

Заключительный этап

Индивидуальный предметный тур

Информатика. 8-9 класс

Задача III.1.1.1. Поле чудес (10 баллов)

У Буратино есть n золотых монет. Частный театр (да, Буратино — бизнесмен) стоит m монет. Если Буратино закопает вечером 1 монету на поле чудес и будет всю ночь ее охранять и поливать, то у него вырастет дерево с k монетами. За ночь Буратино может вырастить только одно дерево.

Напишите программу, которая определит, сколько ночей придется трудиться Буратино, пока он не заработает на новый театр.

Формат входных данных

В одной строке через пробел записаны три числа n , m , k — исходное количество монет у Буратино, стоимость театра, количество монет на золотом дереве. ($1 \leq n \leq 1000$); ($1 \leq m \leq 1000$); ($2 \leq k \leq 1000$).

Формат выходных данных

Выведите одно целое число — ответ к задаче.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
5 10 3
Стандартный вывод
3

Пример №2

Стандартный ввод
6 5 2
Стандартный вывод
0

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```

1  #include <iostream>
2
3  int main() {
4      int n,m,k;
5      std::cin>>n>>m>>k;
6      if (n>=m) std::cout<<0;
7      else std::cout<<(m-n+k-2)/(k-1);
8      return 0;
9  }
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```

1  n, m, k = map(int, input().split())
2
3  ans = (m - n + k - 2) // (k - 1)
4
5  if ans > 0:
6      print(ans)
7
8  else:
9      print(0)
```

Задача III.1.1.2. Типография (15 баллов)

Типография принимает заказы на подготовку печатной продукции. Для каждого заказа известно количество листов n и их формат $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$. Стоимость выполнения заказа вычисляется по тарифу p , который определяет стоимость печати одного условного печатного листа. Считается, что в одном условном печатном листе ровно 2 листа формата A_1 или 4 листа формата A_2 , или 8 листов формата A_3 , или 16 листов формата A_4 , или 32 листа формата A_5 . При расчете стоимости объем заказа пересчитывается в условные печатные листы. Если полученное число условных печатных листов не будет целым, то оно округляется в большую сторону до ближайшего целого. Далее, это число умножается на тариф p , что и дает стоимость заказа.

Напишите программу, которая определит стоимость заказа по описанному выше методу.

Формат входных данных

В первой строке записано одно натуральное число p — тариф печати ($1 \leq p \leq 10000$).

Во второй строке записано одно натуральное число n — количество листов ($1 \leq n \leq 1000$). В третьей строке записан формат листа в виде двух символов. Первым символом обязательно является заглавная буква латиницы A , вторым — цифра от 1 до 5.

Формат выходных данных

Выведите одно целое число — ответ к задаче.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
200
20
A4
Стандартный вывод
400

Пример №2

Стандартный ввод
200
320
A5
Стандартный вывод
2000

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```

1  #include <iostream>
2  #include <string>
3
4  int main() {
5      int p,n;
6      std::string s;
7      std::cin>>p>>n>>s;
8      int u=1<<(s[1]-'0');
9      std::cout<<p*((n+u-1)/u);
10     return 0;
11 }
```

Задача III.1.1.3. Кулинарный дизайн (25 баллов)

Мария работает дизайнером кулинарных изделий. Она украшает торты рельефными фигурками, изображениями, надписями. За рабочий день ей надо украсить n тортов. Мария знает, сколько времени ей потребуется на украшение каждого торта. Обозначим за a_i время украшения торта с номером i . Сами торты готовит ее ассистентка. Известно, что i -тый торт будет подготовлен для украшения через b_i минут после начала рабочего дня.

Мария очень ценит свое время и не хочет просто сидеть на рабочем месте в ожидании, пока ассистентка закончит подготовку очередного торта. Вместе с тем, она

хочет закончить работу как можно раньше, поскольку, обычно, у нее большие планы на вечер. Напишите программу, которая по известным числам a_i и b_i определит минимальное время в которое Мария сможет прийти на работу, чтобы потом работать без перерывов.

Рассмотрим пример. Пусть Марии надо украсить 4 торта, которые будут готовы через 18, 25, 30, 34 минуты после начала дня. На украшение этих тортов ей потребуется соответственно 5, 10, 7, 8 минут. Тогда Мария должна будет начать работу в 20 минут. В 25 минут она закончит украшать первый торт и сможет взять второй. Вторым торт она закончит украшать в 35 минут, в это время уже будут готовы оставшиеся два торта, которые Мария закончит украшать в 50 минут. Таким образом, она будет работать 30 минут без перерывов. Если она придет немного раньше, то ей придется ждать приготовления второго торта, что ее не устраивает.

В этой задаче пример не входит в состав тестов на которых проверяются решения участников.

Формат входных данных

В первой строке записано одно целое число n — количество тортов, которые должна украсить Мария ($1 \leq n \leq 100$). Во второй строке через пробел записано n натуральных чисел a_i — время в минутах, которое придется потратить Марии на украшение каждого торта ($1 \leq a_i \leq 100$). В третьей строке через пробел записано n натуральных чисел b_i — время после начала рабочего дня, когда i -тый торт будет подготовлен для Марии ($1 \leq b_i \leq 1000$). Все b_i различны и упорядочены по возрастанию.

Формат выходных данных

Выведите одно целое число — ответ к задаче.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 5 10 7 8 18 25 30 34
Стандартный вывод
20

Пример №2

Стандартный ввод
1 50 80
Стандартный вывод
80

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```

1 n=int(input())
2 a=list(map(int,input().split()))
3 b=list(map(int,input().split()))
4 ans=0
5 sum=0
6 for i in range(n):
7     ans=max(ans,b[i]-sum)
8     sum+=a[i]
9 print(ans)

```

Задача III.1.1.4. Перевозка грузов (25 баллов)

Индивидуальный предприниматель Роман доставляет грузы от склада до получателей. Все получатели расположены на одной дороге в одном направлении от склада. Известно расстояние от склада до каждого из получателей. В одной точке может быть расположено несколько получателей. Грузы могут быть двух видов, условно назовем их грузами типа А и типа В. В фургон Романа входит либо один груз типа А, либо два груза типа В. Роман хочет составить план перевозок, при котором все грузы будут перевезены получателям, и при этом, ему придется проехать минимальное расстояние.

Рассмотрим пример. Пусть имеется 4 получателя на расстояниях от склада в 40, 70, 70, 90 километров. При этом, третий получатель ожидает груз типа А, а остальные груз типа В. Тогда, оптимально Роман сможет сделать три рейса. В первый рейс Роман загрузит 2 груза типа В, которые отвезет второму и четвертому получателю. Протяженность рейса туда и обратно составит 180 километров. Во второй рейс протяженностью 140 км. Роман отвезет груз типа А третьему получателю. В третий рейс протяженностью в 80 км Роман отвезет груз В первому получателю. Последовательность рейсов может быть любой другой, но общая протяженность всех рейсов не изменится и составит 400 км.

В этой задаче пример не входит в состав тестов на которых проверяются решения участников.

Формат входных данных

В первой строке записано одно целое число n — количество получателей грузов ($1 \leq n \leq 100$). Вторая строка содержит ровно np символов, каждый из которых может быть заглавной буквой А или В из алфавита латиницы. Других символов или разделителей в строке нет. Символ с порядковым номером i задает тип груза, который следует доставить i -тому потребителю. В третьей строке через пробел записано np натуральных чисел s_i — расстояние от склада до i -того потребителя ($1 \leq s_i \leq 1000$). Последовательность s_i упорядочена по возрастанию.

Формат выходных данных

Выведите одно целое число — ответ к задаче.

Примеры*Пример №1*

Стандартный ввод
4 ВВАВ 40 70 70 90
Стандартный вывод
400

Пример №2

Стандартный ввод
1 А 17
Стандартный вывод
34

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```

1 n=int(input())
2 a=input()
3 b=list(map(int,input().split()))
4 ans=0
5 flg=True
6 for i in range(n-1,-1,-1):
7     if (a[i]=='A'):
8         ans+=b[i]
9     else:
10        if flg:
11            ans+=b[i]
12            flg=not flg
13 print(ans*2)

```

Задача III.1.1.5. Распределение автобусов (25 баллов)

Небольшая пассажирская транспортная компания обслуживает два автобусных маршрута. Рейсы по обоим маршрутам совершаются один раз в день в одинаковое время. Компания может использовать k автобусов вместимость которых a_1, a_2, \dots, a_k мест. Билеты бронируются заранее в онлайн кассе. При этом, автобусы распределяются по маршрутам динамически, в соответствии с проданными билетами.

Например, если вместимости четырех автобусов составляют 16, 18, 22 и 25 мест, и на один маршрут продано 40 билетов а на другой 39, то на первый маршрут выйдут автобусы с 18 и 22 местами, а остальные выйдут на второй маршрут. Возможно, что на некоторый маршрут выйдет только один из автобусов или вообще ни одного, если на этот маршрут не было продано билетов.

Для работы онлайн кассы требуется написать модуль, который будет проверять возможность распределить автобусы по маршрутам так, чтобы перевезти всех пассажиров, которые хотели бы купить билет. Ваша программа должна будет ответить на n запросов, каждый из которых содержит по два числа b_1 и b_2 — количество забронированных билетов на каждый из двух маршрутов

Решения, правильно работающие для двух, трех и четырех автобусов смогут набрать до 20 баллов за каждый из случаев.

В этой задаче пример не входит в состав тестов, на которых проверяются решения участников.

Формат входных данных

В первой строке записано одно натуральное число k — количество автобусов ($2 \leq k \leq 10$). Во второй строке через пробел записаны k натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_k — количество мест в каждом из автобусов ($1 \leq a_i \leq 100$). Во третьей строке записано одно натуральное число n — количество запросов ($1 \leq n \leq 100$). Далее в n строках записаны запросы по одному в каждой строке. Каждый запрос содержит ровно два целых числа b_1, b_2 — количество пассажиров, которые хотели бы уехать по каждому маршруту. Числа разделены пробелом. ($0 \leq b_i \leq 1000$).

Формат выходных данных

Для каждого из запросов программа должна вывести символ «+» или «-» (без кавычек). Если распределить автобусы по маршрутам возможно, то следует вывести символ «+». В противном случае надо вывести «-». Символы требуется вывести в одной строке без пробелов и других разделителей.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4
16 18 22 25
4
39 40
0 81
64 5
30 48
Стандартный вывод
+++-

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```
1 input()
2 bus=list(map(int,input().split()))
```

```

3 n=int(input())
4 for i in range(n):
5     a,b=map(int,input().split())
6     for i in range(2**len(bus)):
7         a1,b1=0,0
8         for j in range(len(bus)):
9             if ((i>>j)&1)==1:
10                a1+=bus[j]
11            else:
12                b1+=bus[j]
13            if a<=a1 and b<=b1:
14                print('+',end='')
15                break
16        else:
17            print('-',end='')

```

Математика. 8-9 класс

Задача III.1.2.1. (10 баллов)

В дочернем предприятии компании Tesla было принято решение заменить людей, занятых на производстве запасных частей для частного частично многоразового беспилотного космического корабля Space Dragon, на роботов с искусственным интеллектом. Однако, поскольку в выгоде такой автоматизации совет директоров не уверен, было решено провести робото-автоматизацию в тестовом режиме и не во всех заводах, а только в 14 из 20. Скольких вариантов имеет на рассмотрение совет директоров, если с точки зрения руководителей все заводы равнозначны и не имеют никаких преимуществ друг перед другом?

Решение

Общее количество вариантов выбора 14 заводов из 20 равно

$$n = C_{20}^{14} = \frac{20!}{14! \cdot 6!} = 38\,760.$$

Ответ: 38 760.

Задача III.1.2.2. (15 баллов)

В городе N в связи с проведением чемпионата мира по футболу постоянно возникают пробки, из-за чего в компании по перевозке грузов возникали задержки в доставке. Ниже представлены выдержки из отчетов экспедиторов, которых они фиксировали опаздания время на различных участках дороги:

- на участке дороги от Склада до улицы Кипарисовая составляет 47 минут;
- на участке дороги от Склада до улицы Большая составляет 50 минут;
- на участке дороги от Склада до улицы Ноосферная составляет 40 минут;
- на участке дороги от Склада до улицы Яблонева составляет 35 минут;
- на участке дороги от улицы Большая до улицы Тенистая составляет 15 минут;

- на участке дороги от улицы Ноосферная до улицы Большая составляет 15 минут;
- на участке дороги от улицы Большая до улицы Кипарисовая составляет 4 минуты;
- на участке дороги от улицы Кипарисовая до улицы Пушкина составляет 10 минут;
- на участке дороги от улицы Пушкина до улицы Тенистая составляет 1 минуту;
- на участке дороги от улицы Пушкина до улицы Чайковского составляет 60 минут;
- на участке дороги от улицы Тенистая до улицы Домашняя составляет 17 минут;
- на участке дороги от улицы Пушкина до улицы Чайковского составляет 60 минут;
- на участке дороги от улицы Тенистая до улицы Домашняя составляет 17 минут;
- на участке дороги от улицы Ноосферная до улицы Домашняя составляет 45 минут;
- на участке дороги от улицы Домашняя до улицы Чайковского составляет 51 минут;
- на участке дороги от улицы Домашняя до улицы Гитаристов составляет 20 минут;
- на участке дороги от улицы Гитаристов до улицы Чайковского составляет 22 минуты;

Автоматизированный программный комплекс «Логистика: Транспорт», располагающая только информацией, поданной в отчетах, должен составить маршрут для одного из экспедиторов. Какой будет минимальная задержка, если со Склада нужно перевести груз клиенту, который расположен на улице Чайковского? Какой при этом будет разница между наибольшим и наименьшим количеством фирм-клиентов (без учета фирмы, расположенной на улице Чайковского), расположенных на пути с минимальной протяженностью?

На каждой из указанных улиц располагается по одной фирме-клиенту.

Решение

Для решения задачи удобнее всего составить граф (см. чертеж III.1.1), из которого видно, что наименьшей будет задержка в том случае, когда экспедитор будет двигаться по одному из двух маршрутов:

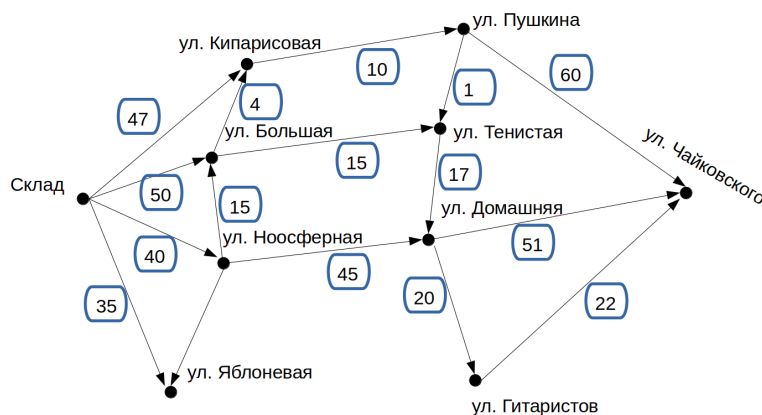


Рис. III.1.1: Чертеж к задаче

1. Склад — ул. Кипарисовая — ул. Пушкина — ул. Чайковского;

2. Склад — ул. Кипарисовая — ул. Пушкина — ул. Тенистая — ул. Домашняя — ул. Гитаристов — ул. Чайковского.

Просуммировав опоздания по каждому из двух маршрутов, можно увидеть, что они одинаковы и равны 117 минутам, а разница между наибольшим и наименьшим количеством клиентов равна 3.

Ответ: Опоздание составит 117 минут, разница между наибольшим и наименьшим количеством клиентов равна 3.

Задача III.1.2.3. (20 баллов)

Складское помещение в форме параллелограмма разделено по диагонали временной перегородкой. Внутри первой половины размещен циркуляционный стол в форме окружности так, что практически касается каждой из стен помещения и перегородки и зазоры можно считать пренебрежимо малым. Найти площадь (в м^2) складского помещения, если расстояние от центра циркуляционного стола.

- до стены, которой стол касается, равно 20 м;
- до стены, противоположной одной из стен касания, равно 21 м;
- до угла, образованного стеной, указанной в предыдущем пункте, и временной перегородкой равно 29 м.

Ответ округлить до целых.

Решение

Из условия задачи видно, что радиус окружности (см. чертеж) $OM = r = 20$ м.

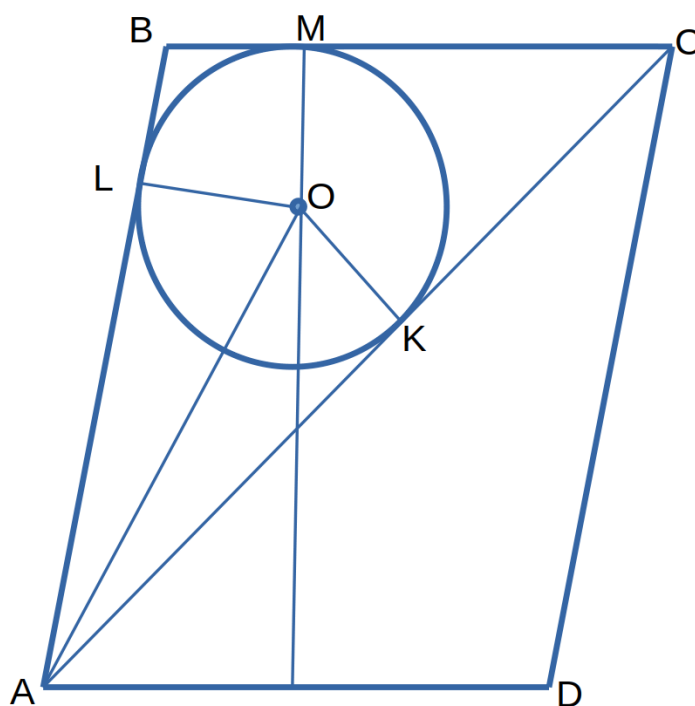


Рис. III.1.2: Чертеж к задаче

Пусть $BM = x$ м, $MC = y$ м, $OM = 20$ м, $OH = 21$ м, $OA = 29$ м. Тогда, очевидно, что по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, $BL = x$ м, $CK = y$ м. Отрезок $MH = MO + OH = 41$ м является высотой параллелограмма. $AL = AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 21$ м.

Известно, что площадь треугольника $\triangle ABC$ можно найти двумя способами:

$$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{2x + 2y + 42}{2} \cdot 20.$$

Где p — полупериметр треугольника, и:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}MH \cdot BC = \frac{41(x + y)}{2}$$

Откуда:

$$20(x + y + 21) = \frac{41(x + y)}{2} \text{ или } x + y = 40 \cdot 21.$$

Тогда площадь параллелограмма:

$$S_{ABC} = MH \cdot BC = 41(x + y) = 41 \cdot 40 \cdot 21 = 34\,440.$$

Ответ: 34 440.

Задача III.1.2.4. (баллов)

При модернизации оборудования в мастерской было принято решение купить лазерную установку для сварки с лазером, работающим в импульсном режиме. Перед мастером стоит задача выбрать ту установку, у которой период излучения меньше. Он выбрал два наиболее подходящих устройства. В технической документации на них сказано, что за одну минуту первый лазерный сварщик может выполнять 61^{14} , а второй — 33^{18} операций в минуту. Какой из станков выберет мастер? В ответ записать основание степени, указанное в технической документации.

Решение

Для сравнения двух чисел необходимо выполнить следующие оценки:

$$61^{14} < 64^{14} = 2^{84} < 2^{85} = 32^{17}.$$

Теперь, если сравнить два числа, то очевидно, что $61^{14} < 32^{17} < 33^{18}$. Таким образом, в ответ можно записать основание 33.

Ответ: 33.

Задача III.1.2.5. (25 баллов)

Две строительные компании имеют в собственности 14 смежных участков квадратной формы: первой принадлежит один участок, а второй — 13 участков, причем

меньшего размера. После того, как компания продала 6 одинаковых участков прямоугольной формы со сторонами, равными сторонам участка первой и второй компании, общая площадь оставшихся земель составила 29 Га. Найти, какой изначально была общая площадь участков двух компаний, если длины сторон участков пропорциональны 100 м?

Решение

Пусть сторона участка, принадлежащего первой компании, равна x сотен метров, а сторона одного участка — y сотен метров. Составим уравнение:

$$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29, \{x, y\} \in N.$$

Выделим полный квадрат в данном уравнении:

$$(x - 3y)^2 + (2y)^2 = 29.$$

Очевидно что в таком случае $(2y)^2 \leq 29$, либо $y = \{1; 2\}$ (нулевые и отрицательные значения не рассматриваем, поскольку это противоречит сути задания).

Перебором попробуем найти решение данного уравнения.

1. $y = 1$. Тогда $(x - 3)^2 + (2)^2 = 29$, $(x - 3)^2 = 25$, $x = 8$.
2. $y = 2$. Тогда $(x - 6)^2 + (4)^2 = 29$, $(x - 6)^2 = 13$, решений в целых числах нет.

Таким образом, в начале две компании обладали участками общей площадью $x^2 + 13y^2 = 8^2 + 13 \cdot 1^2 = 77$ Га.

Ответ: 77.

Математика. 10-11 класс

Задача III.1.3.1. (20 баллов)

По статистике в банк с обращением за кредитом приходят 30% клиентов, не способных полностью выполнить обязательства по кредитному договору. Поэтому было принято решение ввести двухэтапную проверку благонадежности клиента. Для проведения первичного анализа были внедрены три алгоритма анализа поведения заявителя, которые с вероятностями, равными 0,91, 0,95 и 0,93, выявляют неблагонадежных клиентов. При этом данные о претенденте на займ загружаются для обработки только в один из алгоритмов, каждый из алгоритмов равновероятен при выборе для анализа. Далее на втором этапе производится поиск неоплаченных кредитов и верификация кредитной истории, при этом с вероятностью 0,85 обнаруживается несостоятельность заявителя. Найти вероятность того, что случайно выбранному клиенту будет отказано в выдаче кредита как неспособному полностью выполнить обязательства по кредитному договору. Ответ округлить до тысячных.

Решение

Вероятность того, что случайно выбранному клиенту откажут уже на первом этапе равна:

$$P_1 = 0,3 \cdot \frac{0,91 + 0,95 + 0,93}{3} = 0,279.$$

Вероятность того, что клиента, неспособного полностью выполнить обязательства по кредитному договору, на первом этапе упустили, но выявили на втором этапе, равна:

$$P_2 = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{0,91 + 0,95 + 0,93}{3}\right) \cdot 0,85 = 0,01785.$$

В итоге вероятность того, что случайно выбранному клиенту будет отказано в выдаче кредита, равна:

$$P = P_1 + P_2 = 0,279 + 0,01785 \approx 0,297.$$

Ответ: 0,297.

Задача III.1.3.2. (20 баллов)

После внедрения на производстве автоматизации технологического процесса предприниматель стал наблюдать за экономическим эффектом от модернизации производственной линии. В качестве метрики M_i была взята разность между прибылью и расходами на обслуживание и настройку линии за i -ый месяц. Наблюдения в течение 6 месяцев показали, изучаемый параметр представляет собой арифметическую прогрессию, причем за 6-ой месяц разность M_6 между прибылью и доходом составила 5 тыс. руб. Чему равнялся прирост наблюдаемого параметра M_i , если произведение $M_1 \cdot M_4 \cdot M_5$ было наибольшим?

Решение

Согласно условию задачи $M_6 = 5$ тыс. руб. Пусть разницей арифметической прогрессии — d ($d > 0$ по смыслу задачи). Тогда:

$$M_5 = M_6 - d = 5 - d, \quad M_4 = M_6 - 2d = 5 - 2d, \quad M_3 = M_6 - 3d = 5 - 3d.$$

Исследуемая функция:

$$f(d) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_5 = (5 - d) \cdot (5 - 2d) \cdot (5 - 5d) = 125 - 200d + 85d^2 - 10d^3.$$

Для исследования данной функции на экстремальные значения нам необходимо вычислить производную, найти стационарные точки и затем определить точку или точки максимума функции:

$$f'(d) = -200 + 170d - 30d^2 = 0$$

$$d_1 = \frac{5}{3}, \quad d_2 = 4.$$

Исследование промежутков знакопостоянства производной демонстрирует, что только при $d = 4$ функция имеет максимум.

Ответ: 4.

Задача III.1.3.3. (20 баллов)

Молодой школьник-скульптор на первом занятии слепил конус. После того, как фигура высохла, ему потребовалось обточить конус в шар, чтобы шар был вписанным в фигуру, получившуюся на первом занятии. Для этого он обозначил окружность, по которой должны касаться шар и конус. Какого объема был конус, если радиус окружности, упомянутой выше, равен 7 см, а угол между образующей конуса и высотой равен 30° ? Ответ (в см^3) округлить до целых.

Решение

Выполним чертеж к данному заданию. Очевидно, что здесь радиус окружности, по которой касаются шар и конус является отрезком AC (но не радиусом вписанного шара!), а угол $\angle DSB = \alpha = 30^\circ$.

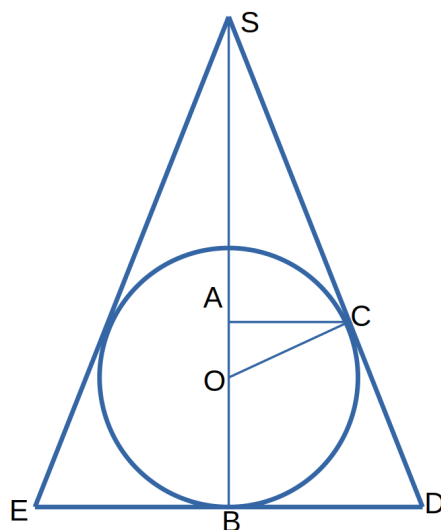


Рис. III.1.3: Чертеж к задаче

Поскольку $OC \perp SD$, $AC \perp SB$, то $\angle OCA = \angle BSD = 30^\circ$.

Далее из треугольников $\triangle OAC$, $\triangle OCS$ найдем, что:

$$R_{\text{шара}} = OC = OB = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad OS = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha \sin \alpha}.$$

А высота:

$$H = SB = OS + OB = \frac{r}{\cos \alpha \sin \alpha} (1 + \sin \alpha) = 14\sqrt{3}.$$

Далее из треугольника $\triangle SBD$ найдем радиус конуса:

$$R = BD = SB \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\cos^2 \alpha} (1 + \sin \alpha) = 14.$$

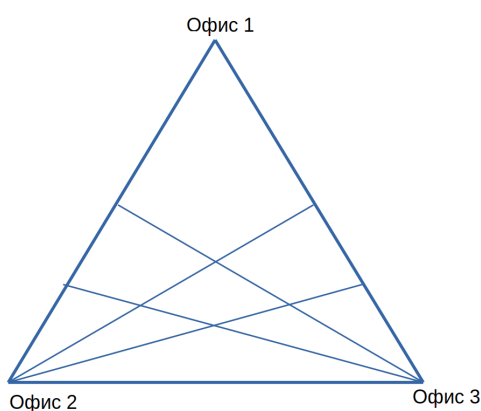
И, таким образом, объем конуса равен:

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{14^3 \pi}{\sqrt{3}} \approx 4977.$$

Ответ: 4977.

Задача III.1.3.4. (20 баллов)

Сотрудники трех офисов, находящихся на одном и том же этаже в зданиях, не лежащих на одной прямой, решили поиграть ночью в солнечных зайчиков, пока все заявки от пользователей выполнены. Для этого они протянули из окон друг к другу веревки (длины веревок, соединяющих три окна офисов, оказались одинаковыми и равными 24 метрам) и двое из них стали светить во внутреннюю область получившейся фигуры двумя фонариками так, что световые лучи стали образовывать с веревками, соединяющими этих двух коллег, углы по 15° и 30° (см. чертеж). На площади перед тремя офисами находится специально высланный делегат, который смотрит на фигуру, образованной световыми лучами и на глаз пытается определить ее площадь. Какой была высланная наблюдателем в общий чат площадь, если на той высоте, где располагается фигура, зритель каждый квадратный метр воспринимает как $1,5 \text{ м}^2$? Провисанием веревок пренебречь, ответ округлить до сотых.



Решение

Пусть сторона треугольника $\triangle ABD$ равна $a = 24$ м, $\angle ACK = \angle KCL = 15^\circ$. И чертежа видно, что искомую площадь можно найти как $S = S_{\triangle KMC} - S_{\triangle ELC}$. Можно заметить, что $S_{\triangle AKC} : S_{\triangle KMC} = AK : KM$, поскольку эти треугольники имеют равные высоты, проведенные из точки C .

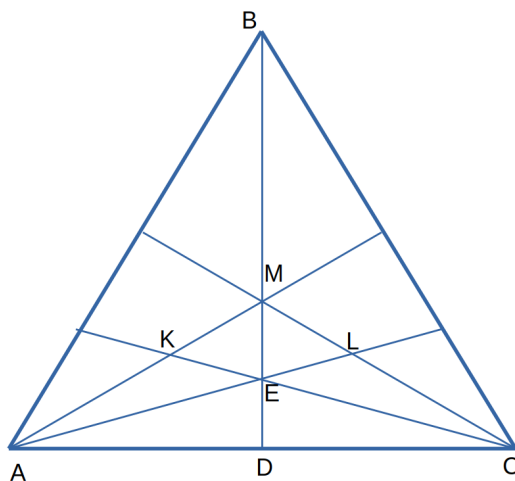


Рис. III.1.4: Чертеж к задаче

Учитывая, что CK — биссектриса, имеем $AK : KM = AC : CM = \sqrt{3}$, $S_{AKC} = \sqrt{3}S_{KMC}$. Но $S_{AKC} + S_{KMC} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$, откуда:

$$S_{KMC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12(\sqrt{3}+1)} = \frac{a^2(3-\sqrt{3})}{24}.$$

Далее, $\Delta_{AKC} = \Delta_{ELC}$ ($\angle AKC = \angle ELC, \angle ACK = \angle ECL$) и, следовательно:

$$\frac{S_{AKC}}{S_{ELC}} = \left(\frac{AC}{EC}\right)^2.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} S_{ELC} &= \left(\frac{EC}{AC}\right)^2 S_{AKC} = \left(\frac{EC}{2DC}\right)^2 S_{AKC} = \frac{S_{AKC}}{4\cos^2 15^\circ} = \frac{S_{AKC}}{2(1+\cos 30^\circ)} = \\ &= \frac{S_{AKC}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})S_{AKC} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3})S_{KMC} = (2\sqrt{3}-3)S_{KMC}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получим:

$$\begin{aligned} S &= S_{\Delta KMC} - S_{\Delta ELC} = S_{\Delta KMC} - (2\sqrt{3}-3)S_{KMC} = (2\sqrt{3}+4)S_{KMC} = \\ &= \frac{a^2(3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{12} = \frac{a^2(9-5\sqrt{3})}{12} \approx 24,46. \end{aligned}$$

Ответ: 24,46.

Задача III.1.3.5. (20 баллов)

Найти наименьшее положительное решение уравнения, ответ записать в единицах π :

$$\sin 3x - 2 \sin 18x \cdot \sin x = 3\sqrt{2} - \cos 3x + 2 \cos x$$

Решение

Домножим уравнение на $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 18x \cdot \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) = 3,$$

$$\sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 2(\sin 18x \cdot \sin x + \cos x) = 3\sqrt{2},$$

Из уравнения видно, левая часть будет равна $3\sqrt{2}$ только при условии

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \\ 2(\sin 18x \cdot \sin x + \cos x) = -2\sqrt{2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}, \\ \sin 18x = -1, \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{9}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in Z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$$

Наименьшим положительным решением уравнения будет $x = \frac{3\pi}{4}$. В ответ запишем 0,75.

Ответ: 0,75.