, что при движении к краям линейки одна из ручек останавливается	10
Объяснение того, что при движении к центру ручки имеют тенденцию двигаться синхронно	10