Математика 8–9 класс

Задание 1. (20 баллов)

Даны шесть карандашей в виде одинаковых прямых круговых цилиндров. Расположите их в пространстве так, чтобы каждый карандаш имел общую граничную точку с любым другим карандашом.

Решение.

Выделим в пространстве горизонтальную плоскость и поставим на неё вертикально три цилиндра так, чтобы они касались друг друга (очевидно, что центры окружностей оснований образуют равносторонний треугольник со стороной равной диаметру карандашей). Разместим еще три карандаша симметрично снизу от этой плоскости, чтобы их верхние основания совпали с основаниями первых трех карандашей. Построение искомое.

Задание 2. (20 баллов)

Найдите наибольшее возможное значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

Решение.

Пусть $N = \overline{abc}$, где a, b, c — цифры числа. Ясно, что для «круглых» чисел $N = 100, 200, \ldots, 900$ имеем $\frac{N}{a+b+c} = 100$. Далее, если число N — не круглое, то $b + c > 0$ и $a + b + c \geq a + 1$, а т.к. старшая цифра числа N равна a, то $N < (a + 1) \cdot 100$ и

$$\frac{N}{a+b+c} < \frac{(a+1)\cdot 100}{a+1} = 100.$$

Таким образом, *наибольшее значение рассматриваемого отношения равно* 100. *Достигается это значение лишь для «круглых» чисел.*

Задание 3. (20 баллов)

В памяти суперкомпьютера находится строка чисел, бесконечная в обе стороны. В начальный момент одно число строки равно единице, а все остальные нули. За один шаг суперкомпьютер прибавляет к каждому из чисел строки сумму обоих соседних с ним чисел (все прибавления происходят одновременно). Получается такая последовательность строк:

$$\begin{array}{lcccccccccccc}
\text{Шаг 0:} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\text{Шаг 1:} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\text{Шаг 2:} & \ldots & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
\text{Шаг 3:} & \ldots & 0 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 0 & \ldots \\
\ldots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Правда ли, что начиная со второго шага в каждой строке встретится хотя бы одно ненулевое четное число? Ответ обосновать.

Решение.

Выпишем в таблицу четыре крайних слева ненулевых числа в каждой строке, начиная с третьей, и поставим на месте четного числа букву *ч*, а на месте нечетного числа — букву *н*. Первая буква всегда *н*, так как получается сложением предыдущего крайнего числа (единицы) с нулем. Во втором столбце *н* и *ч* чередуются, так как в каждой строке число равно сумме предыдущего с единицей из первого столбца . В третьем и четвертом столбцах числа получаются сложением чисела из предыдущей строки и двух соседей слева. Получится таблица :

Шаг 2:	*н*	*ч*	*н*	*ч*
Шаг 3:	*н*	*н*	*ч*	*н*
Шаг 4:	*н*	*ч*	*ч*	*ч*
Шаг 5:	*н*	*н*	*н*	*ч*
Шаг 6:	*н*	*ч*	*н*	*ч*

...

Мы видим, что пятая строка полосы совпала с первой. С другой стороны, четность или нечетность чисел каждой строки зависит только от четности или нечетности чисел предыдущей строки. Следовательно, в нашей таблице строки будут периодически повторяться через каждые четыре строки. Т.к. в каждой из четырех первых строк полосы имеется ненулевое четное число, то отсюда вытекает, что оно будет и во всех последующих строках.

Задание 4. (20 баллов)

Можно ли выражение $1 + x^{2016}y^{2016}$ представить в виде произведения $f(x) \cdot g(y)$? Ответ обосновать.

Решение.

Положим в равенстве $x^{2016}y^{2016} + 1 = f(x) \cdot g(y)$ переменную x равной 0. Тогда $1 = f(0)g(y)$, т.е. $g(y)$ — некоторая константа, равная $\frac{1}{f(0)}$при всех значениях y. Аналогично, при $y = 0$ получим, что $f(x) = \frac{1}{g(0)}$ при всех значениях x. Очевидно, что $f(x)g(y) = \frac{1}{f(0)g(0)} \neq x^{2016}y^{2016} + 1$, так как выражение слева постоянно, а справа меняется в зависимости от значений x и y, то есть, такое представление невозможно.

Задание 5. (20 баллов)

Докажите, что если a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника, то радиус окружности, вписанной в этот треугольник, можно найти по формуле

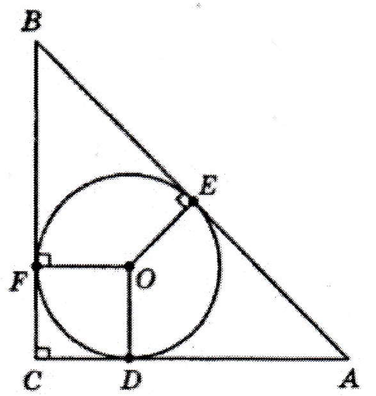
$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Решение.

`I способ.` Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r.$$

Следовательно,
$$r = \frac{ab}{a+b+c}. \tag{1}$$
По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ или, что то же самое,
$$(a+b)^2 - 2ab = c^2.$$
Значит, $2ab = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$. Тогда (1) примет вид
$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2},$$
что и требовалось доказать.



`II способ.` Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD, OE и OF в точки касания. Тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$. Следовательно, $CFOD$ — квадрат. Тогда $OD = OF = OE = r$; $AD = AC - CD = b - r$; $BF = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.

Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т.е.
$$c = (b-r) + (a-r),$$
откуда
$$r = \frac{1}{2}(a+b-c),$$
что и требовалось доказать.