

Олимпиада школьников по программированию «ТехноКубок» 2021

Третий отборочный тур

Разбор задач

А. Игровой чат

ограничение по времени на тест: 1 секунда
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Вы должны посчитать количество круглых скобок в конце строки, пусть их x . Тогда сообщение плохое, если $x > \frac{n}{2}$. Обратите внимание, что вы должны делить n на 2 без округления. Или вместо этого вы можете сравнить $2 \cdot x$ и n . Сообщение плохое, если $2 \cdot x > n$.

В. Справедливые числа

ограничение по времени на тест: 2 секунды
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Давайте назовём число супер-справедливым, если оно делится на каждую из цифр 1..9. Справедливо заметить, что супер-справедливые числа делятся и на НОК(1..9), равный 2520. Справедливые числа встречаются не реже супер-справедливых, значит можно увеличивать исходное n на единичку, пока оно не станет справедливым. Перебирать, как мы выяснили, придется немного, а проверять число на справедливость будем, отсоединяя по одной цифре.

С. Ладейное поле

ограничение по времени на тест: 1 секунда
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Рассмотрим ладьи как ребра в графе. Позиция (x, y) будет соответствовать ребру $(x \rightarrow y)$. Из условия следует, что из каждой вершины выходит не более одного ребра и входит не более одного ребра. Граф распадается на циклы, пути и петли (ребра вида $v \rightarrow v$).

Что происходит с графом, когда мы передвигаем ладью? Ребро меняет ровно один из концов. Такими операциями мы должны превратить все ребра в петли, при этом должно выполняться ограничение на кол-во ребер входящих и выходящих из вершины. Путь довольно легко превратить в петли, просто начнем с какого-то конца. Цикл же надо сначала превратить в путь, это всегда возможно. Мы потратили только один лишний ход, не сложно убедиться, что это оптимально.

Ответ равен кол-во ладей минус кол-во петель плюс кол-во циклов.

Д. Грайм Зоопарк

ограничение по времени на тест: 1 секунда
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Рассмотрим два соседних знака вопроса на позициях l и r соответственно ($l < r$). Пусть на интервале (l, r) находится c_0 нулей и c_1 единиц. В случае $s_l = 0, s_r = 1$ будет написано $(c_1 + 1) \cdot x + c_0 \cdot x + out = (c_0 + c_1 + 1) \cdot x + out = (r - l) \cdot x + out$ комментариев, где out - число комментариев за подпоследовательности, хотя бы один элемент которых находится вне $[l, r]$. В случае $s_l = 1, s_r = 0$ получим $(c_0 + 1) \cdot y + c_1 \cdot y + out = (c_0 + c_1 + 1) \cdot y + out = (r - l) \cdot y + out$ комментариев. Вычтем из первого второе, получим $(r - l) \cdot (x - y)$. Это значит следующее: если $x \geq y$, всегда выгодно менять 01 на 10, то есть существует такое оптимальное замещение ? на 0 и 1, что первые несколько ? заменяются на 1, а оставшиеся на 0. В случае $x < y$ аналогично, будет какой-то префикс 0, потом 1. За $\mathcal{O}(n)$ написать это можно, насчитав, сколько на каждом префиксе ноликов и единичек, и перебирая границу разделения.

Е. Ромские цифры

ограничение по времени на тест: 1 секунда
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Сперва заметим, что последняя цифра обязательно должна быть взята со знаком плюс, а предпоследняя — со знаком минус. Оказывается, все остальные цифры могут быть взяты с любым знаком. Докажем это.

Пусть мы хотим получить маску $- - - + + - - + + - - - +$. Все минусы слева можно получить, просто расщепляя по одному символу. Осталась маска $+ + - - + + - - +$, разобьем ее следующим образом: $(+ + - - + + -)(- - +)$. Т.е. оставляем только один минус в последнем отрезке из подряд идущих минусов. Поменяем знаки: $(- - + + - - +)(- - +)$. Свели к задаче меньше. Действуя подобным образом, мы в конце придем к строкам вида $+$.

Теперь задача свелась к тому, можно ли набрать число X используя первые $n - 2$ букв. Так как веса предметов - степени двойки, их можно набирать жадно.

Бонус. Сконструируйте бинарное дерево, соответствующее маске, за линию.

Ф. Тернистый путь

ограничение по времени на тест: 2 секунды
ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт
ввод: стандартный ввод
вывод: стандартный вывод

Задача сводится к тому, что надо из массива целых чисел, используя операции объединения и разъединения, получить массив из троек и остатка (2 или 2+2 или 4). Помогает считать, что все операции объединения делаются до операций разъединения.

Чтобы решить задачу, можно перебрать из каких элементов массива вычитается остаток, тогда остальные операции выполняются жадно.

Бонус. Дано k . Надо получить массив из k , используя эти операции. Считаем, что сумма элементов массива делится на k без остатка. Это можно представить как минимальное покрытие гиперграфа ребрами с весами = (кол-во вершин - 1) + (сумма элементов / k - 1). Существует ли полиномиальное решение (k является параметром)?

Г. Нет игры - нет жизни

ограничение по времени на тест: 2 секунды

ограничение по памяти на тест: 256 мегабайт

ввод: стандартный ввод

вывод: стандартный вывод

Кто выиграл при данной конфигурации фишек зависит только от ксора значений Гранди вершин по всем находящимся на доске фишкам. Заметим, что каждое значение Гранди $\leq \sqrt{m}$, а значит их ксор не превосходит 512. Пусть P_v это вероятность победы Алисы, если текущее состояние имеет ксор v .

$$P_v = \sum P_{to} \cdot \text{prob}(v \rightarrow to) + [v \neq 0] \cdot \frac{1}{n+1}$$

Второе слагаемое - мы получили $n + 1$ и процесс завершился. Понятно, что $\text{prob}(v \rightarrow to) = \frac{\text{cnt}[v \Phi to]}{n+1}$, где $\text{cnt}[x]$ это количество вершин со значением Гранди равным x . Теперь у нас есть система из 512 уравнений с неизвестными P_v , можем решить её методом Гаусса. Ответ в P_0 . Доказательство того, что Гаусс не сломается по пути, оставим читателю в качестве упражнения.

Также существует решение, использующее преобразование Адамара.