Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Существуют ли 4 различных натуральных числа, больших единицы, таких, что сумма квадратов любых трёх из них делится на оставшееся число, увеличенное на единицу? (15 баллов)

Задание 2. На доске написано 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Максим нашёл все попарные произведения этих чисел и выписал их на доску, после чего, стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Затем он нашёл все попарные произведения оставшихся чисел и выписал их на доску, после чего снова стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Сколько теперь чисел написано на доске? (15 баллов)

Задание 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все рёбра которого равны единице, точка $M -$ середина ребра CC_1, точка $O -$ центр грани ABB_1A_1. Множество точек, лежащих на грани CBB_1C_1, таково, что для любой точки X этого множества плоскость XOM пересекает ребро AD. Найдите площадь этого множества. (15 баллов)

Задание 4. Геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots , a_n$, в которой все члены различны, такова, что числа $a_1, a_2^2, a_3^3, \dots , a_n^n$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Какое наибольшее значение может принимать n? (15 баллов)

Задание 5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Точки M и N – середины высот AA_1 и BB_1. Оказалось, что центр I вписанной в треугольник HMN окружности лежит на биссектрисе угла MCN. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный. (20 баллов)

Задание 6. Имеется квадрат 6×6. Два игрока по очереди покрывают его полосками. Первый игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×4 на свободные клетки, а второй игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×2 на свободные клетки. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество полосок может гарантированно выложить первый игрок? (20 баллов)