8 класс
Вариант 1
Решения

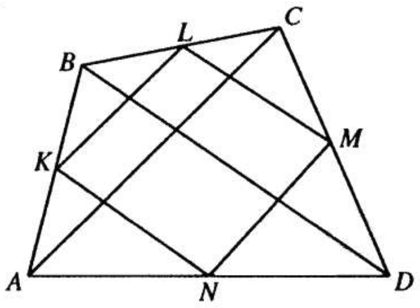
1. *Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $m^2 = n^2 + 2018$?*

   Решение. Из равенства $m^2 = n^2+2018$ вытекает, что m^2 и n^2 — одинаковой четности (либо оба четны, либо оба нечетны). Следовательно, то же можно сказать и о числах m и n. Но в таком случае $2018 = m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$ должно делиться на 4 (т.к. оба сомножителя четны), в то время, как 2018 — не кратно четырем. Следовательно, таких чисел m и n не существует.

   Ответ. Таких чисел не существует

2. *Диагонали четырехугольника равны, а длины его средних линий равны p и q. Найдите площадь четырехугольника.*

   Решение. Так как KL, LM, NM и KN — средние линии соответствующих треугольников (см. рисунок), то $KL = NM = \frac{1}{2}AC$, $KN = LM = \frac{1}{2}BD$. По условию $AC = BD$. Следовательно, $KLMN$ — ромб, площадь которого равна $\frac{1}{2}pq$.



   Пусть искомая площадь равна S. Тогда $S = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$. Но $S_{\triangle AKN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABD}$. Аналогично, $S_{\triangle CML} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$. Поэтому $S_{\triangle AKN}+S_{\triangle CML} = \frac{1}{4}S$. Аналогично получаем, что $S_{\triangle KBL}+S_{\triangle MDN} = \frac{1}{4}S$. Таким образом, площадь вне ромба равна $\frac{1}{2}S$. Отсюда и площадь ромба равна $\frac{1}{2}S$, откуда $S = pq$.

   Ответ. $S = pq$

3. *На конгресс приехало 1000 делегатов из разных стран. Известно, что каждые трое из них могут говорить друг с другом без помощи остальных (однако при этом возможно, Что одному из трех лиц придется служить переводчиком для двух других). Докажите, что всех делегатов конгресса можно так разместить в гостинице с двухместными номерами, что в каждом номере будут помещены делегаты, которые могут говорить друг с другом.*

   Решение. Выберем каких-то трех делегатов конгресса. Среди них найдутся двое, знающих один и тот же язык — их–то мы и поместим в одном двухместном номере гостиницы. Из оставшихся 998 делегатов снова отберем троих, среди которых опять найдутся двое, которых можно будет разместить в одном номере гостиницы — и т.д., пока у нас не останутся всего 4 делегата A, B, C и D. Если каждые два из них могут говорить между собой, то с размещением этих делегатов не будет никаких трудностей. Если же A и B между собой не говорят, то и C, и D могут служить для них переводчиками (что и делает возможным общение в тройках A, B, C и A, B, D делегатов). А это позволяет поместить, скажем, C в один номер с A, а D — в один номер с B.

4. *Найдите все решения уравнения*

   $$8^x(3x+1) = 4$$

   и докажите, что других решений нет.

   Решение. Легко заметить, что $x = \frac{1}{3}$ является решением. При $x < -\frac{1}{3}$ левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна, следовательно, корней быть не может. При $x \geq -\frac{1}{3}$ левая часть монотонно возрастает, следовательно, уравнение может иметь только один корень, поэтому других корней нет.

5. *В фирме такси в данный момент свободно 60 машин: 10 черных, 20 желтых и 30 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет не зеленое такси.*

   Решение. Вероятность того, что приедет машина определенного цвета, вычисляется как отношения количества благоприятных исходов (приезд машины нужного цвета) к общему числу исходов (общее число машин). Таким образом, вероятность приезда зеленой машины равна $\dfrac{30}{60} = \dfrac{1}{2}$.