Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (15 баллов) Велосипедист выехал из города A в город B, расстояние между которыми равно 100 км. Оказалось, что для любого t его средняя скорость v_t в первые t часов пути может быть вычислена по формуле $v_t = S + t$, где $S -$ путь в километрах, который осталось проехать велосипедисту. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Решение: По определению, средняя скорость v_t в первые t часов пути вычисляется по формуле $v_t = \frac{S\prime}{t}$, где $S' -$ пройденный велосипедистом путь. Тогда $S + t = \frac{100-S}{t}$. Для вычисления времени, которое велосипедист пребывал в пути, необходимо подставить $S = 0$. В итоге $t = \frac{100}{t}$, откуда $t = 10$. Тогда средняя скорость велосипедиста на протяжении всего пути равна $\frac{100 \text{ км}}{10 \text{ ч}} = 10$ км/ч.

Ответ: $\mathbf{10}$ км/ч

Задание 2. (15 баллов) Различные числа a, b, c таковы, что $(a-1)(a-b+c) = (b-1)(b-a+c)$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $a+b+c$.

Решение: Раскроем скобки в обеих частях, после чего перенесём всё в левую часть.

$a^2 - ab + ac - a + b - c = b^2 - ab + bc - b + a - c.$

$a^2 - b^2 + ac - bc + 2b - 2a = 0.$

$(a-b)(a+b) + (a-b)c - 2(a-b) = 0.$

$(a-b)(a+b+c-2) = 0.$

Поскольку $a \neq b$, то $a+b+c = 2$.

Ответ: 2

Задание 3. (15 баллов) Саша загадал 4 различных положительных числа и в каждой паре чисел нашёл отношение суммы чисел к их произведению. Пять из шести полученных результатов оказались следующими: $\frac{1}{20}, \frac{2}{15}, \frac{1}{6}, \frac{41}{120}, \frac{9}{24}$. Найдите все значения, которые может принимать шестой результат.

Решение: Обозначим исходные числа через a, b, c, d, причём $a \geq b \geq c \geq d$. Тогда 6 полученных Сашей результатов равны $\frac{a+b}{ab}, \frac{a+c}{ac}, \frac{a+d}{ad}, \frac{b+c}{bc}, \frac{b+d}{bd}, \frac{c+d}{cd}$.

Эти числа можно переписать в виде $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}, \frac{1}{a}+\frac{1}{c}, \frac{1}{a}+\frac{1}{d}, \frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \frac{1}{b}+\frac{1}{d}, \frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Заметим, что полученные числа разбиваются на 3 пары с суммой равной $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

Найдём среди пяти данных нам чисел две пары с равной суммой. Для этого приведём все дроби к общему знаменателю и получим $\frac{6}{120}, \frac{16}{120}, \frac{20}{120}, \frac{41}{120}, \frac{45}{120}$.

Несложно видеть, что такие пары чисел можно выбрать единственным способом — это $\frac{16}{120}, \frac{45}{120}$ и $\frac{20}{120}, \frac{41}{120}$. Сумма чисел в каждой паре равна $\frac{61}{120}$. Значит шестой результат равен $\frac{61}{120} - \frac{6}{120} = \frac{11}{24}$.

Ответ: $\frac{11}{24}$

Замечание: Пример чисел, удовлетворяющих условиям задачи, приводить не нужно.

Задание 4. (15 баллов) У Даши есть 3 одинаковые настоящие монеты, но Катя подложила ей одну фальшивую монету, легче настоящей. Для определения фальшивой монеты Катя любезно предложила Даше воспользоваться её чашечными весами без гирь, но при этом разрешила ей только выбирать, какие монеты на какую чашу класть, а результаты взвешиваний будет называть сама Катя. После любого взвешивания она может сказать, какая из чаш перевесила или что весы в равновесии. Чтобы Даше было сложнее найти фальшивую монету, Катя по очереди говорит ей правильный и неправильный результат взвешиваний, при этом неизвестно, что она скажет при первом взвешивании – правду или ложь. Сможет ли Даша за несколько взвешиваний определить фальшивую монету?

Решение: Пронумеруем монеты числами 1, 2, 3, 4. Если Даша узнает хотя бы одно из взвешиваний, в котором Катя сказала неправду, то она сможет определить фальшивую монету. Действительно, ведь тогда она сможет совершать необходимые для этого взвешивания только тогда, когда Катя будет говорить правду, а именно:
1) Сперва Даша взвесит пары 1, 2 и 3, 4. Чаша, оказавшаяся легче, содержит фальшивую монету.
2) Затем (через одно взвешивание) она сравнит монеты из лёгкой кучки. Та, которая легче, фальшивая.
Теперь покажем, что Даша сможет определить, когда Катя врёт, а когда говорит правду. Для этого сделаем пару взвешиваний:
1) 1, 2 и 3, 4
2) 1, 3 и 2, 4
В каждом из взвешиваний присутствует одна фальшивая монета, а значит равенство чаш невозможно. Поэтому, если Катя хоть в одном взвешивании скажет, что весы уравновесились, то она соврала. Если ни в одном из взвешиваний Катя не говорила про равенство чаш, то в каждом из взвешиваний перевешивала либо левая, либо правая чаша. Если оба раза она сказала одно и то же, то монеты 1 и 4 – настоящие, ведь если бы Даша поменяла местами обе настоящие монеты, то истинный результат не изменился бы, а значит Катя оба раза сказала правду или оба раза солгала, что невозможно. Если же Катя ответила по-разному, то монеты 2 и 3 – настоящие, так как иначе мы бы оказались в предыдущей ситуации. После двух взвешиваний Даша точно знает две настоящие монетки, и следующим взвешиванием сравнивает их. Если Катя сказала, что весы в равновесии, то она сказала правду, иначе – солгала. Таким образом, Даша всегда сможет поймать Катю на лжи и выяснить, какая из монет фальшивая.

Ответ: сможет

Задание 5. (20 баллов) В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и B взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M. На стороне AB отмечены точки P и Q так, что $AP = PQ = QB$. Доказать, что периметр треугольника CPQ меньше удвоенного периметра треугольника ABM.

Решение: Пусть медиана CM пересекает сторону AB в точке K. По условию задачи, треугольник ABM – прямоугольный, а значит $2MK = AB$. По свойству медианы имеем $2MK = CM$, следовательно, $CM = AB$. Так как $AP = BQ$ и $AK = BK$, то $PK = QK = \frac{1}{2}PQ$. Пусть $PQ = 2x$, тогда $AP = QB = PQ = 2x$, $AB = CM = 6x$, $MK = 3x$, $CK = 9x$, $PQ = QK = x$. Из неравенства треугольника следует, что $P_{CPQ} = CP + CQ + PQ < (CK + PK) + (CK + QK) + PQ = (9x + x) + (9x + x) + 2x = 22x$.

Также из неравенства треугольника следует, что $2P_{ABM} = 2AM + 2BM + 2AB > 4AB = 24x$, откуда $P_{CPQ} < 2P_{ABM}$, что и требовалось доказать.

Задание 6. (20 баллов) На бумажной ленте написано некоторое число, не содержащее нулей. Миша может разрезать ленту между любыми двумя цифрами и получить два новых числа. Оказалось, что как бы Миша ни разрезал ленту, сумма полученных чисел всегда будет равна некоторой натуральной степени семёрки. Из какого наибольшего количества цифр может состоять число, записанное на ленте?

Решение: Обозначим число, записанное на ленте через $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$. Любое число при делении на 9 даёт такой же остаток, как и его сумма цифр. Это означает, что как бы Миша ни разрезал ленту, сумма двух полученных чисел будет иметь такой же остаток при делении на 9, как и число $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, то есть остаток всегда один и тот же для конкретного числа a. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма: если две различные степени семёрки имеют одинаковый остаток при делении на 9, то одно из них больше другого хотя бы в 343 раза.

Доказательство: Пусть числа 7^m и 7^k имеют одинаковый остаток при делении на 9 ($m > k$). Тогда $7^m - 7^k = 7^k(7^{m-k} - 1) \vdots 9$, откуда $7^{m-k} - 1 \vdots 9$. Но при $m - k < 3$ это неверно, значит $m - k \geq 3$, а значит $7^m \geq 7^3 \cdot 7^k = 343 \cdot 7^k$, что и требовалось доказать.

Предположим, что в числе a есть хотя бы 5 цифр ($n \geq 5$). Рассмотрим сумму чисел при двух разрезах: $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n$ и $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$. Так как все цифры на ленте не равны нулю, то $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} > 11\dots1$ ($n-1$ единица). Заметим, что $10^{n-2} + 10^{n-3} < \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n$ и $10 < \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n} < 10^{n-3} + 10^3$. Поскольку $n \geq 5$, то $10^{n-3} + 10^3 \leq 10^{n-2} + 10^{n-3}$, из чего следует, что $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n > \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$. С другой стороны, $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n = 100 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + \overline{a_{n-2} a_{n-1}} + a_n < 100 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + 100 \cdot \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}$, а следовательно $\frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n}{\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} + \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n}} < 100 < 343$, что противоречит лемме. Значит в числе a не более 4 цифр.

Предположим, что на ленте написано число $a = \overline{a_1a_2a_3a_4}$. Очевидно, что $\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} < 343$, значит число $\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4}$ является двузначной степенью семёрки, то есть $\overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} = 49$. Но число $\overline{a_1a_2a_3} + a_4$ состоит из трёх или четырёх цифр и отличается от предыдущего хотя бы в 343 раза, то есть оно не меньше, чем $49 \cdot 343 = 16807$ – противоречие. Значит в числе a не более 3 цифр.

Трёхзначное число, которое могло быть записано на ленте, это 445. Действительно, $4 + 45 = 44 + 5 = 7^2$.

Ответ: 3