10 класс

Вариант 1

1. Доказать, что для любого целого неотрицательного n выражение $3^{6n} - 2^{6n}$ делится на 35.

2. К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найдите длины этих отрезков.

3. Докажите, что
$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

4. На шахматной доске 8×8 клеток расставлено 8 ладей так, что ни одна из них не бьёт другую. Пробегая мимо доски Витя заметил три ладьи стоящие на белых полях. Докажите, что есть еще по крайней мере одна ладья, тоже стоящая на белом поле.

5. При каких целых отрицательных n функция f, заданная равенством
$$f(x) = \cos 7x \cdot \sin\frac{25x}{n^2}$$
является периодической функцией с периодом $T = 7\pi$?

10 класс

1. Доказать, что для любого целого неотрицательного n выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

2. На отрезке AC длиной 12 см построена точка B так, что $AB = 4$ см. На отрезках AB и AC как на диаметрах в одной полуплоскости с границей AC построены полуокружности. Вычислите радиус окружности, касающейся построенных окружностей и AC.

3. Докажите, что если α, β, γ — величины углов произвольного треугольника, то справедливо тождество
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$

4. В некоторой стране 2017 городов, все расстояния между которыми попарно различны. На 1 мая мэр каждого города отправил свои поздравления мэру ближайшего города. Докажите, что хотя бы один мэр получил не меньше двух поздравлений.

5. При каких значениях параметра a уравнение
$$2x^2 - a\cdot\operatorname{tg}\cos x + a^2 = 0$$
имеет единственное решение?