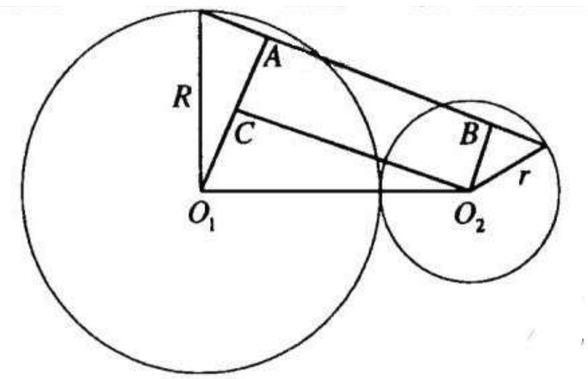
10 класс
Вариант 1
Решения

1. *Доказать, что для любого целого неотрицательного n выражение $3^{6n}-2^{6n}$ делится на 35.*

   Решение. Действительно, для любых целых неотрицательных m и любых чисел a и b
   $$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$
   В частности, для четных $m = 2k$
   $$a^{2k} - b^{2k} = (a^2-b^2)(a^{2(k-1)} + a^{2(k-2)}b^2 + \ldots + a^2b^{2(k-2)} + b^{2(k-1)}).$$
   А значит, разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований (т.к. на сумму оснований делится a^2-b^2). Тогда $3^{6n}-2^{6n} = 27^{2n} - 8^{2n}$ делится на $27+8=35$. Что и требовалось доказать.

2. *К двум внешне касающимся окружностям радиусов R и r построена секущая так, что окружности отсекают на ней три равных отрезка. Найдите длины этих отрезков.*

   Решение. Пусть искомая длина равна $2x$. Тогда $AB = 4x$, $AO_1 = \sqrt{R^2-x^2}$, $BO_2 = \sqrt{r^2-x^2}$. Проведем $O_2C || AB$. В $\triangle O_1O_2C$



$$O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2C^2} \Rightarrow \sqrt{R^2-x^2} - \sqrt{r^2-x^2} = \sqrt{(R+r)^2 - 16x^2}. \qquad (1)$$

Умножив обе части равенства (3) на $\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}$, получаем

$$R^2-r^2=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}\left(\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}=\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}. \qquad (2)$$

Складывая (3) с (2), получаем

$$2\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{(R+r)^2-16x^2}+\frac{R^2-r^2}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{(R+r)^2-16x^2+R^2-r^2}{\sqrt{(r+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R^2+Rr-8x^2)}{\sqrt{(R+r)^2-16x^2}}=\frac{2(R(R+r)-8x^2)}{\sqrt{(R=r)^2-16x^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{(R+r)^2-16x^2}=R(R+r)-8x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(R^2-x^2)\left((R+r)^2-16x^2\right)=\left(R(R+r)-8x^2\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow R^2(R+r)^2-16R^2x^2-x^2(R+r)^2+16x^4=R^2(R+r)^2-16R(R+r)x^2+64x^4.$$

Так как $x\neq 0$, то приходим к уравнению $48x^2=14Rr-R^2-r^2$, откуда $x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. Искомая же длина составляет $2x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$.

Ответ. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$

3. *Докажите, что*

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Умножим и разделим выражение в левой части доказываемого тождества на $2\cos\frac{\pi}{14}$, что не равно 0. Применим после этого в числителе формулу

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y).$$

Получим

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}}=\frac{1}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

4. *На шахматной доске 8×8 клеток расставлено 8 ладей так, что ни одна из них не бьёт другую. Пробегая мимо доски Витя заметил три ладьи стоящие на белых полях. Докажите, что есть еще по крайней мере одна ладья, тоже стоящая на белом поле.*

   Решение. Пронумеруем горизонтали и вертикали числами от 1 до 8 снизу вверх и слева направо. Заметим, что сумма индексов любой черной клетки четна, а любой белой — нечетна. На всех горизонталях и всех вертикалях стоит ровно по одной ладье. Поэтому сумма всех индексов клеток, на которых стоят ладьи должна быть четной (точнее, она равна $8\cdot 9=72$). Если бы на доске стояло только три ладьи на белых клетках, а остальные на черных, это бы означало, что сумма индексов всех клеток, на которых расположились ладьи, оказалась нечетной, что противоречит выше сказанному. Значит, есть еще как минимум одна ладья на белой клетке.

5. *При каких целых отрицательных n функция f, заданная равенством*

$$f(x)=\cos 7x\cdot\sin\frac{25x}{n^2}$$

   является периодической функцией с периодом $T=7\pi$?

   Решение. По определению периода при любом значении x должно выполняться равенство

$$\cos 7(x+7\pi)\cdot\sin\frac{25}{n^2}(x+7\pi)=\cos 7x\cdot\sin\frac{25x}{n^2}. \qquad (3)$$

Значит, оно должно выполняться и при $x=0$. В этом случае приходим к уравенению

$$\cos 49\pi\cdot\sin\frac{175\pi}{n^2}=0.$$

Учитывая, что $\cos 49\pi \neq 0$ при целых отрицательных n, приходим к выводу, что выполняется равенство

$$\sin\frac{175\pi}{n^2} = 0,$$

что выполняется только при $\dfrac{175}{n^2} = k$, где k — целое число. Заметим, что $175 = 5^2 \cdot 7$, а, следовательно, среди делителей числа 175 есть только два квадрата целых чисел: квадраты чисел 1 и 5. Но нас интересуют только целые отрицательные значения n. Значит, $n \in \{-1, -5\}$.

Подствляя эти значения в уравнение (3), убеждаемся, что в обоих случаях получается тождество.

Ответ. $n = -1, \quad n = -5$