Олимпиада МИРЭА по математике для 9-10 классов 2015-2016

основной тур

1. Лейтенант занимается с новобранцами строевой подготовкой. Придя на плац, он увидел, что все новобранцы построены в несколько рядов, причем число бойцов в каждом ряду одинаково и на 5 больше, чем число рядов. После окончания занятий лейтенант решил опять построить новобранцев, но не мог вспомнить, сколько было рядов. Тогда он приказал строиться так, чтобы рядов было столько, сколько ему лет. Оказалось, что во всех рядах бойцов опять поровну, но в каждом ряду их на 4 больше, чем при первоначальном способе построения. Сколько лет лейтенанту?

Решение. Пусть n – число рядов при первоначальном способе построения. Тогда в каждом ряду первоначально было $n+5$ бойцов, а при втором способе построения в каждом ряду стало $n+9$ бойцов. Обозначим возраст лейтенанта за x. Тогда, в соответствии с условием задачи, получаем уравнение

$$x=\frac{n\left(n+5\right)}{n+9}\Rightarrow x=n-4+\frac{36}{n+9}.$$

Число $n+9$ должно быть делителем числа 36. Учитывая то, что по смыслу задачи n и x – натуральные числа, получаем следующие решения

$$\begin{cases} n+9=12 \\ x=2 \end{cases}, \begin{cases} n+9=18 \\ x=7 \end{cases}, \begin{cases} n+9=36 \\ x=24 \end{cases}$$

Из соображений здравого смысла получаем, что подходит последний ответ, хотя и два других ответа признавались правильными.

Ответ: 24 года.

2. Пусть I – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Доказать, что центр окружности, описанной около треугольника AIC, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Опишем около ΔABC окружность. Так как I – центр вписанной в треугольник ABC окружности, то BI – биссектриса угла ABC. Продолжим BI до повторного пересечения с описанной окружностью в точке K, и покажем, что точка K является центром окружности, описанной около треугольника AIC. Для этого достаточно показать, что $AK=KC=KI$ (этот факт известен как теорема о трезубце).

Первое равенство очевидно следует из того, что BI – биссектриса угла ABC.

Для доказательства равенства $KC=KI$ соединим точки C и I. Получим, что CI – биссектриса угла ACB.

Пусть $\angle ABC=2\beta$, $\angle ACB=2\gamma$. Тогда $\angle KBC=\angle ACB=\beta$, $\angle BCI=\angle ACI=\gamma$ и $\angle KCI=\beta+\gamma$. Но и $\angle KIC=\beta+\gamma$ (как внешний угол ΔBIC). Таким образом ΔKIC – равнобедренный и $KC=KI$.

3. Среди всех шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания (слева – направо), рассматриваются числа, содержащие цифру 1 и не содержащие этой цифры. Каких чисел больше и на сколько?

Решение. Сначала подсчитаем сколько вообще существует шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания. Для этого выпишем подряд все цифры от 1 до 9. Для получения шестизначных чисел рассматриваемого типа надо зачеркнуть произ-

вольные три цифры. Таким образом количество шестизначных натуральных чисел, цифры которых расположены в порядке возрастания, равно $C_9^3 = 84$.

Теперь подсчитаем сколько среди этих чисел содержат 1. Для этого фиксируем в нашем ряду цифр единицу и вычеркиваем любые три цифры из оставшихся 8-ми. Получаем, что количество чисел, содержащих единицу, равно $C_8^3 = 56$. В результате получаем, что чисел содержащих единицу на 28 больше чисел, не содержащих 1.

Ответ: чисел, содержащих единицу на 28 больше.

4. Найти площадь фигуры, координаты $(x\,;y)$ точек которой, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x|+|y|\ge 1 \\ (|x|-1)^2+(|y|-1)^2\le 1 \end{cases}.$$

Решение. Область, задаваемая первым неравенством системы – это вся плоскость без квадрата с вершинами в точках $(1;0),(0;1),(-1;0),(0;-1)$, а вторым – круг с центром в начале координат и радиусом 1. Таким образом, искомая площадь равна разности между площадью круга и площадью квадрата.

Ответ: $\pi-2$.

5. Решить в целых числах уравнение $x^2-xy-6y^2+2x+19y=18$.

Перепишем уравнение в виде

$$x^2-x(y-2)-6y^2+19y+k=18+k$$

и будем подбирать число k так, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в левой части уравнения оказался полным квадратом. Имеем

$$D=25y^2-80y+4-4k\,.$$

Получаем, что для получения полного квадрата нужно, чтобы $k=-15$. Теперь у нас есть возможность разложить на множители левую часть нашего уравнения

$$x_{1,2}=\frac{y-2\pm(5y-8)}{2}\Rightarrow (x-3y+5)(x+2y-3)=3\,.$$

Сомножители в левой части являются целыми числами поэтому получаем четыре системы

$$\begin{cases} x-3y+5=1 \\ x+2y-3=3 \end{cases},\ \begin{cases} x-3y+5=-1 \\ x+2y-3=-3 \end{cases},\ \begin{cases} x-3y+5=3 \\ x+2y-3=1 \end{cases},\ \begin{cases} x-3y+5=-3 \\ x+2y-3=-1 \end{cases}.$$

Решаем эти системы и получаем ответ.

Ответ: $(2;2),(-2;2)$.

6. Найти наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{x^2-8x+25}+\sqrt{x^2-4x+13}$.

Выделив полный квадрат под каждым из радикалов, приводим функцию к виду

$$f(x)=\sqrt{(x-4)^2+9}+\sqrt{(x-2)^2+9}\,.$$

Для этого выражения можно предложить геометрическую интерпретацию. Рассмотрим каждый из радикалов как расстояние от точки с координатами $(x\,;0)$ до точки с координатами $(4;3)$ в случае первого радикала и до точки с координатами $(2;-3)$ в случае второго радикала. Таким образом значение функции равно длине ломаной линии соединяющей три указанные

выше точки. Поскольку эти точки можно расположить на одной прямой, то минимальное значение функции и будет длина отрезка, соединяющего точки с координатами $(4;3)$ и $(2;-3)$ /

Ответ: $2\sqrt{10}$.

7. При каких значениях параметра a минимальное значение функции

$$f(x)=|7x-3a+8|+|5x+4a-6|+|x-a-8|-24$$

будет наименьшим.

Решение. Если $7x>3a-8$, то при любом способе раскрытия оставшихся двух модулей коэффициент при x будет положительным, то есть функция будет возрастающей. Если же $7x<3a-8$, то при любом способе раскрытия модулей коэффициент при x будет отрицательным и функция будет убывающей. Таким образом, $x=\frac{3a-8}{7}$ является точкой глобального минимума и

$$f_{\min}(a)=\left|5\cdot\frac{3a-8}{7}+4a-6\right|+\left|\frac{3a-8}{7}-a-8\right|-24=\frac{|43a-82|+|4a-65|}{7}-24.$$

Проводим рассуждения аналогичные приведенным выше и получаем, наименьшее значение этой функции достигается при $a=\frac{82}{43}$.

Ответ: $a=\frac{82}{43}$.

8. Решить уравнение $\sqrt{15x^2-52x+45}\cdot\left(3-\sqrt{5x-9}-\sqrt{3x-5}\right)=1$.

Решение. Перепишем наше уравнение в виде

$$\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{5x-9}\cdot\left(3-\sqrt{5x-9}-\sqrt{3x-5}\right)=1.$$

Подобное преобразование возможно в силу того, что решения исходного уравнения существует только при $x>\frac{9}{5}$. Обозначим $\sqrt{3x-5}=a>0$, $\sqrt{5x-9}=b>0$. Имеем

$$a+b+\frac{1}{ab}=3.$$

Применим к левой части неравенство Коши

$$a+b+\frac{1}{ab}\geq 3\sqrt[3]{a\cdot b\cdot\frac{1}{ab}}=3.$$

Таким образом для решеня нашего уравнения необходимо, чтобы неравенство Коши выполнялось как равенство и $a=b=\frac{1}{ab}$.

Ответ: 2.