Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. Существуют ли 4 различных натуральных числа, больших единицы, таких, что сумма квадратов любых трёх из них делится на оставшееся число, увеличенное на единицу? (15 баллов)

Решение: Существуют, например, подойдут числа 2, 3, 6, 48.

Задание 2. На доске написано 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Максим нашёл все попарные произведения этих чисел и выписал их на доску, после чего, стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Затем он нашёл все попарные произведения оставшихся чисел и выписал их на доску, после чего снова стёр все изначальные числа и все повторяющиеся. Сколько теперь чисел написано на доске? (15 баллов)

Решение: Для удобства, обозначим изначально записанные на доске числа, как $p_1, p_2, \dots, p_{10}$. Поскольку любые два начальных числа взаимно просты, все попарные произведения будут различными, а всего их будет $C_{10}^2 = 45$. Именно столько чисел останется после того, как Максим сотрёт все изначальные числа. Все оставшиеся числа имеют вид $p_i p_j$, где $1 \leq i, j \leq 10, i < j$.

Произведение двух оставшихся чисел может быть одного из двух видов: $p_k p_l p_m p_n$ или $p_k p_l^2 p_n$, где $k \neq l \neq m \neq n.$

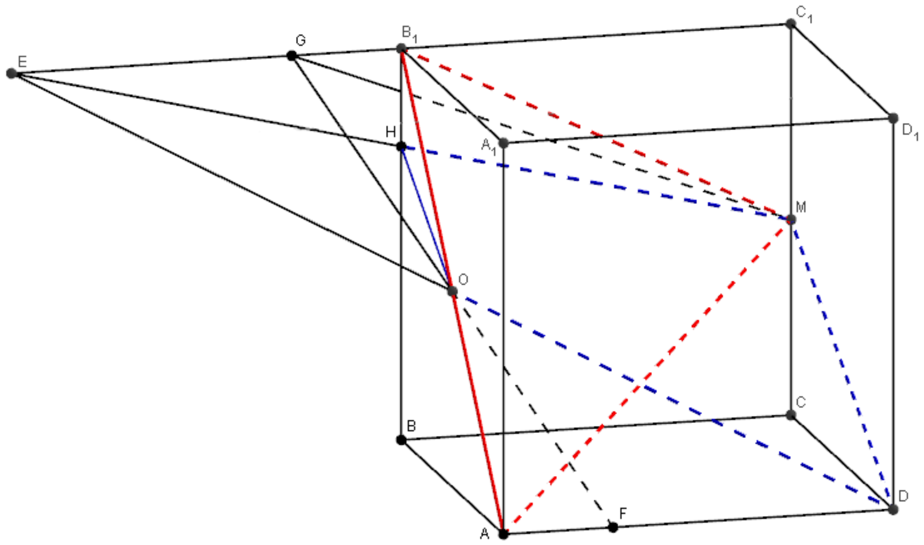
Всего различных чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ столько же, сколько и различных четвёрок чисел k, l, m, n, а их всего $C_{10}^4 = 210$. Каждое из чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ может быть получено тремя способами: при перемножении чисел $p_k p_l$ и $p_m p_n$, $p_k p_m$ и $p_l p_n$ или $p_k p_n$ и $p_l p_m$. То есть каждое из таких чисел будет написано трижды, поэтому с учётом повторяющихся чисел всего их будет написано 630. Чтобы узнать количество чисел вида $p_k p_l^2 p_n$, необходимо вычесть из количества всех чисел количество чисел вида $p_k p_l p_m p_n$ (с учётом повторяющихся). После второго действия до того, как будут стёрты повторяющиеся числа, их будет всего $C_{45}^2 = 990$. Значит чисел вида $p_k p_l^2 p_n$ всего $990 - 630 = 360$. Но каждое из чисел вида $p_k p_l^2 p_n$ может быть получено лишь одним способом $-$ при перемножении чисел $p_k p_l$ и $p_l p_n$, поэтому повторяющихся чисел такого вида не будет. Значит после того, как Максим сотрёт все повторяющиеся числа, на доске останется $210 + 360 = 570$ чисел.

Ответ: 570

Замечание: Баллы за задачу не снимались, если условие понималось так, что после второго действия Максим стирал все числа вида $p_k p_l p_m p_n$.

Задание 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все рёбра которого равны единице, точка M — середина ребра CC_1, точка O — центр грани ABB_1A_1. Множество точек, лежащих на грани CBB_1C_1, таково, что для любой точки X этого множества плоскость XOM пересекает ребро AD. Найдите площадь этого множества. (15 баллов)

Решение: Построим плоскость AOM. Для этого найдём точку пересечения прямой AO с плоскостью BB_1C_1C. Очевидно, что это будет точка B_1. Значит сечение куба плоскостью AOM пересекает ребро BB_1 в точке B_1.



Построим плоскость DOM. Для этого найдём точку пересечения прямой DO с плоскостью BB_1C_1C. Прямые DO и B_1C_1 лежат в плоскости AB_1C_1D, а $AD||B_1C_1$, значит DO пересекает B_1C_1. Обозначим их точку пересечения через E, она также лежит в плоскости DOM. Прямая EM также лежит в плоскости DOM и пересекает ребро BB_1 в некоторой точке H. Заметим, что треугольники EB_1O и AOD равны, значит $EB_1 = AD = B_1C_1$. Треугольники EB_1H и EC_1M подобны с коэффициентом 2, значит $B_1H = \frac{1}{2}C_1M = \frac{1}{4}$.

Пусть X — некоторая точка искомого множества и плоскость XOM пересекает ребро AD в точке F. Прямая FO лежит в плоскости AB_1C_1D, а значит точка пересечения G прямой FO с плоскостью BB_1C_1C лежит на отрезке EB_1. Прямая MG лежит в плоскости XOM, причём она заключена между прямыми EM и B_1M. Поскольку точка X лежит в плоскостях BB_1C_1C и FOM, то она лежит на прямой MG, а следовательно – внутри треугольника HB_1M, значит треугольник HB_1M — искомое множество. $S_{HB_1M} = \frac{1}{2}B_1H \cdot C_1B_1 = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{1}{8}}$

Задание 4. Геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, в которой все члены различны, такова, что числа $a_1, a_2^2, a_3^3, \dots, a_n^n$ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Какое наибольшее значение может принимать n? (15 баллов)

Решение: Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q. Предположим, что $n \geq 4$, тогда в исходной прогрессии точно присутствуют числа $a_1, a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, a_4 = a_1 q^3$. Тогда по свойству арифметической прогрессии имеем $\begin{cases} 2(a_1 q)^2 = a_1 + (a_1 q^2)^3 \\ 2(a_1 q^2)^3 = (a_1 q)^2 + (a_1 q^3)^4 \end{cases}$. Поскольку все члены геометрической прогрессии различны, то $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0, q \neq 1$. Поделим первое уравнение системы на a_1, а второе – на $(a_1 q)^2$. Получим $\begin{cases} 2a_1 q^2 = 1 + a_1^2 q^6 \\ 2a_1 q^4 = 1 + a_1^2 q^{10} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} a_1^2 q^6 - 2a_1 q^2 + 1 = 0 \\ a_1^2 q^{10} - 2a_1 q^4 + 1 = 0 \end{cases}$.

Решая первое уравнение системы, как квадратное относительно a_1, получаем

$a_{1_{1,2}} = \frac{2q^2 \pm \sqrt{4q^4 - 4q^6}}{2q^6} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^4}$.

Решая второе уравнение системы, как квадратное относительно a_1, получаем

$a_{1_{1,2}} = \frac{2q^4 \pm \sqrt{4q^8 - 4q^{10}}}{2q^{10}} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^6}$.

Из этого следует, что $\frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-q^2}}{q^6}$.

Если $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$ или $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$, то $q^4 = q^6$. Полученное уравнение имеет решение только лишь при $q = 0, q = 1, q = -1$. Ранее было отмечено, что первые два варианта невозможны. Если $q = -1$, то $a_1 = \frac{1}{a_1}$ или $a_1^2 = 1$. Но тогда прогрессия имеет либо вид $1, -1, 1, -1$, либо вид $-1, 1, -1, 1$, что невозможно по условию.

Если $\frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1-\sqrt{1-q^2}}{q^6}$ или $\frac{1-\sqrt{1-q^2}}{q^4} = \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{q^6}$, то $q^2 \pm q^2\sqrt{1-q^2} = 1 \mp \sqrt{1-q^2}$, откуда $q^2 - 1 = \pm(q^2+1)\sqrt{1-q^2}$. Поскольку $q^2 + 1 > 0$ и $q^2 - 1 < 0$, то уравнение $q^2 - 1 = (q^2+1)\sqrt{1-q^2}$ не имеет решений, а значит $q^2 - 1 = -(q^2+1)\sqrt{1-q^2}$.

$$1 - q^2 = (q^2+1)\sqrt{1-q^2},$$

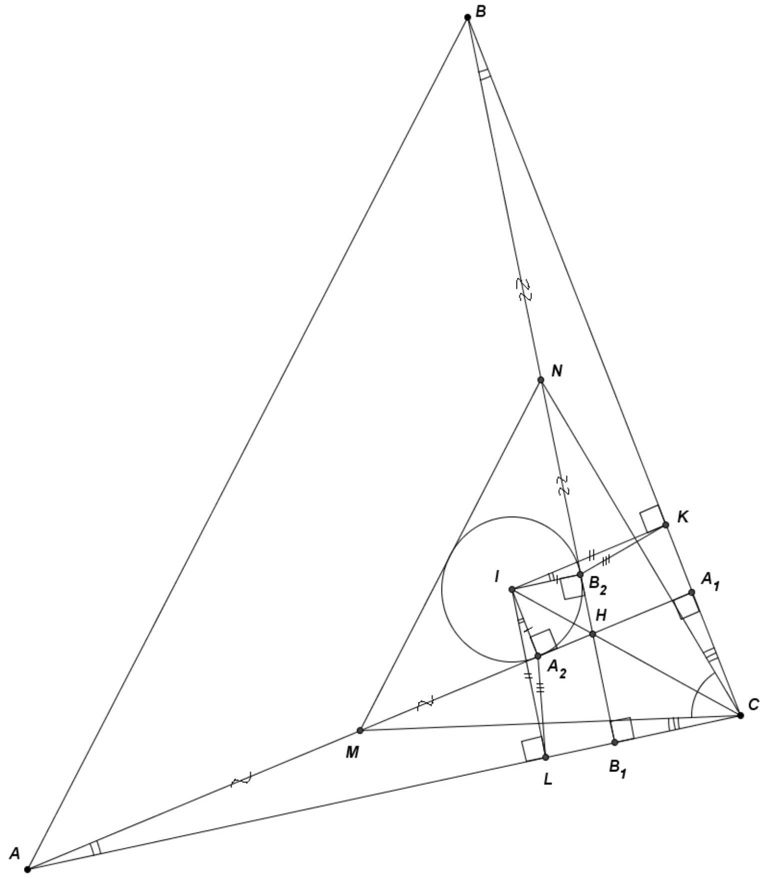
$$\sqrt{1-q^2} = q^2 + 1.$$

Но $q^2 + 1 > 1$, а $1 - q^2 < 1$, поэтому уравнение также не имеет решений, а значит, $n < 4$.

При $n = 3$ такая прогрессия существует, например, при $a_1 = \frac{8}{9}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 3

Задание 5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Точки M и N – середины высот AA_1 и BB_1. Оказалось, что центр I вписанной в треугольник HMN окружности лежит на биссектрисе угла MCN. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный. (20 баллов)



Решение: Рассмотрим прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C с общим углом при вершине C. Они подобны, поэтому $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ и $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AC}{BC}$. Так как $AM = \frac{1}{2}AA_1$ и $BN = \frac{1}{2}BB_1$, то $\frac{AM}{BN} = \frac{AC}{BC}$, а значит треугольники AMC и BNC подобны и $\angle ACM = \angle BCN$. Последнее равенство означает, что биссектриса CI угла MCN является также биссектрисой угла ACB. Из точки I опустим перпендикуляры IA_2 и IB_2 на прямые AH и BH соответственно, а также перпендикуляры IL и IK на прямые AC и BC соответственно. Так как точка I лежит на биссектрисе угла ACB, то $IL = IK$. Так как $I -$ центр вписанной в треугольник HMN окружности, то $IA_2 = IB_2$. Прямые углы IB_2B и IKB опираются на отрезок BI, а значит четырёхугольник $BKB_2I -$ вписанный и $\angle KIB_2 = \angle KBB_2$, как вписанные. Аналогично доказывается, что $\angle LIA_2 = \angle LAA_2$. По уже доказанному, $\angle LAA_2 = \angle KBB_2$, а значит $\angle KIB_2 = \angle LIA_2$, из чего следует равенство треугольников LIA_2 и KIB_2. Отсюда получаем $A_2L = B_2K$, $\angle KB_2B = \angle AA_2L$ и $\angle BKB_2 = \angle ALA_2$, а значит треугольники AA_2L и BB_2K равны. Из равенства этих треугольников следует, что $AA_2 = BB_2$, а $HA_2 = HB_2$ по свойству отрезков касательных, а значит $AH = BH$, то есть треугольник $ABH -$ равнобедренный. Из равнобедренности получаем $\angle ABH = \angle BAH$, откуда $\angle ABC = \angle BAC$ и треугольник ABC — равнобедренный, что и требовалось доказать.

Замечание: Отметим также, что точки M и N могли оказаться на отрезках HA_1 и HB_1. Если они обе эти точки попали на отрезки HA_1 и HB_1, то решение получается аналогичным. Если же одна точка попала на один из указанных отрезков, а вторая – нет, то центр I вписанной в треугольник HMN окружности не будет лежать на биссектрисе угла MCN. За отсутствие доказательства этого факта баллы не снижались.

Задание 6. Имеется квадрат 6×6. Два игрока по очереди покрывают его полосками. Первый игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×4 на свободные клетки, а второй игрок каждым своим ходом кладёт полоску 1×2 на свободные клетки. Игра заканчивается, когда один из игроков не может сделать ход. Какое наибольшее количество полосок может гарантированно выложить первый игрок? (20 баллов)

Решение: Для удобства в дальнейшем будем называть первого игрока «Первым», а второго игрока – «Вторым». Докажем, что Первый не сможет поставить на доску более 4 полосок. Рассмотрим 8 закрашенных клеток, как показано на рисунке 1. Заметим, что любая полоска 1×4 покрывает ровно одну закрашенную клетку.

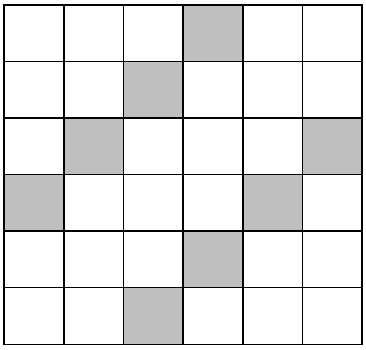


Рис. 1

Если Первый сумеет сделать четыре хода, то он покроет какие-то 4 закрашенные клетки. Чтобы не дать Первому сделать пятый ход, Второй каждый свой ход также будет покрывать какую-то серую клетку, а если в какой-то момент Второй не сможет положить полоску 1×2 ни на какую закрашенную клетку, то и Первый не сможет положить полоску 1×4 ни на какую закрашенную клетку, и игра закончится раньше. Значит Второй может помешать Первому сделать 5 и более ходов.

Докажем, что Первый сможет выложить четыре полоски 1×4. Рассмотрим первые два хода Первого.

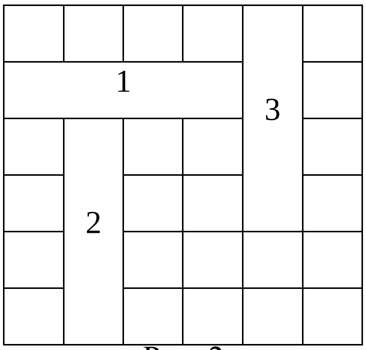


Рис. 2

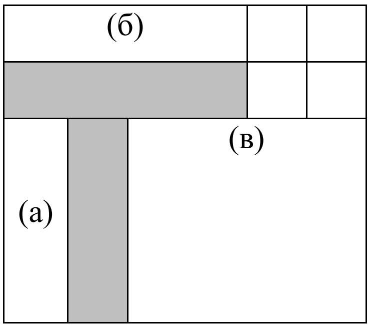


Рис. 3

Пусть Первый своим первым ходом положил полоску 1×4 на место прямоугольника 1 (см. рис. 2). После этого при любом своём ходе Второй не сможет положить полоску 1×2 так, чтобы она налегала и на прямоугольник 2, и на прямоугольник 3. Значит Первый своим вторым ходом сможет положить полоску 1×4 либо на прямоугольник 2, либо на прямоугольник 3. Без ограничения общности, пусть он смог положить полоску на прямоугольник 2. Затем Второй сделает свой второй ход. Поделим доску на области (а), (б), (в) (см. рис. 3) и рассмотрим все возможные варианты первых двух ходов Второго.

1) Оба хода были совершены в область (в). Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской область (а). Если после этого Второй своим ходом не задевает область (б), то Первый своим четвёртым ходом накрывает полоской область (б). Если же Второй своим ходом задевает область (б), то внутри области (в) всего две полоски 1×2. Каждая полоска 1×2 пересекает либо два столбца и одну строку, либо две строки и один столбец. Значит как бы Второй игрок не положил свои полоски в область (в), в ней найдётся хотя бы один столбец или хотя бы одна строка, которые не пересекли полоски. Именно эту строку (столбец) Первый накрывает полоской 1×4.

2) Один из ходов был совершён в область (в), а другой ход задел пересёк область (а), пересёк область (б) или не пересёк ни одну из них. Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской ту область среди (а) или (б), которая не была задета полосками Второго игрока (если они обе не задеты, то Первый кладёт полоску в любую область). После третьего хода Второго в области (в) не может оказать более двух полосок 1×2, а значит, как было доказано ранее, Первый сможет положить четвёртую полоску 1×4 в область (в).

3) Оба хода не пересекли область (в). Тогда своим третьим ходом Первый накрывает полоской область третью сверху строку области (в). Как бы ни после этого не сходил Второй, хотя бы одна из строк области (в) останется нетронутой, и Первый своим четвёртым ходом накроет её полоской 1×4.

Тем самым мы доказали, что Первый сможет выложить на доску 4 полоски 1×4 независимо от действий Второго.

Ответ: 4