11 класс

Вариант 1

1. Петя покрасил все натуральные числа в 2017 разных цветов. Верно ли что независимо от способа покраски можно найти два числа одного цвета, отношение которых целое и делится на 2016?

2. Пусть N — четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20}?

3. В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет $\frac{1}{6}$ часть площади треугольника. Определите высоту треугольника и сторону квадрата.

4. Дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

   коэффициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

   (a) a_{11}, a_{22}, a_{33} — положительны;

   (b) все остальные коэффициенты отрицательны;

   (c) в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна.

   Докажите, что $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ является единственным решением для данной системы.

5. Для всех значений параметра a решите неравенство

$$\log_x (x - a) > 2.$$

11 класс

1. Петя покрасил все клетки доски размером 5×5 в два цвета. Докажите, что независимо от способа раскраски Маша может найти прямоугольник из клеток доски, все угловые клетки которого покрашены в один цвет.

2. Докажите, что число
$$1^{2017} + 2^{2017} + \ldots + 2016^{2017}$$
делится на 2017 и не делится на 2018.

3. Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.

4. Найдите четыре действительных числа x_1, x_2, x_3, x_4, таких, что что каждое, сложенное с произведением остальных, окажется равным двум.

5. Для всех значений параметра a решите неравенство
$$\log_{\sqrt{2a}}(a + 2x - x^2) < 2.$$