Заключительный этап

Индивидуальный предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача III.1.1.1. Как снег на голову (30 баллов)

Каждый год в умном городе выпадает огромное количество снега, который необходимо убирать. Традиционный прогноз погоды — вещь, конечно, полезная, но высокую точность способен предоставить только в краткосрочной перспективе. А подготовка к уборке снега требует долгого и тщательного планирования. Поэтому для нужд города было решено разработать систему для заблаговременного информирования о погодных условиях. Суть системы заключается в том, чтобы вычислить даты наибольших нагрузок на компании, осуществляющие уборку снега.

Было замечено, что наибольшая нагрузка приходится на определенный промежуток времени. Этот промежуток времени состоит из одного или нескольких подряд идущих дней и всегда обладает наибольшей суммой прироста осадков за эти дни. Стоит отметить, что прирост осадков в конкретный день может быть даже отрицательным (ведь снег имеет свойство таять, да и местные жители иногда самостоятельно чистят снег).

Вам требуется написать программу, которая будет выводить индексы (индекс первого дня принимается равным 0) первого и последнего дня такого промежутка для введенных данных. Если таких промежутков несколько, то следует вывести тот промежуток, который начинается позже.

Формат входных данных

В первой строке находится число N — количество дней, среди которых нужно найти промежуток времени с наибольшей суммой прироста осадков ($1 \leqslant N \leqslant 10^7$). Во второй строке находятся N чисел, обозначающих прирост осадков в каждый конкретный день. Каждое число находится в диапазоне от -100 до 100 включительно.

Формат выходных данных

Два числа, разделенных пробелом — индексы первого и последнего дня искомого промежутка времени. Если таких промежутков несколько, то следует вывести тот промежуток, который начинается позже всех остальных. Если и таких промежутков несколько, то следует вывести наибольший.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`8` `-2 2 3 -100 1 1 1 1`

Стандартный вывод
`1 2`

Пример №2

Стандартный ввод
`10` `1 2 3 -10 3 2 1 -9 3 3`

Стандартный вывод
`8 9`

Пример №3

Стандартный ввод
`10` `-7 2 8 -1 5 1 -9 5 -6 2`

Стандартный вывод
`1 5`

Решение

Задача сводится к поиску подмассива с максимальной суммой. Однако есть ограничение на выбор подмассива среди всех вариантов с одинаковой суммой. В условии сказано: «Если таких промежутков несколько, то следует вывести тот промежуток, который начинается позже всех остальных. Если и таких промежутков несколько, то следует вывести наибольший». Здесь важно правильно понять очередность условий. Далее будет представлен пример, объясняющий данную формулировку:

Допустим, у нас есть входная последовательность длиной в 8 чисел.

1 2 3 -100 5 1 0 0

1. Найдем все подотрезки с маскимальной суммой (для данного примера макимальная сумма подотрезка равна 6): (1 2 3), (5 1), (5 1 0), (5 1 0 0).
2. Среди них оставим только те, которые начинаются позже остальных. Такое бывает, только если в подмассивах есть нули в конце: (5 1), (5 1 0), (5 1 0 0).
3. Из них выбираем наибольший, то есть самый продолжительный: (5 1 0 0).
4. Записываем индексы границ этого массива: «4 7». Это и будет ответ на задачу.

Кроме того, важно учесть другие частные случаи, например, когда все входные числа отрицательные. Или когда массив состоит из 1 элемента.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++ с алгоритмической сложностью $O(N)$.

```cpp
#include <iostream>

int main() {
    int n;
    std::cin >> n;

    int max_sum = 0;
    int max_sum_beg = 0;
    int max_sum_end = 0;
    int cur_sum = 0;
    int last_minus_pos = -1;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int input;
        std::cin >> input;
        cur_sum += input;

        if (!i) {
            max_sum = input; // Store correct value on first iteration.
        }
        if (cur_sum >= max_sum) {
            max_sum = cur_sum;
            max_sum_beg = last_minus_pos + 1;
            max_sum_end = i;
        }
        if (cur_sum < 0) {
            cur_sum = 0;
            last_minus_pos = i;
        }
    }
    std::cout << max_sum_beg << " " << max_sum_end;
}
```

Задача III.1.1.2. Фармакод (30 баллов)

Практически на каждой упаковке (будь то коробка, тюбик или бутылка) есть штрихкод. Штрихкоды бывают разных типов и предназначены для разных целей. Некоторые содержат информацию об идентификаторе товара (например, EAN), а некоторые могут хранить в себе тексты, числа или ссылки на страницы в интернете (как, например, QR-код — один из представителей двухмерных штрихкодов). Но их всех объединяет то, что они представляют информацию в удобном для чтения электронными устройствами виде.

В фармацевтической промышленности широко используется специальный штрихкод — фармакод. В отличие от «старших братьев», он не способен хранить большой объем информации, не содержит механизмов для исправления ошибок, зато предельно прост в реализации. Фармакод может хранить в себе только одно число от 1 до 131070. Этого вполне хватает для системы контроля упаковок.

Алгоритм кодирования (на примере числа 91)

1. К числу, которое требуется закодировать, прибавляется единица. $(91 + 1 = 92)$.
2. Полученное число переводится в двоичный формат. $(92 \rightarrow 1011100)$.

3. Ведущая единица удаляется из записи числа. (1011100 → 011100).
4. Для полученной строке все символы 0 заменяются на узкие полосы, а единицы – на широкие.

Алгоритм декодирования (на примере числа 91).

1. Широкие полосы заменяются на единицы, а узкие — на нули.
2. К полученной строке слева дописывается единица. (011100 → 1011100).
3. Представленное двоичное число переводится в десятичную систему счисления (1011100 → 92).
4. Из полученного числа вычитается единица. ($92 - 1 = 91$).

Вам предлагается написать программу, которая может кодировать число в фармакод и, наоборот, декодировать фармакод в число.

Формат входных данных

В первой строке находится одно слово, которое определяет тип команды, которую нужно выполнить:

encode — означает, что потребуется закодировать число в фармакод. Тогда в следующей строке будет находиться одно любое число в диапазоне от 1 до 131 070 включительно.

decode — означает, что потребуется декодировать фармакод в число. Тогда в следующей строке будет находиться ширина изображения* фармакода в символах, а в следующих 5 строках будет находиться само изображение* фармакода.

Формат выходных данных

Если на вход была покана команда encode, то следует вывести 5 строк с изображением* закодированного фармакода для введенного числа.

Если на вход была покана команда decode, то следует вывести число, полученное после декодирования полученного на вход изображения* фармакода.

**** Формат изображения фармакода***

Под изображением фармакода следует принимать 5 одинаковых строк, состоящих из символов «#» и «.». Широкие полосы выглядят как 3 символа «#» подряд («###»), а узкие — как одиночный символ «#». Полосы отделены друг от друга при помощи одиночных символов «.». Изображение должно начинаться сразу с полос, без дополнительных полей по краям. Таким образом, для предложенного числа 91 изображение фармакода будет выглядеть так:

```
#.###.###.###.#.#
#.###.###.###.#.#
#.###.###.###.#.#
#.###.###.###.#.#
#.###.###.###.#.#
```

Для лучшего понимания ввода-вывода следует ознакомиться с примерами входных и выходных данных.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
encode 123

Стандартный вывод
###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.#

Пример №2

Стандартный ввод
decode 19 ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.# ###.###.###.###.#.#

Стандартный вывод
123

Пример №2

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <string>
#include <bitset>
#include <iostream>

void decode() {
    int width = 0;
    std::cin >> width;
    std::string line;
    std::cin >> line;
    line.push_back('.');
    std::string binary = "";
    int line_width = 0;
    for (int i = 0; i < width + 1; ++i) {
        if (line[i] == '.') {
            binary += (3 == line_width) ? "1" : "0";
            line_width = 0;
```

```
        } else
            ++line_width;
    }
    binary = "1" + binary;
    const int num = std::stoi(binary, nullptr, 2) - 1;
    std::cout << num;
}

void encode() {
    int num = 0;
    std::cin >> num;
    ++num;
    const std::string binary = std::bitset<32>(num).to_string();
    std::string barcode_string = "";
    for (size_t pos = binary.find('1') + 1; pos < binary.size(); ++pos) {
        barcode_string += ('1' == binary[pos]) ? "###." : "#.";
    }
    barcode_string.pop_back();
    for (int i = 0; i < 5; ++i)
        std::cout << barcode_string << std::endl;
}

int main() {
    std::string command = "";
    std::cin >> command;
    if ("encode" == command)
        encode();
    else
        decode();
}
```

Задача III.1.1.3. Через тернии к звездам (40 баллов)

Для потребностей современного города требуется вырабатывать много электроэнергии. При этом крайне желательно, чтобы выработка энергии была экологичной и не вредила окружающей среде. Поэтому в Верхнем Квадратовске было решено поставить комплекс солнечных панелей. Для размещения панелей разрешили взять любой участок на предложенной карте местности, но при обязательном выполнении двух условий:

1. Для размещения панелей нельзя срубать деревья. Потому что вредить природе, чтобы потом ее беречь — занятие нелогичное.
2. Комплекс панелей должен быть в форме квадрата, чтобы не нарушать архитектурный стиль города.

Карта местности представлена в виде таблицы. Каждый символ обозначает площадь размером 1 на 1 квадратный метр. «#» обозначает дерево, а «.» — свободную для постройки местность.

Вам требуется написать программу, которая будет находить площадь наибольшего возможного комплекса панелей в квадратных метрах.

Формат входных данных

В первой строке представлено два числа — W и H, которые обозначают ширину и высоту карты соответственно. ($1 \leqslant W, H \leqslant 10^4$) В следующих H строках содержится по W символов, где каждый из символов представлен «#» (дерево) или «.» (свободное место).

Формат выходных данных

На выход программа должна предоставить целое число — максимальный возможный размер комплекса в квадратных метрах.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`10 5`
`#...#.....`
`........#.`
`..#.......`
`..........`
`..........`

Стандартный вывод
`16`

Пример №2

Стандартный ввод
`4 4`
`#...`
`#...`
`#...`
`####`

Стандартный вывод
`9`

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <vector>

int main() {
    int w = 0;
    int h = 0;
    std::cin >> w >> h;

    std::vector<std::vector<int> > map(h, std::vector<int>(w, 0));

    int max = 0;
    for (int y = 0; y < h; ++y) {
        for (int x = 0; x < w; ++x) {
```

```
            char c{};
            std::cin >> c;

            if ('.' == c) {
                int& cur = map[y][x];
                if (!x || !y) {
                    cur = 1; // first column / row.
                } else {
                    cur = 1 + std::min(map[y - 1][x],
                              std::min(map[y][x - 1],
                                       map[y - 1][x - 1]));
                }
                max = std::max(max, cur);
            }
        }
    }
    max *= max;

    std::cout << max;
}
```

Физика. 8–9 класс

Задача III.1.2.1. Челнок (30 баллов)

Между пунктами А и Б, находящимися на расстоянии $L = 100$ км друг от друга, проложена прямая дорога. По этой дороге с постоянной скоростью $v = 10$ м/с движется грузовик. Одновременно с тем, как грузовик выдвигается из пункта А, навстречу ему из пункта Б выдвигается робот-челнок.

Челнок движется со скоростью $2v$, доезжает до грузовика, мгновенно разворачивается и возвращается в пункт Б с той же скоростью, снова мгновенно разворачивается и продолжает курсировать между пунктом Б и грузовиком до самого приезда последнего.

Одновременно со стартом этих транспортных средств с площадки на грузовике стартует дрон, движущийся в свою очередь со скоростью $4v$, и начинает курсировать между грузовиком и челноком таким же образом.

1.1. На протяжении какого времени дрон со скоростью $2v$ двигался в том же направлении, что и грузовик?

Решение

Время движения всех трех транспортных средств одинаково и составляет:

$$t = L/v$$

Грузовик все время движется в одном направлении (будем считать его положительным). Дрон меняет направление своего движения множество раз, начав в точке А и закончив в точке Б вместе с грузовиком. Таким образом, общее его перемещение составило L и может быть выражено через скорость как:

$$L = 4v\tau - 4v(t - \tau),$$

где τ — искомое время движения дрона в положительном направлении. Преобразуя это выражение, получим:

$$\tau = \frac{L + 4vt}{8v} = \frac{5L}{8v} = 6250\ \text{с} \approx 1\ \text{ч}\ 44\ \text{мин}.$$

Ответ: 1 ч 44 мин.

Система оценки

1. Найдено общее время движения транспортных средств — 2 балла.
2. Записана связь общего перемещения дрона с временем его движения — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.
5. Если аналогичные результаты получены другим корректным способом — решение также может быть оценено в полный балл.

1.2. На протяжении какого времени все три транспортных средства двигались в одном направлении?

Решение

Способом, аналогичным изложенному в предыдущем пункте, найдем время t_0, в течение которого в одном направлении двигались грузовик и челнок:

$$0 = 2vt_0 - 2v(t - t_0) \Rightarrow t_0 = \frac{L}{2v}$$

Рассмотрим теперь некоторый промежуток времени Δt, на протяжении которого грузовик и челнок двигались в одну сторону. За это время дрон перемещается в положительном направлении на:

$$v\Delta t = 4v\Delta\tau - 4v(\Delta t - \Delta\tau),$$

где $\Delta\tau$ — время, в течение которого он также двигался в положительном направлении. Отсюда:

$$\Delta\tau = \frac{5\Delta t}{8}$$

Время t_0, введенное выше, складывается из всех интервалов Δt, и на каждом таком интервале 5/8 его длительности все три транспортных средства двигались в одну сторону. Таким образом, и в общей сложности все три транспортных средства должны были двигаться 5/8 от времени t_0. Следовательно:

$$\tau = \frac{5}{8}t_0 = \frac{5L}{16v} = 3125\ \text{с} \approx 52\ \text{мин}.$$

Ответ: 52 мин.

Система оценки

1. Найдена время или доля общего времени, в течение которой два транспортных средства двигаются в одну сторону — 2 балла.
2. Найдена доля общего времени, в течение которой другие два транспортных средства двигаются в одну сторону — 2 балла.
3. Тем или иным способом доказано, что доля времени, в течение которого в одну сторону двигаются все три транспортных средства равна произведению предыдущих долей — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

1.3. При разработке челнока новой модели в его программном коде была допущена ошибка. В результате челнок двигается равноускоренно, причем так, что его ускорение a направлено в сторону грузовика, если челнок ближе к пункту Б, чем к грузовику, и в сторону пункта Б в обратном случае. Челнок стартует из пункта Б одновременно со стартом грузовика из пункта А и начинает курсировать по описанным правилам. Найдите значение a, если известно, что грузовик и челнок оказались в пункте Б одновременно, и на этом пути челнок поменял направление своего ускорения ровно один раз.

Решение

Разобьем траекторию челнока на три отрезка: от старта до смены направления ускорения, от смены направления ускорения до остановки и от остановки до прибытия в конечный пункт маршрута. Поскольку ускорение неизменно по модулю, продолжительность первого и второго отрезка одинакова. Обозначим ее t_1. Продолжительность последнего отрезка обозначим t_2. Тогда из закона равноускоренного движения (с учетом того, что челнок начинает и заканчивает движение в одной точке):

$$0 = 2\frac{at_1^2}{2} - \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{2}t_1$$

В то же время общее время пути челнока совпадает с общим временем пути грузовика:

$$t_1 + t_2 = t_1(\sqrt{2}+1) = L/v \Rightarrow t_1 = \frac{L}{v(\sqrt{2}+1)}$$

В момент смены направления ускорения челнок находился ровно на середине отрезка между грузовиком и пунктом Б. Эта точка движется из середины дороги в сторону пункта Б со скоростью $v/2$. Следовательно:

$$\frac{at_1^2}{\cancel{2}} = \frac{L - vt_1}{\cancel{2}}$$

Подставляя найденное выше время t_1, получим:

$$\frac{a\cancel{L^2}}{v^2(\sqrt{2}+1)^{\cancel{2}}} = \cancel{L}\frac{\sqrt{2}+2}{\cancel{\sqrt{2}+1}}$$

Откуда окончательно:

$$a = \frac{v^2}{L}(4+3\sqrt{2}) \approx 8\,\text{мм/с}^2$$

Ответ: $8\,\text{мм/с}^2$.

Система оценки

1. Верно записаны законы равноускоренного движения на каждом участке движения челнока и указано, что суммарное перемещение равно нулю — 3 балла.
2. Записана связь между перемещениями грузовика и челнока к моменту смены направления ускорения — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Задача III.1.2.2. Жидкости (40 баллов)

Автоматизированная система управляет уровнями технологических жидкостей в двигателе беспилотного автомобиля, в том числе топлива, имеющего удельную теплоту сгорания $q = 50\,\text{МДж/кг}$ и плотность $\rho_\text{т} = 900\,\text{кг/м}^3$ и охлаждающей жидкости, имеющей удельную теплоемкость $c = 3{,}3\,\text{кДж/(кг·град)}$ и плотность $\rho_\text{х} = 1100\,\text{кг/м}^3$.

2.1. Чтобы обеспечить движение автомобиля с постоянной скоростью $v = 20$ м/с по ровной горизонтальной дороге, система подает $V = 0{,}05$ л топлива на каждый километр пути. Найдите механическую мощность, вырабатываемую двигателем, если известно, что его КПД $\eta = 40\%$.

Решение

Количество теплоты, выделяющееся при сгорании объема ΔV топлива равно:

$$Q = qm = q\rho_\text{т}\Delta V$$

Механическая мощность двигателя может быть выражена через эту величину:

$$N = \eta\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \eta qm = \eta q\rho_\text{т}\frac{\Delta V}{\Delta t}$$

В свою очередь временной расход топлива может быть связан с путевым:

$$s = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = v\frac{V}{s},$$

где $s = 1$ км. Получим окончательно:

$$N = \frac{\eta q \rho_{\text{т}} v V}{s} = 18\,\text{кВт}$$

Ответ: 18 кВт.

Система оценки

1. Верно записана теплота, выделяющаяся при сгорании топлива, — 2 балла.
2. Верно записана связь механической и тепловой мощности двигателя — 2 балла.
3. Верно записана связь расхода топлива на единицу времени и расстояния — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

2.2. Пятая часть вырабатываемой двигателем в прошлом пункте работы идет на питание электроники и вспомогательных систем автомобиля, и никак не зависит от скорости его движения. Остальная работа идет на преодоление двух видов трения: постоянного трения F_0, возникающего вследствие деформации колес и внутреннего трения в трансмиссии, и вязкого трения о воздух, зависящего от скорости движения по закону $F_1 = \alpha v$, где α — некоторый постоянный коэффициент. Найдите α если известно, что при увеличении скорости движения в $k = 1,5$ раза секундный расход топлива вырастает в $n = 1,8$ раз. Считайте, что КПД двигателя не зависит от скорости.

Решение

Разделим общую мощность двигателя на постоянную часть N_0, по условиям задачи равную пятой доле общей мощности, и остальную — зависящую от скорости часть. Из механики известно, что мощность при движении со скоростью v против внешней силы F равна $N = Fv$. Таким образом:

$$\frac{4}{5}N = (F_0 + \alpha v)v \Rightarrow F_0 = \frac{4N}{5v} - \alpha v$$

Увеличение секундного расхода топлива в n раз при неизменном КПД означает пропорциональное увеличение общей мощности N. Таким образом:

$$nN = \frac{1}{5}N + (F_0 + \alpha k v)kv = \frac{1}{5}N + \left(\frac{4N}{5v} + (k-1)\alpha v\right)kv$$

Из последнего уравнения можно непосредственно выразить α:

$$\alpha = \frac{(n - 0,2 - 0,8k))N}{k(k-1)v^2},$$

Величины N, v подставляются из прошлого пункта.

Ответ: 24 Н·с/м.

Система оценки

1. Верно записана связь мощности и скорости — 2 балла.
2. Записано разложение мощности на постоянную и переменную части — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

2.3. При какой скорости движения автомобиля секундный расход топлива будет минимальным?

Решение

Расход топлива пропорционален общей механической мощности, вырабатываемой двигателем, которая, в свою очередь, складывается из трех частей:

$$N(u) = N_0 + F_0 u + \alpha v^2$$

Это выражение задает параболу, вершина которой находится по формуле $u_{min} = -b/(2a)$.

Но поскольку обе величины F_0, α заведомо положительны, минимум функции расхода топлива лежит в отрицательной области скоростей, то есть реально минимальный расход будет достигаться при нулевой скорости. Заметим, что это неверно для расхода топлива на километр пути, но всегда так для секундного расхода.

Ответ: 0.

Система оценки

1. Получен правильный ответ — 5 баллов.
2. Ответ убедительно обоснован — 5 баллов.

2.4. Система охлаждения двигателя состоит из трубок с охлаждающей жидкостью, которые проходят через нагревающуюся часть двигателя и охлаждающийся окружающим воздухом радиатор. Можно считать, что проходя через радиатор, охлаждающая жидкость приходит в равновесие с окружающей средой, имеющей температуру $\theta = 20°C$. Какой объем жидкости должны каждую секунду перекачивать насосы через поперечное сечение охлаждающей трубки, чтобы ее температура не превышала критического значения $T_{max} = 200°C$ при движении автомобиля со скоростью $v = 20$ м/с?

Решение

Мощность, выделяющаяся в двигателе в виде теплоты, равна разнице общей мощности, выделяющейся при сгорании топлива и механической мощности, расходуемой на движение автомобиля:

$$P_Q = P - N = P(1-\eta) = \frac{(1-\eta)q\rho_{\text{т}}vV}{s}$$

(см. первый пункт).

Проходящая за некоторое время Δt должна нагреваться не более, чем на $T_{max} - \theta$ градусов, то есть получать не более:

$$P_Q \Delta t = c(T_{max} - \theta)\rho_{\text{х}} V'$$

теплоты.

Объединяя полученные уравнения, запишем:

$$\frac{(1-\eta)q\rho_{\text{т}}vV}{s}\Delta t = c(T_{max} - \theta)\rho_{\text{х}} V' \Rightarrow V' = \frac{(1-\eta)q\rho_{\text{т}}vV\Delta t}{sc(T_{max} - \theta)\rho_{\text{х}}}$$

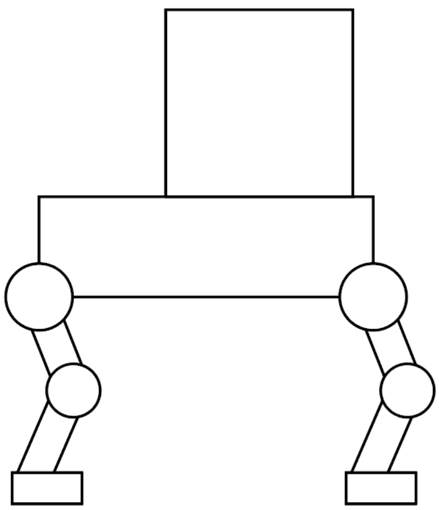
Ответ: $0,04$ л.

Система оценки

1. Верно записана энергия, выделяющаяся при сгорании топлива — 2 балла.
2. Найдена доля этой энергии, идущая на нагрев двигателя — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

Задача III.1.2.3. Балансировка (30 баллов)

Грузовой робот перемещается на четырех ногах. Из-за неравномерного распределения грузов оказалось, что нагрузка на каждую переднюю ногу в k раз больше, чем на соответствующую заднюю, а на каждую правую — в k раз больше, чем на соответствующую левую. При этом общий вес груза, переносимого роботом, в k раз превышает вес самого робота.



3.1. Известно, что вес робота (без груза) в $(4-k)$ раз больше, чем нагрузка на его левую заднюю ногу (с грузом). Найдите k (найденное значение нужно использовать и в следующих пунктах задачи).

Решение

Пусть F — нагрузка на левую заднюю ногу робота. Тогда на левую переднюю и правую заднюю приходятся нагрузки kF, а на правую переднюю — k^2F. Общая нагрузка на ноги робота:

$$F_\Sigma = (1+2k+k^2)F = (1+k)^2F$$

В то же время эта нагрузка складывается из веса робота P и веса груза kP:

$$(1+k)P = (1+k)^2F \Rightarrow P = (1+k)F$$

Но из условий задачи известно также, что:

$$P = (4-k)F \Rightarrow 4-k = 1+k \Rightarrow k = 3/2$$

Ответ: $3/2$.

Система оценки

1. Верно записана связь общей нагрузки на ноги робота и нагрузки на левую заднюю — 3 балла.
2. Верно записана связь общей нагрузки на ноги робота и его веса — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.2. Расстояние между передними и задними ногами робота составляет $l = 90$ см. На какое расстояние необходимо сдвинуть груз вдоль продольной оси (вперед-назад), чтобы устранить эту разбалансировку, если известно, что сам робот полностью симметричен относительно обеих осей?

Решение

Из соображений симметрии очевидно, что если сам робот симметричен, то и груз необходимо сдвинуть в его центр масс для устранения разбалансировки. Обозначим смещение груза от центра масс x.

Общая нагрузка на заднюю ось робота — $F(1+k)$, на переднюю — $kF(1+k)$. Запишем моменты сил, действующих на робота, относительно его центра:

$$kF(1+k)l/2 = kPx + F(1+k)l/2$$

Отсюда:

$$x = \frac{Fl(k-1)(1+k)}{2kP}$$

С учетом найденного в прошлом пункте соотношения $P = (1+k)F$ эта формула может быть выражена проще:

$$x = l\frac{k-1}{2k} = 15\,\text{см}$$

Ответ: 15 см.

Система оценки

1. Установлено, что груз необходимо сдвинуть в центр робота — 2 балла.
2. Записано правило рычага (уравнение моментов) — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.3. Полностью разгибая передние ноги, робот приподнимает точку их крепления к корпусу на $\Delta h = 25$ см, а точку крепления задних ног оставляет неподвижной. При этом ему приходится совершить механическую работу $A = 200$ Дж. Найдите вес робота, считая, что груз оставался жестко закрепленным на спине робота и не скользил по ней при наклоне.

Решение

Если груз не скользил по спине робота, распределение нагрузок оставалось неизменным. Найти вес робота проще всего опираясь непосредственно на определение механической работы, представляющей собой произведение силы на перемещение <u>точки приложения</u> данной силы. Поскольку перемещалась только передняя ось робота, мы можем представить работу как произведение ее перемещения на нагрузку на эту ось:

$$A = k(k+1)F\Delta h \Rightarrow F = \frac{A}{k(k+1)\Delta h}$$

Учитывая снова $P = (1+k)F$, получим:

$$P = (1+k)F = \frac{A}{k\Delta h} \approx 533\,\text{Н}$$

Ответ: 533 Н.

Система оценки

1. Верно записано определение работы или изменение потенциальной энергии робота — 3 балла.

2. Указана связь между нагрузкой на передние ноги робота и его общим весом или изменением потенциальной энергии робота и перемещением его передней оси — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Физика. 10–11 класс

Задача III.1.3.1. Дроны (30 баллов)

На полигоне проводятся испытания роя одинаковых дронов. Все дроны двигаются с постоянной по величине скоростью $v = 5$ м/с. Дроны A и B начинают движение с разных точек полигона, отстоящих друг от друга на расстояние $l = 100$ м. Дрон A запрограммирован двигаться строго в направлении дрона B, а дрон B — под углом 90° к направлению на дрон A (по часовой стрелке).

1.1. Какой путь пройдет каждый из дронов к моменту их встречи?

Решение

Скорость сближения двух материальных точек определяется проекцией их относительной скорости на соединяющий их отрезок. В случае дронов A и B только первый дрон имеет такую проекцию, поэтому скорость сближения дронов будет равна v. Отсюда можно сразу найти время их сближения:

$$t = \frac{l}{v},$$

а из него непосредственно получить окончательный ответ:

$$s = vt = l$$

Ответ: l.

Система оценки

1. Указана связь проекций скорости и скорости сближения — 4 балла.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величин — 3 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

1.2. С какой угловой скоростью начинает вращаться отрезок, соединяющий дроны A и B?

Решение

Угловая скорость любого отрезка одинакова во всех не вращающихся относительно инерциальной системах отсчета, поэтому рассмотрим движение дрона B относительно A. Здесь нас будет интересовать напротив проекция скорости на ось, перпендикулярную отрезку AB. Она равна v, в то время как начальный радиус поворота отрезка составляет l. Применяя базовую формулу связи угловой скорости с линейной, получаем:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{l} = 0,05 \text{ рад/с}$$

Ответ: $0,05$ рад/с.

Система оценки

1. Верно указана проекция скорости, отвечающая за вращательную часть движения, — 3 балла.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 4 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

1.3. Чему равно и куда направлено (относительно отрезка AB) ускорение a центра масс системы дронов в произвольный момент времени t?

Решение

В произвольный момент времени центр масс системы будет участвовать в двух рассмотренных выше движениях: во вращении с угловой скоростью $\omega(t) = v/l(t)$ и поступательном движении со скоростью $v/2$.

Постоянство модулей скоростей обеспечивает равенство нулю тангенциальной части ускорения, следовательно центр масс будет иметь только нормальное ускорение

$$a(t) = \frac{v^2}{l(t)} = \frac{v^2}{l - vt}$$

(скорость сближения дронов была введена в первом пункте).

Нормальное (центростремительное) ускорение точки направлено к оси, вокруг которой она вращается. В данном случае осью вращения является дрон A, движущийся строго вдоль отрезка AB, а скорость вращения направлена перпендикулярно отрезку AB. Следовательно, ускорение будет все время направлено на точку A.

Ответ: $\frac{v^2}{l-vt}$, ускорение вседа направлено на точку A.

Система оценки

1. Показано, что центр масс не имеет тангенциального ускорения — 2 балла.
2. Верно записано выражение для центростремительного ускорения — 2 балла.

3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины (с учетом зависимости l от времени) — 3 балла.
4. Верно указано направление ускорения — 3 балла.

Задача III.1.3.2. Трамвай (30 баллов)

Транспортный электровоз запитывается от напряжения $U_0 = 1$ кВ, подаваемого на рельсы, по которым он двигается в пределах предприятия. При этом в его конструкции используется четыре независимых двигателя, включенных в цепь питания параллельно и развивающих номинальную мощность $N = 50$ кВт каждый.

В некоторый момент возникла необходимость перевезти поезд на новое предприятие, в котором используется транспортная сеть с напряжением U. Для этого в цепь питания электровоза были внесены изменения, изображенные на рисунке III.1.1 (вспомогательная нагрузка $R = 10$ Ом). В результате удалось добиться того, что напряжение на каждом двигателе и мощность каждого двигателя сравнялись с номинальными значениями.

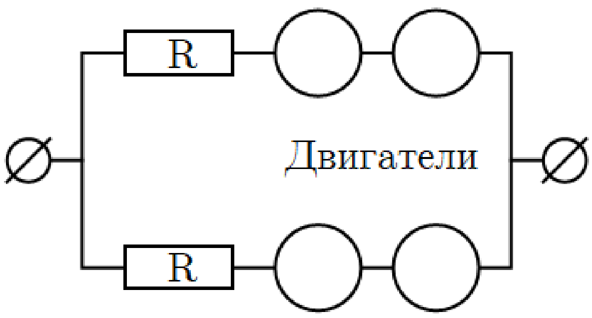


Рис. III.1.1: Цепь питания электровоза

2.1. Чему равно напряжение U?

Решение

Сила тока, протекающая через двигатель при его работе в номинальном режиме, может быть найдена из закона Джоуля – Ленца:

$$N = U_0 I \Rightarrow I = \frac{N}{U_0}$$

Падение напряжения на вспомогательной нагрузке находим из закона Ома, учитывая, что ток через последовательно соединенные элементы одинаков:

$$U_R = IR = \frac{NR}{U_0}$$

Общее напряжение в цепи окончательно находим как сумму падений напряжения в любой ее ветви:

$$U = U_R + 2U_0 = \frac{NR}{U_0} + 2U_0 = 2,5\text{ кВ}$$

Ответ: $2,5$ кВ.

Система оценки

1. Записан закон Джоуля – Ленца — 3 балла.
2. Найдено падение напряжения на дополнительной нагрузке — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

2.2. Какая доля η общей энергии, потребляемой цепью питания электровоза, приходится на его двигатели?

Решение

Рассмотрим одну ветвь цепи, поскольку ветви эквивалентны и общая пропорция будет такой же, как в половине цепи. В каждой из ветвей токи на всех элементах совпадают и равны N/U_0, напряжения также были найдены в прошлом пункте. Общая мощность, выделяющаяся в одной ветви цепи:

$$N_\Sigma = UI = N\frac{U}{U_0}$$

Мощность, выделяющаяся непосредственно на двигателях одной ветви, равна $2N$ из условия их работы в номинальном режиме. Таким образом:

$$\eta = \frac{2N}{N_\Sigma} = 2\frac{U_0}{U} = 80\%$$

Ответ: 80%.

Система оценки

1. Найдена общая мощность, выделяющаяся во всей цепи или в одной ее ветви, — 3 балла.
2. Найдена общая мощность, выделяющаяся на двигателях всей цепи или одной ее ветви, — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

2.3. Какой заряд проходит через цепь питания электровоза за время, за которое поезд массой $m = 500$ т проходит расстояние $l = 1$ м, если коэффициент сопротивления движению (трения качения) равен $k = 0,05$? Поезд движется горизонтально, а КПД двигателей можно считать равным 1.

Решение

Сила, которую приходится преодолевать поезду при таком движении, равна:

$$F = kmg$$

Чтобы пройти против этой силы расстояние l, поезду необходимо совершить работу:

$$A = Fl = kmgl,$$

которая также может быть связана с протекающим через двигатели зарядом при помощи определения напряжения:

$$A = 2qU_0$$

Двойка в этом выражении обусловлена тем, что каждый заряд, проходящий через цепь питания электровоза, проходит через два его двигателя. Таким образом:

$$2qU_0 = kmgl \Rightarrow q = \frac{kmgl}{2U_0} \approx 123\,\text{Кл}$$

Ответ: 123 Кл.

Система оценки

1. Найдена сила, противодействующая движению поезда, — 2 балла.
2. Найдена связь этой силы с работой или мощностью — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 3 балла.
5. С прошлых двух пунктов снимается по 2 балла, если потерян численный коэффициент.

Задача III.1.3.3. Вездеход (40 баллов)

Предприятие занимается разработкой беспилотных грузовиков для перемещения по сложным типам грунта. Им был разработан вездеход, который движется на колесах с очень мягкой оболочкой. Перед установкой на вездеход избыточное над атмосферным давление в камерах колес равно $p_0 = 5 \cdot 10^4$ Па.

Под весом груженого вездехода колесо сплющивается так, как показано на рисунке III.1.2. При этом внешний радиус колеса остается неизменным и равным $R = 60$ см,а радиус диска $r = R/2$. Ширина колеса также неизменна и равна $d = 30$ см.

3.1. Каким становится давление внутри колеса под весом вездехода если температура заполняющего его воздуха остается неизменной?

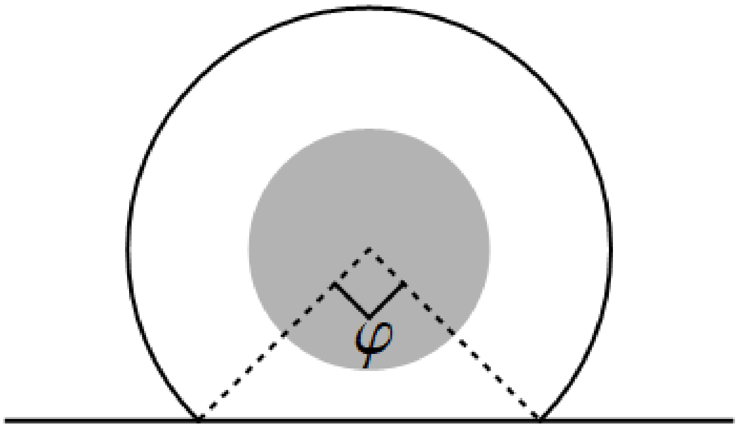


Рис. III.1.2: Чертеж к задаче

Решение

При неизменных температуре и количестве газа его давление обратно пропорционально его объему (закон Бойля – Мариотта). При неизменной ширине колеса этот объем пропорционален площади его сечения. Посчитаем эту площадь.

Для этого сравним площадь круга радиуса R:

$$S_{\bigcirc} = \pi R^2$$

и площадь вписанного в него квадрата (со стороной $\sqrt{2}R$):

$$S_{\square} = 2R^2$$

Разница между ними представляет собой площадь четырех сплющенных секторов из задачи:

$$4\Delta S = S_{\bigcirc} - S_{\square} = R^2(\pi - 2) \Rightarrow \Delta S = \frac{R^2(\pi - 2)}{4}$$

Учтем также, что и вначале, и в конце площадь камеры колеса меньше площади круга на величину площади диска $S_0 = \pi R^2/4$, и получим отношение давлений:

$$\frac{p_1}{p_0 + p_a} = \frac{S_{\bigcirc} - S_0}{S_{\bigcirc} - S_0 - \Delta S} = \frac{3\pi}{2\pi + 2}$$

Ответ: $1,7 \cdot 10^5$ Па.

Система оценки

1. Записан или оговорен закон Бойля – Мариотта или эквивалентное ему соотношение — 2 балла.
2. Показано, что отношение объемов колеса до и после сжатия равно отношению его площадей — 2 балла.

3. Верно найдена площадь сдавленного сегмента — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.2. Найдите массу груженого вездехода, если известно, что он опирается на шесть описанных колес, а деформацией грунта можно пренебречь.

Решение

Вес вездехода распределяется между всеми его колесами, которые, опираясь на грунт, создают силу $F = (p_1 - p_a)S$, где S — общая площадь их соприкосновения с землей. Подчеркнем, что поддерживает вездеход именно избыточное над атмосферным давление, а не общее давление в шинах. Длина плоского участка колеса равна $\sqrt{2}R$ (из теоремы Пифагора), а ширина — d. Таким образом:

$$mg = 6\sqrt{2}Rd(p_1 - p_a)$$

Ответ: 11 т.

Система оценки

1. Верно записана связь между весом вездехода и давлением в его шинах — 3 балла.
2. Верно найдена площадь опоры шин на землю — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.3. Вездеход был установлен на колеса описанным способом при температуре окружающего воздуха (и воздуха в камерах) $T_0 = 10^\circ\, C$. При какой температуре T_1 «угол сплющивания» φ (см. рисунок III.1.2) станет равен $\alpha = 60^\circ$?

Решение

Для того чтобы найти объем колеса с углом сплющивания $\alpha = 60^\circ$, проведем процедуру, аналогичную рассмотренной в первом пункте, но вместо вписанного квадрата рассмотрим вписанный правильный шестиугольник.

Площадь равностороннего треугольника со стороной R равна:

$$S_\triangle = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

Вписанный шестиугольник составлен из шести таких треугольников:

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$$

Тогда площадь одного сплющенного сектора:

$$\delta S = \frac{S_{\bigcirc} - S_6}{6} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} R^2$$

Отсюда площадь камеры колеса с углом сплющивания 60°:

$$S_1 = S_{\bigcirc} - S_0 - \delta S = \frac{7\pi + 3\sqrt{3}}{12} R^2$$

Теперь найдем отношение объемов:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{7\pi + 3\sqrt{3}}{6(\pi + 1)}$$

Из закона Менделеева – Клапейрона следует:

$$\frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} = \frac{T_1}{T_0},$$

Однако мы не можем просто приравнять давления, так как при деформации колеса изменится и площадь опоры вездехода. Если с углом сплющивания 90° она составляла $\sqrt{2}Rd$, то с углом сплющивания 60° она составит Rd. Давления в шинах могут быть найдены по формулам:

$$P_0 = \frac{mg}{6\sqrt{2}Rd} + p_a$$
$$P_1 = \frac{mg}{6Rd} + p_a$$

В результате окончательное соотношение температур имеет вид:

$$T_1 = \frac{7\pi + 3\sqrt{3}}{6(\pi + 1)} \left(\frac{mg/(6Rd) + p_a}{mg/(6\sqrt{2}Rd) + p_a} \right) T_0,$$

где все температуры должны браться в шкале Кельвина.

Ответ: 64°C.

Система оценки

1. Верно записан закон Менделеева – Клапейрона или эквивалентное ему соотношение — 2 балла.
2. Верно найдено соотношение площадей сечения шины при различных углах сплющивания — 2 балла.
3. Верно найдено соотношение площадей опоры при различных углах сплющивания — 2 балла.
4. Верно указана связь между отношением температур и другими указанными выше отношениями — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.4. Шесть колес вездехода установлены на трех осях так, что передняя и задняя оси находятся от центральной на одинаковом расстоянии $l = 2$ м.

В некоторый момент времени датчики вездехода показали, что избыточное давление в шинах передней оси в $\eta = 1,2$ раза выше, чем в остальных, а площадь соприкосновения с грунтом у шин задней оси в η раз меньше, чем у остальных. На какое расстояние и в какую сторону центр тяжести вездехода сдвинут относительно его центральной оси?

Решение

Как уже было обсуждено, сила реакции опоры, действующая на колесо, равна произведению избыточного давления в нем на площадь его контакта с поверхностью:

$$N = pS$$

Таким образом, если на шины центральной оси действует сила F, то на шины передней действует суммарная сила ηF, а на шины задней — F/η. Это позволяет нам записать уравнение моментов (правило рычага) относительно средней оси вездехода:

$$\eta F l - F l/\eta = Px,$$

где P — вес вездехода, x — смещение его центра масс относительно центральной оси в сторону передней (если оно окажется отрицательным — значит на самом деле центр масс смещен к задней оси).

В то же время, чтобы вездеход находился в равновесии, необходимо, чтобы сумма сил, действующих на него, была равна нулю:

$$\eta F + F + F/\eta = P \Rightarrow F = \frac{\eta P}{1 + \eta + \eta^2}$$

Подставляя это выражение в уравнение моментов, получим окончательно:

$$\frac{Pl(\eta^2 - 1)}{1 + \eta + \eta^2} = Px \Rightarrow x = l\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + \eta + 1} \approx 24 \text{ см}$$

Ответ: 24 см.

Система оценки

1. Записано первое условие равновесия (второй закон Ньютона) — 2 балла.
2. Записано второе условие равновесия (уравнение моментов) — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.