11 класс
Вариант 1
Решения

1. *Петя покрасил все натуральные числа в 2017 разных цветов. Верно ли что независимо от способа покраски можно найти два числа одного цвета, отношение которых целое и делится на 2016?*

   Решение. Рассмотрим натуральные числа 1, 2016, 2016^2, 2016^{2017}. Их всего 2018, а цветов 2017, значит, среди этих чисел есть хотя бы два одного цвета. Отношение этих чисел целое и кратно 2016.

2. *Пусть N — четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20}?*

   Решение. Найдем две последние цифры числа N^{20}. Число N^{20} делится на 4, т.к. N четно. Далее, число N не делится на 5 (иначе оно делилось бы на 10) и, значит, представимо в виде $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$. Но число

$$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20 \cdot (5k)^{19} + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot (5k)^2 \pm 20 \cdot (5k) + 1$$

   дает при делении на 25 остаток 1, а число

$$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20 \cdot (5k)^{19} \cdot 2 + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot (5k)^2 \cdot 2^{18} \pm 20 \cdot (5k) \cdot 2^{19} + 2^{20}$$

   дает при делении на 25 тот же остаток, что и число $2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 = (1025-1)^2$ т.е. тоже остаток 1.

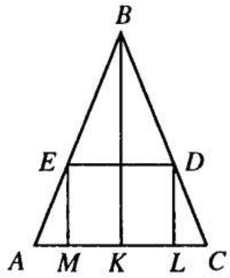
   Из того, что N^{20} при делении на 25 дает остаток 1 следует, что последними двумя цифрами этого числа могут быть лишь 01, 26, 51 или 76. Учитывая, что N^{20} должно делиться на 4, заметим, что последними двумя цифрами могут быть только 76. Значит, цифрой десятков числа N^{20} будет цифра 7.

   Ответ. 7

3. *В треугольник с основанием, равным a, вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Площадь квадрата составляет $\frac{1}{6}$ часть площади треугольника. Определите высоту треугольника и сторону квадрата.*

Решение. Если $MDEL$ — квадрат со стороной x, вписанный в данный $\triangle ABC$ с высотой $h = BK$, $a = AC$, то имеем

$$\triangle AEM \sim \triangle ABK \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{x}{h};$$
$$\triangle EBD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{x}{a}.$$



Таким образом, получаем

$$\frac{x}{h} + \frac{x}{a} = \frac{AE}{AB} + \frac{EB}{AB} = 1 \Rightarrow xa + xh = ah.$$

По условию,

$$ah = 12x^2 \Rightarrow \begin{cases} ah = 12x^2, \\ a + h = 12x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}a, h = (5 \pm 2\sqrt{6})a.$$

Ответ. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{6}a, \quad h = (5 \pm 2\sqrt{6})a$

4. *Дана система уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0, \end{cases}$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим условиям:

(а) a_{11}, a_{22}, a_{33} *— положительны;*

(б) все остальные коэффициенты отрицательны;

(в) в каждом уравнении сумма коэффициентов положительна.

Докажите, что $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *является единственным решением для данной системы.*

Решение. Пусть (x_1, x_2, x_3) — решение системы и пусть без ограничения общности $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$. Если $|x_1| = 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Предположим, чт $|x_1 \neq 0|$. Тогда

$$a_{11} + a_{13}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \geqslant a_{11} - |a_{12}|\frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\frac{|x_3|}{|x_1|} \geqslant$$
$$\geqslant a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0.$$

Отсюда и из первого уравнения

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| = |x_1| \left| a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \right| > 0.$$

Полученное противоречие показывает необходимость равенства $|x_1| = 0$, что и требовалось. Это решени легко обобщается на случай n уравнений с n неизвестными.

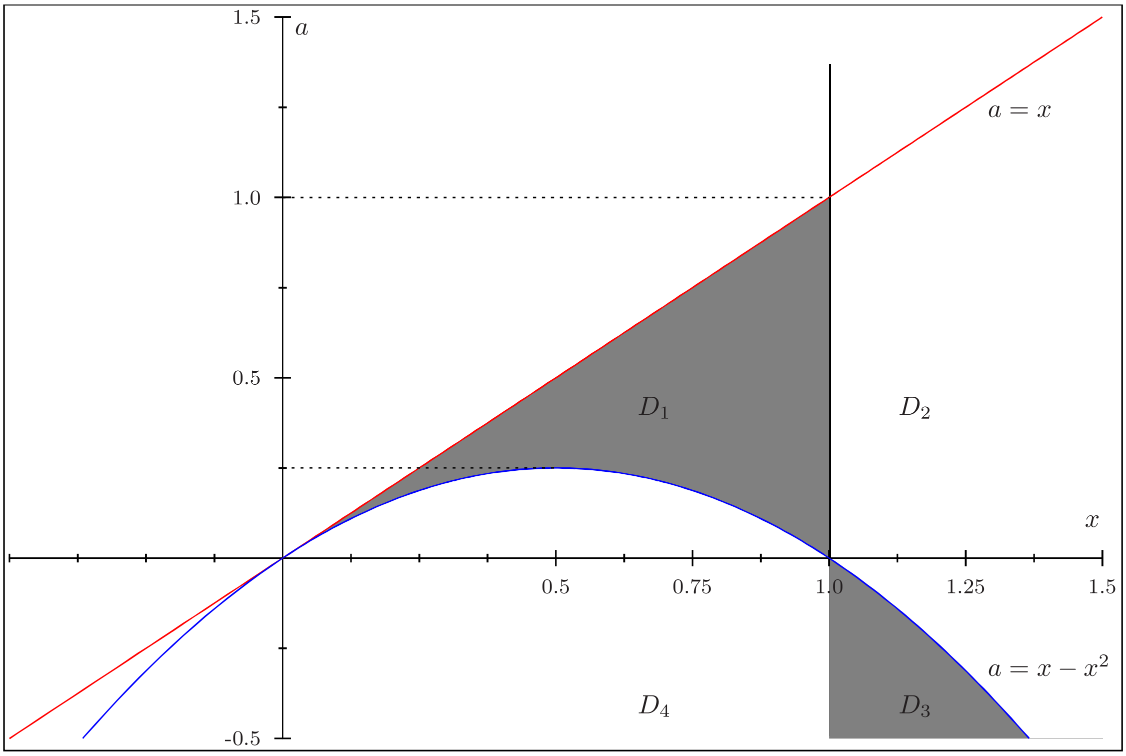
5. *Для всех значений параметра a решите неравенство*

$$\log_x (x - a) > 2.$$

Решение. Допустимые значения переменной x определяются системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x - a > 0. \end{cases}$$

Этой системе на координатной плоскости xOa соответствует множество точек, лежащих нже прямой $a = x$, правее оси a и не включающее прямую $x = 1$. Построим теперь график функции $a = x - x^2$. Этим графиком часть плоскости, соответствующая области допустимых значений, разбивается на четыре области D_1, D_2, D_3 и D_4 (см. рис.).



В каждой из этих областей произвольно выберем по одной точке, например,

$$M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{8}\right) \in D_1, \quad M_2(2; 0) \in D_2, \quad M_3(2; -3) \in D_3 \quad \text{и} \quad M_4\left(\frac{1}{2}; -1\right) \in D_4.$$

Подставляя теперь выбранные значения $(x; a)$ в исходное неравенство, получаем соответствующие неравенства:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} > 2, \quad \log_2 2 > 2,$$
$$\log_2 5 > 2 \quad \text{и} \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2} > 2.$$

Первое и третье неравенства истинны, а второе и четвертое — ложны. Соответственно, исходное неравенство истинно только в областях D_1 и D_3.

Множество точек на плоскости xOa с фиксированным a образует горизонтальную прямую. Решение же исходного неравенства будут абсциссы тех точек, которые принадлежат пересечениею этой прямой с заштрихованными областями.

А тогда, если x_1 и x_2 — корни уравнения $a = x - x^2$ (опеределяемое формулами $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$), то, изменяязначение a от $-\infty$ до $+\infty$, непосредственно из рисунка выписываем ответ.

Ответ.
$$\begin{array}{ll}
\text{если } a \in (-\infty; 0), & \text{то } x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right); \\
\text{если } a = 0, & \text{то } x \in \emptyset \\
\text{если } a \in \left(0; \frac{1}{4}\right), & \text{то } x \in \left(a; \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \sup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}; 1\right); \\
\text{если } a \in \left(\frac{1}{4}; 1\right), & \text{то } x \in (a; 1); \\
\text{если } a \in [1; +\infty), & \text{то } x \in \emptyset.
\end{array}$$

11 класс

Вариант 2

Решения

1. *Петя покрасил все клетки доски размером 5×5 в два цвета. Докажите, что независимо от способа раскраски Маша может найти прямоугольник из клеток доски, все угловые клетки которого покрашены в один цвет.*

2. *Докажите, что число*
$$1^{2017} + 2^{2017} + \ldots + 2016^{2017}$$
делится на 2017 и не делится на 2018.

   Решение. Обозначим ёто число за S. Прибавим к S такую же сумму чисел записанную в обратном порядке и сгруппируем числа по парам:
$$2S = (1^{2017} + 2016^{2017}) + \ldots + (2016^{2017} + 1^{2017}).$$
   Так как $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n, получим что $2S$ делится на 2017. Поскольку 2 и 2017 взаимно просты, на 2017 делится S.

   Если к сумме добавить следующее слагаемое (2017^{2017}), то аналогичным рассуждением получим, что $2S+2\cdot 2017^{2017}$ делится на 2018, но $2\cdot 2017^{2017}$ очевидно не делится на 2018. Следовательно, $2S$ не делится на 2018, откуда и S не делится на 2018.

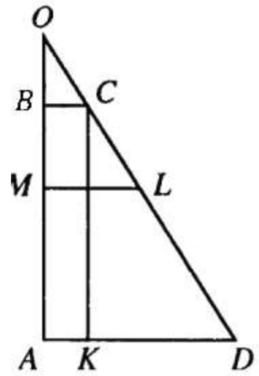
3. *Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.*

   Решение. Рассмотрим данную прямоугольную трапецию $ABCD$, где $c = AB$, $d = CD$, $MN||BC$, и в $MBCL$ и $AMLD$ можно вписать окружности радиусов r_1 и r_2. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O.

   Пусть $BC = x$, $MN = y$, $AD = z$.

   Заметим, что $\triangle MOL \sim \triangle AOD$.

   Тогда $\dfrac{y}{z} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{OM}{OA}$ (в подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей относятся как соответствующие стороны). Далее
$$BM = 2r_1, AM = 2r_2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{MB}{AM} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{OM}{OA} = \frac{OM - BM}{OA - AM}$$



т.е. $\dfrac{y}{z} = \dfrac{OB}{OM}$. Т.к. $\frac{OB}{OM} = \frac{x}{y}$ ($\triangle BOC \sim \triangle MOL$), то $\dfrac{y}{z} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow y^2 = xz$.
Имеем $BM + CL = x + y$, $AM + DL = y + z$. Следовательно,

$$c + d = x + 2y + z = x + 2\sqrt{xz} + z = \left(\sqrt{x} + \sqrt{z}\right)^2, \sqrt{x} + \sqrt{z} = \sqrt{c + d}.$$

Пусть CK — высота трапеции. Тогда $z - x = KD = \sqrt{d^2 - c^2}$, а, значит,

$$\sqrt{z} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{d^2 - x^2}}{\sqrt{c + d}} = \sqrt{d - c} \Rightarrow \sqrt{z} = \frac{\sqrt{d + c} + \sqrt{d - c}}{2},$$

а

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{d + c} - \sqrt{d - c}}{2}.$$

Таким образом, основания трапеции равны

$$\frac{\left(\sqrt{d + c} \pm \sqrt{d - c}\right)^2}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{\left(\sqrt{d + c} \pm \sqrt{d - c}\right)^2}{2}$

4. *Найдите четыре действительных числа x_1, x_2, x_3, x_4, таких, что что каждое, сложенное с произведением остальных, окажется равным двум.*

Решение. Обозначим $x_1x_2x_3x_4 = p$. Тогда наша система уравнений примет вид:

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Случай, когда одно из искомых чисел равно нулю, приводит к противоречию. Действительно, подставив ноль вместо x_1, получим

$$x_2x_3x_4 = 2, x + 2 = x + 3 = x + 4 = 2.$$

Итак, все x_i являются корнями одного и того же квадратного уравнения $x_i^2 - 2x_i + p = 0$. Поэтому среди них может быть только два различных. Рассмотрим три случая.

(а) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, $m + m^2 = 2$. В силу монотонности функции $m + m^2$ имеем только действительное решение $m = 1$.

(б) Три из искомых чисел равны, а четвертое им не равно. Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = m$, $x_4 = n$, $m \neq n$,

$$\begin{cases} m + m^2 n = 2, \\ n + m^3 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $(m-n)(1-m^2) = 0$. Т.к. $m \neq n$, получаем, что $1 - m^2 = 0$. Заметим, что $m \neq 1$, т.к. в противном случае из системы соотношений немедленно следует, что $n = 1$, что противоречит $m \neq n$. Значит, $m = -1$, откуда следует, что $n = 3$. Это дает еще четыре решения.

(в) $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n$, $m \neq n$,

$$\begin{cases} m + mn^2 = 2, \\ n + nm^2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $(m - n)(1 - mn) = 0 \Rightarrow mn = 1$. Тогда $m + n = 2$, $m = n = 1$. Противоречие.

Таким образом, либо $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, либо один из $x_i = 3$, а остальные равны -1.

5. *Для всех значений параметра a решите неравенство*

$$\log_{\sqrt{2a}} (a + 2x - x^2) < 2.$$

Решение. Допустимые значения переменной x задаются системой:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a < -, \\ a > 0, \\ a \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\log_{\sqrt{2a}}\left(a + 2x - x^2\right) < \log_{\sqrt{2a}} 2a \tag{2}$$

и предположим, что $0 < a < \dfrac{1}{2}$. Тогда неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 - 2x + a < 0$ и, таким образом, с учетом первого неравенства системы (1)приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - a < 0, \\ x^2 - 2x + a < 0, \end{cases}$$

которая в силу второго неравенства системы (1) равносильна одному неравенству

$$x^2 - 2x + a < 0,$$

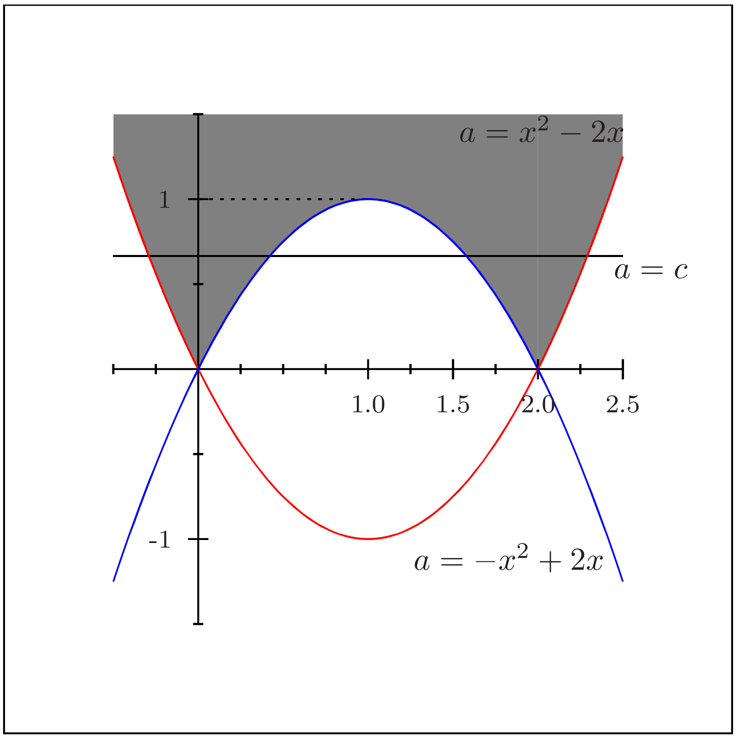
решениями которого являются все x такие, что $x_1 < x < x_2$, где $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ — корни уравнения $a = -x^2 + 2x$.

Пусть $a > \dfrac{1}{2}$. Тогда неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 - 2x + a > 0$. С учетом первого неравенства системы (1) имеем систему

$$\begin{cases} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 - 2x - a < 0. \end{cases}$$

Начертим на плоскости xOa графики функций $a = x^2 - 2x$, $a = -x^2 + 2x$ и прямую $a = c\left(c > \dfrac{1}{2}\right)$. Парам (x, a), удовлетворяющим последней системе, соответствуют точки заштрихованной области.

Обозначая через x_3, x_4 корни уравнения $a = x^2 - 2x$, которые высчисляются по формулам $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+a}$, на основании полученных ранее результатов и непосредственно из рисунка прходим к выводу, что решениями исходного неравенства будут абсциссы x тех точек , которые принадлежат пересечению прямой $a = c\left(c > \dfrac{1}{2}\right)$ и заштрихованной области. На основании этого выписываем



Ответ.

если $a \leqslant 0$ и $a = \dfrac{1}{2}$,	то решений нет;
если $0 < a < \dfrac{1}{2}$,	то $x_1 < x < x_2$;
если $\dfrac{1}{2} < a \leqslant 1$,	то $x_3 < x < x_1$, $\quad x_2 < x < x_4$;
если $a > 1$,	то $x_3 < x < x_4$;
где $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$,	$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+a}$.