Заключительный этап

Индивидуальный предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача III.1.1.1. Выбор места для дата-центра (7 баллов)

Крупная IT-компания планирует построить очередной дата-центр. Для постройки нужно выбрать одну из n заданных местностей. В данной задаче нас будет интересовать только один параметр — стоимость поддержания заданной температуры в помещении планируемого дата-центра. Этот параметр формируется из двух составляющих: среднегодовой температуры в текущей местности и стоимости электроэнергии. Для упрощения рассуждений будем считать, что среднегодовая температура в текущей местности держится постоянно и в помещении дата-центра будет именно эта температура, если не предпринимать дополнительных мер. Этот параметр важен в связи с тем, что для оптимальной работы дата-центра необходимо в нем поддерживать заданную заранее оптимальную температуру T. При необходимости можно установить оборудование для охлаждения или, наоборот, для подогрева. И то, и другое потребляет электроэнергию.

В связи с этим каждая местность имеет следующие параметры:

- название (непустая строка из больших и малых букв латиницы, а также пробелов, длина названия не превосходит 60);
- среднегодовая температура (целое число от -50 до $+50$ включительно, знак «+» не пишется в явном виде);
- стоимость 1 кВт электроэнергии (целое число от 1 до 10^5 включительно).

Формат входных данных

В первой строке содержатся три числа через пробел: T — оптимальная температура функционирования дата-центра, C — потребляемая оборудованием мощность в кВт для охлаждения помещения на 1 градус в течение года, W — потребляемая оборудованием мощность в кВт для подогрева помещения на 1 градус в течение года ($-50 \leqslant T \leqslant 50$, $1 \leqslant C, W \leqslant 10^5$).

Во второй строке находится число n — количество рассматриваемых местностей. $1 \leqslant n \leqslant 100$.

В следующих n строках находятся описания параметров местностей в формате <название><стоимость 1 кВт электроэнергии> <среднегодовая температура>. Параметры разделены одним пробелом. Внутри названия могут так же присутствовать пробелы. В начале или в конце названия пробелы отсутствуют. Все названия различны.

Формат выходных данных

Требуется вывести список названий заданных местностей в порядке возрастания затрат на поддержание заданной оптимальной температуры. В случае равенства затрат названия нужно выводить в алфавитном порядке. Каждое название должно быть выведено в отдельной строке. Для каждой местности в списке в ее строке после названия нужно вывести еще одно число ровно через один пробел — затраты на поддержание в помещении дата-центра заданной температуры T в течение года. Название должно быть выведено точно в том виде, в каком оно встречается в исходных данных.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

```
-2 1345 269
7
Oregon 24 10
California 32 16
Costa  Rica 12 22
Yakutia 13 -10
The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland 25 9
Magadan 15 -3
Antarctic coast 240 -8
```

Стандартный вывод

```
Magadan 4035
Yakutia 27976
The United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland 369875
Antarctic coast 387360
Costa  Rica 387360
Oregon 387360
California 774720
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    ll T, C, W;
    cin >> T >> C >> W;
    int n;
    cin >> n;
```

```
    vector<pair<ll, string> > v;
    string s;
    getline(cin, s);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        getline(cin, s);

        int y = 0;
        while((s[y] > '9' || s[y] < '0') && s[y] != '-')
            y++;
        string name = s.substr(0, y);
        string ds = s.substr(y);

        stringstream ss;
        ss << ds;
        int cost, t;
        ss >> cost >> t;
        ll tp;
        if(t < T)
            tp = (T - t) * W * cost;
        else
            tp = (t - T) * C * cost;

        v.push_back({tp, name});
    }

    sort(v.begin(), v.end());
    for(auto q : v)
            cout<<q.second<<q.first<<endl;
}
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```
ss = input().split()
temp = int(ss[0])
cool = int(ss[1])
heat = int(ss[2])
n = int(input())
ans = []
for k in range(n):
    s = input()
    a = ""
    yk = 0
    cur_temp = ""
    price = ""
    for j in range(len(s) - 1, -1,-1):
        if s[j].isalpha():
            name = s[:j + 1]
            break
        elif s[j] == ' ':
            if (yk == 0 and len(a) > 0):
                cur_temp = int(a)
                yk += 1
            elif (yk == 1 and len(a) > 0):
                price = int(a)
            a = ''
        else:
            a = s[j] + a
```

```
    if (cur_temp > temp):
        ans.append([(cur_temp - temp) * cool * price, name])
    else:
        ans.append([(temp - cur_temp) * heat * price, name])
ans.sort()
for i in ans:
    print(i[1],i[0])
```

Задача III.1.1.2. Пасьянс для WALL-E (15 баллов)

Робот WALL-E нашел игральную колоду, в которой изначально было 54 карты, но к моменту нахождения некоторые карты, возможно, были утеряны. Теперь робот использует колоду для развлечения, которое люди бы назвали раскладыванием пасьянса. В свободное от уборки мусора время, он выкладывает все имеющиеся у него карты в ряд, при этом некоторые из них оказываются лицевой стороной вверх, а некоторые обратной. После этого он много раз проделывает следующую операцию: находит первую слева карту, лежащую лицевой стороной вверх, после чего переворачивает все карты слева от нее и саму эту карту. Процесс продолжается до тех пор, пока в ряду есть хотя бы одна карта, лежащая лицевой стороной вверх.

Для заданного исходного расположения карт требуется выяснить, сколько раз придется WALL-E проделать указанную операцию, чтобы пасьянс был завершен.

Формат входных данных

В первой строке находится одно число n — количество карт в игральной колоде, $1 \leqslant n \leqslant 54$. Во второй строке находится строка из n символов A и B, описывающая положение карт в ряду слева направо. К сожалению, неизвестно, какая буква соответствует лицевой, а какая обратной стороне карты, но известно, что различно расположенные карты обозначены разными буквами, а одинаково расположенные карты обозначены одинаковыми буквами.

Формат выходных данных

Вывести два числа через пробел по неубыванию — количество операций WALL-E в случае каждого из двух возможных расположений карт, соответствующих исходной строке.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
4 ABBA

Стандартный вывод
6 9

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    int n;
    cin >> n;
    string s;
    cin >> s;
    reverse(s.begin(), s.end());

    ll A = 0, B = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
      A = A * 2 + (s[i] == 'A');
      B = B * 2 + (s[i] == 'B');
    }

    if(A > B) swap(A, B);
    cout<<A<<' '<<B;
}
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```python
n = int(input())
s = input()
dp = [0] * 100
dp[1] = 1
for i in range(2, 60):
    dp[i] = dp[i - 1] * 2 + 1
ans1 = 0
ans2 = 0
for i in range(n):
    if (s[i] == 'A'):
        ans1 += dp[i] + 1
    else:
        ans2 += dp[i] + 1
print(min(ans1, ans2), max(ans1,ans2))
```

Задача III.1.1.3. Квантовая зависимость (18 баллов)

При разработке прототипа квантового компьютера было принято решение расположить n его регистров на плоскости в пределах некоторого прямоугольного участка ширины k. Если ввести координаты на плоскости, то первые k регистров будут иметь координаты от $(0, 0)$ до $(k-1, 0)$, следующие k регистров (если они есть) будут иметь координаты от $(0, 1)$ до $(k-1, 1)$, следующие k регистров (если они есть) будут иметь координаты от $(0, 2)$ до $(k-1, 2)$ и т. д. Последний ряд может состоять из меньшего чем k числа регистров.

При исследовании этой компоновки было замечено, что между некоторыми парами регистров возникает плохо влияющая на работу системы зависимость. Более точно, регистр A с координатами (x_i, y_i) влияет на работу регистра B с координатами x_j, y_j, если $x_i \leqslant x_j$ и $y_i \leqslant y_j$. Это значит, в частности, что регистр воздействует и сам на себя. Это воздействие весьма незначительное, но, суммируясь, может привести к непрогнозируемым ошибкам в работе системы.

Требуется по заданному количеству регистров n найти такое k, при котором суммарное количество зависимых пар было бы как можно меньше.

Формат входных данных

На вход подается одно число n $1 \leqslant n \leqslant 10^6$.

Формат выходных данных

Вывести одно число k — ширину прямоугольного участка, в пределах которого можно расположить n регистров так, что число зависимых пар будет наименьшим. Если минимум достигается на нескольких значениях k, вывести наименьшее из них.

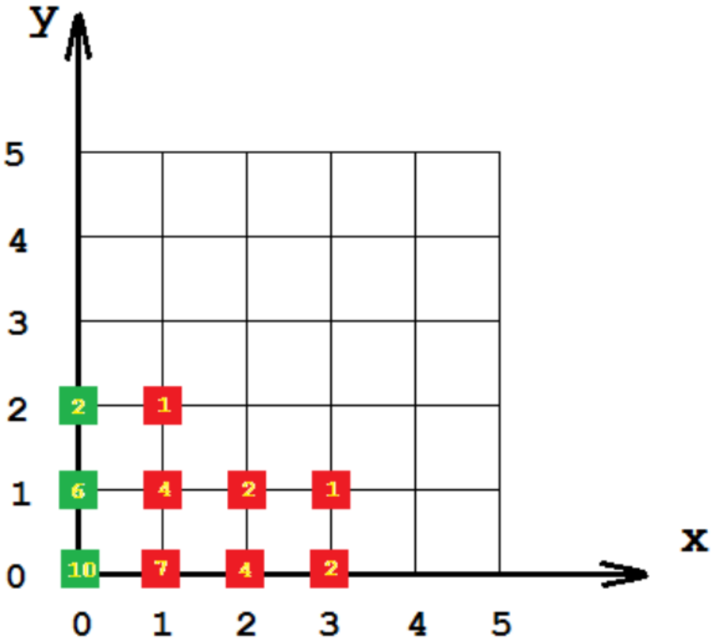
Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`10`

Стандартный вывод
`4`

Пояснение к примеру 1.



На рисунке представлена компоновка для $n = 10$ и $k = 4$. 10 регистров располагаются по 4 в ряд, последний ряд неполный. Для понимания условия на рисунке красным выделены те регистры, на которые воздействует регистр $(1, 0)$. Для каждого регистра желтым указано, на сколько регистров он воздействует. Даная компоновка является оптимальной для $n = 10$, так как в ней достигается минимальное возможное суммарное количество зависимостей — 39.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

ll S(ll n){
    return (1LL + n) * n / 2;
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    ll n, mn = 1e18, ans;
    cin >> n;

    for(ll k = 1; k <= n; k++){
        ll v = n / k + (n % k > 0);
        ll d = S(k)*S(n/k) + S(v)*S(n%k) - S(n/k)*S(n%k);

        if(mn > d){
            mn = d;
            ans = k;
```

```
        }
    }
    cout << ans;
}
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```python
n = int(input())
control = 10**20
ans = 1
for k in range(1, n + 1):
    nn = n // k
    f = n - n // k * k
    if (control > nn * (nn + 1) // 2 * k * (k + 1) // 2 + f * (f + 1) // 2 + f * (f + 1) // 2 * nn):
        control = nn * (nn + 1) // 2 * k * (k + 1) // 2 + f * (f + 1) // 2 +  nn  * f * (f + 1) // 2
        ans = k
print(ans)
```

Задача III.1.1.4. Прямоугольное хеширование (25 баллов)

В задачах на быструю обработку больших объемов данных важную роль играет хеширование. Если в общих словах, то хеширование — это некоторый способ поставить каждому объекту некоторое достаточно случайное, быстро вычислимое число (хеш) из относительно не очень большого интервала (например от 0 до 10^{18}). Под объектами могут пониматься любые, доступные для обработки, например записи в базе данных, строки, матрицы и т. п. При этом обратного восстановления по хешу исходного объекта не требуется. Нужно только, чтобы для двух идентичных объектов метод всегда выдавал одинаковые хеши, а для двух разных очень желательно, чтобы метод выдавал различные хеши. Второе требование на самом деле не может быть выполнено в полном объеме, так как количество больших, например матриц, заведомо больше 10^{18}. Но так как обработать мы можем не очень большое количество таких матриц, то вероятность совпадения хеша у разных объектов (коллизии) при правильном методе построения хеша очень мала.

В данной задаче потренируемся быстро строить хеши для достаточно больших матриц, состоящих из однозначных чисел от 0 до 9. Выберем три простых числа P_1, P_2 и P в пределах от 2 до 10^{18}.

Далее будем считать, что нумерация строк от 0 до $n-1$, нумерация столбцов от 0 до $m-1$. Пусть нам дана прямоугольная матрица A из n строк и m столбцов, на пересечении i-ой строки и j-го столбца в которой стоит число $A_{i,j}$. Тогда поставим этому числу на этой позиции в соответствие другое число $Z_{i,j} = (A_{i,j} \cdot P_1^i \cdot P_2^j) mod\, P$, где mod — это остаток от деления. Тогда произвольной подматрице исходной матрицы A поставим в соответствие сумму $Z_{i,j}$ по всем позициям в этой подматрице. Сумма также берется по модулю P. Однако если две одинаковые подматрицы находятся в разных позициях, то эти суммы для них все еще будут различны. Это можно скорректировать, если каждую «сдвинуть» в правый нижний угол, домножив сумму на некоторые степени P_1 и P_2. Более точно: пусть левый верхний угол подматрицы размера $h \times w$ ($h \leqslant n$ строк и $w \leqslant m$ столбцов) находится в x-ой строке и y-м столбце. Тогда хеш этой подматрицы вычислим как сумму по всем ее $Z_{i,j}$, домноженную на P_1^{n-h-x} и на P_2^{m-w-y} по модулю P. Для лучшего понимания процесса смотрите примеры.

Основная сложность этой задачи (помимо сложности самого условия) заключается в том, что хеш нужно находить для большого числа достаточно больших подматриц, то есть в больших тестах каждый раз пробежаться по подматрице и посчитать ее хеш по определению не получится.

Формат входных данных

В первой строке находятся через пробел три различных простых числа P_1, P_2 и P, каждое в пределах от 2 до 10^{18}. Во второй строке находятся через пробел два числа n и m — число строк и столбцов исходной матрицы A ($1 \leqslant n, m \leqslant 500$). В следующих n строках содержится по m цифр от 0 до 9 (цифры записаны без пробелов между ними) — содержимое матрицы. В последней строке после матрицы содержатся через пробел два числа h и w ($1 \leqslant h \leqslant n$, $1 \leqslant w \leqslant m$) — размер искомых подматриц.

Формат выходных данных

Вывести $n - h + 1$ строк по $m - w + 1$ чисел через пробел в каждой — хеши всех подматриц размера $h \times w$. Хеш каждой матрицы располагается в соответствии с расположением ее левого верхнего угла.

Пояснения к примеру

Пояснение к примерам. Можно заметить, что в примере 1 есть четыре подматрицы 2×3, среди них две одинаковые, имеющие вид:

504

047

Соответственно, для этих двух одинаковых подматриц их хеши совпадают и равны 1605. Для попарно различных матриц хеши не совпадают.

Во втором примере есть две одинаковые подматрицы:

11011

01110

с левыми верхними углами в $(0, 0)$ и $(1, 2)$ у которых хеши равны 83793 и еще есть три одинаковые подматрицы:

10111

11101

с левыми верхними углами в $(0, 1)$, $(2, 1)$ и $(3, 3)$ у которых хеши равны 399453.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
137 157 2027
3 4
3504
5047
0476
2 3

Стандартный вывод
1346 1605
1605 1451

Пример №1

Стандартный ввод
16769023 22447 1046527
5 8
11011110
01110110
01011101
11110111
00111101
2 5

Стандартный вывод
83793 399453 907550 997749
824324 433971 83793 429774
542305 399453 937871 433971
387715 816688 197340 399453

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;

ll M1, M2, M;

vector<ll> S1, S2;
vector<string> v;
vector<vector<ll> > H;
int n, m, h, w;

inline ll binprod (ll a, ll n) {
    ll res = 0LL;
    while (n) {
            res = (res + (n%2) * a) % M;
        a = (2LL * a) % M;
```

```
        n /= 2;
    }
    return res;
}

inline ll hsh(int x1, int y1, int x2, int y2){
    ll r = H[x2][y2];
    if(x1 > 0) r = (r + (M -  H[x1-1][y2])) % M;
    if(y1 > 0) r = (r + (M -  H[x2][y1-1])) % M;
    if(x1 > 0 && y1 > 0) r = (r + H[x1-1][y1-1]) % M;

    return r;
}

inline ll hrt(int x1, int y1, int h, int w){
    int x2 = x1 + h - 1;
    int y2 = y1 + w -1;
    ll ty =  hsh(x1, y1, x2, y2);
    ty = binprod(ty, S1[n - h - x1]);
    ty = binprod(ty, S2[m - w - y1]);

    return ty;
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    cin >> M1 >> M2 >> M;
    cin >> n >> m;
    v.resize(n);
    for(int i = 0; i < n; i++) cin >> v[i];
    cin >> h >> w;

    ll st = 1;
    for(int i = 0; i < 510; i++){
        S1.push_back(st);
        st = binprod(st, M1);
    }

    st = 1;
    for(int i = 0; i < 510; i++){
        S2.push_back(st);
        st = binprod(st, M2);
    }

    H.resize(n, vector<ll>(m));
    for(int i = 0; i < n; i++)
        for(int j = 0; j < m; j++){
            H[i][j] = binprod(binprod((v[i][j] - '0'), S1[i]),  S2[j]);
            if(i > 0) H[i][j] = (H[i][j] + H[i-1][j]) % M;
            if(j > 0) H[i][j] = (H[i][j] + H[i][j-1]) % M;
            if(i > 0 && j > 0) H[i][j] = (H[i][j] + (M - H[i-1][j-1])) % M;
    }

    for(int i = 0; i < n - h + 1; i++){
        for(int j = 0; j < m - w + 1; j++)
        cout<<hrt(i, j, h, w)<<' ';
        cout<<endl;
    }
}
```

Задача III.1.1.5. Наибольшая перевернутая подстрока (35 баллов)

Применим теперь идеи, упомянутые в предыдущей задаче.

Дана строка, состоящая из маленьких латинских букв. Нужно найти наибольшую по длине ее подстроку, которая встречается как в прямом, так и в перевернутом виде. Эти две подстроки могут пересекаться и даже совпадать.

Формат входных данных

На вход подается единственная непустая строка, состоящая из маленьких латинских букв от a до z.

Длина строки не превосходит 10^5 символов.

Формат выходных данных

Вывести подстроку исходной строки, такую, что ее перевернутый вариант также является подстрокой, при этом длина этой подстроки максимально возможная. Если различных максимальных вариантов несколько, вывести самую левую такую подстроку.

Пояснение к примерам.

В примере 1 есть две подстроки длины 5, которые содержатся в исходной строке как в прямом, так и в обратном виде. Это подстрока «aobab», и подстрока «obabo». Подстрок большей длины с такими свойствами нет. Первая из них встречается раньше второй, поэтому она и будет ответом.

В примере 2 единственной подстрокой длины 7 с указанным свойством является палиндром «aobaboa».

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
`baobabobbaboa`

Стандартный вывод
`aobab`

Пример №2

Стандартный ввод
`baobabaobaboa`

Стандартный вывод
`aobaboa`

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;

ll P1 = 1073676287;
ll P = 1125899839733759;
vector<ll> H, S1, RH;
string s;
int n;

inline ll binprod (ll a, ll n) {
    ll res = 0LL;
    while (n) {
            res = (res + (n%1024) * a) % P;
        a = (1024LL * a) % P;
        n /= 1024;
    }
    return res;
}

inline ll hsh(int x1, int x2, vector<ll> &H){
    ll r = H[x2];
    if(x1 > 0) r = (r + (P -  H[x1-1])) % P;

    return r;
}

inline ll hsub(int x1, int w, vector<ll> &H){
    int x2 = x1 + w - 1;
    ll ty =  hsh(x1, x2, H);
    ty = binprod(ty, S1[n - w - x1]);

    return ty;
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    cin >> s;
    n = s.size();
    string rs = s;
    reverse(rs.begin(), rs.end());

    ll st = 1;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        S1.push_back(st);
        st = binprod(st, P1);
    }

    H.resize(n);
    RH.resize(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        H[i] = binprod((s[i] - 'a' + 1), S1[i]);
        if(i > 0) H[i] = (H[i] + H[i-1]) % P;

```

```
        RH[i] = binprod((rs[i] - 'a' + 1), S1[i]);
        if(i > 0) RH[i] = (RH[i] + RH[i-1]) % P;
    }

    int mxL = 1, rD = 0;
    int L = 1, R = n + 1;
    while(R - L > 1){
        ll M = (R + L) / 2;

        set<ll> mask;
        bool p = 0;
        for(int i = 0; i < n - M + 1; i++){
            mask.insert(hsub(i, M, RH));
        }

        for(int i = 0; i < n - M + 1; i++){
            ll y = hsub(i, M, H);

            if(mask.find(y) != mask.end()){
                p = 1;
                if(M > mxL){
                    mxL = M;
                    rD = i;
                }
                break;
            }
        }
        if(p) L = M; else R = M;
    }

    cout<<s.substr(rD, L);
}
```

Физика. 8–9 класс

Задача III.1.2.1. Пена (30 баллов)

Материал пониженной плотности представляет собой полимер с собственной плотностью $\rho_0 = 1200$ кг/м^3, в объеме которого благодаря особой технологии спекания образуется множество сферических полостей радиусом $R = 5$ мм. Центры полостей расположены в случайном порядке равномерно по всему объему материала. Полости не перекрываются друг с другом.

1.1. Средняя плотность большого куска материала оказалась равна $\rho = 800$ кг/м^3. Определите долю объема, занимаемую полостями.

Решение

Если кусок материала достаточно велик — изменением его внешнего объема из-за наличия в нем полостей можно пренебречь. В этом случае средняя плотность находится непосредственно по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 V_{\text{м}}}{V} = \rho_0 \left(1 - \frac{V_{\text{п}}}{V}\right),$$

где $V_м$ — объем занимаемый самим материалом, а $V_п$ — общий объем полостей. Отсюда:

$$\frac{V_п}{V} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} = 1/3$$

Система оценки

1. Верно записано определение средней плотности — 4 балла.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

Ответ: 1/3.

1.2. Из большого куска материала вырезают куб со стороной a. Определите минимальное значение a, при котором куб начнет тонуть в масле с плотностью $\rho_1 = 840$ кг/м^3. Масло смачивает полимерную основу материала. Считать $R \ll a$.

Решение

Если куб будет достаточно маленьким, существенную роль начнут играть открытые полости на его границе, в которые будет заливаться масло. Найдем внешний объем куба со стороной a. Для этого заметим, что все полости, центры которых лежат на расстоянии меньше R от среза, окажутся открытыми. Объем этой приграничной области равен:

$$V' = a^3 - (a - 2R)^3 \approx 6a^2R$$

с учетом приближения $R \ll a$.

Как известно из прошлого пункта, треть этой области окажется занята полостями (в данном случае — открытыми). Таким образом общий внешний объем может быть найден по формуле:

$$V = a^3 - V'/3 \approx a^3 - 2a^2R$$

В то же время общая масса куба по-прежнему определяется полимером, занимающим треть от объема a^3. Таким образом:

$$\rho \approx \frac{2\rho_0 a^3}{3V} = \frac{2\rho_0 a^3}{3a^3 - 6a^2R} = \frac{2\rho_0 a}{3a - 6R}$$

Чтобы куб начал тонуть, его средняя плотность должна сравняться с плотностью масла. Таким образом получим:

$$\rho_1 \approx \frac{2\rho_0 a}{3a - 6R} \Rightarrow \rho_1(3a - 6R) = 2\rho_0 a \Rightarrow a = \frac{6R\rho_1}{3\rho_1 - 2\rho_0} = 21 \text{ см}$$

Система оценки

1. Показано, что масло будет наполнять открытые полости, за счет чего средняя плотность окажется выше, чем в прошлом пункте, — 2 балла.

2. Получено правильное выражение для объема открытых полостей, его доли или какой-либо аналогичной величины — 2 балла.
3. Найдена средняя плотность с учетом открытых полостей либо записана сила Архимеда, действующая на куб, — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.
6. Если вместо последних двух пунктов получено выражение, верно описывающее асимптотическую зависимость искомой величины от плотностей при $\rho_1 \to 2/3\rho_0$, но с неправильными коэффициентами — 1 балл.

Ответ: 21 см.

1.3. Из большого куска материала вырезают тонкий лист толщиной $d \ll R$. Измерения показывают, что общий периметр дырок в этом листе равен p. Во сколько раз изменится величина p, если увеличить общий объем, занимаемый полостями в толщине материала, в два раза, а радиус каждой полости при этом в два раза уменьшить?

Решение

Объем шарообразной полости пропорционален третьей степени ее радиуса $V \sim R^3$ Однако число полостей, попадающих на срез, пропорционально R^{-1}, следовательно общая площадь круглых дырок на срезе пропорциональна R^2. Это также следует из того, что при равномерном распределении полостей доля площади, занимаемая полостями, должна совпадать с объемной долей полостей во всем материале, так как материал можно представить как множество подобных плоских срезов. В то же время отношение площади круга к его длине окружности всегда равно $R/2$. Таким образом общий периметр дырок оказывается пропорционален $S/R \sim V/R$. Точные значения числовых коэффициентов в данном случае не играют роли, так как они сократятся при поиске отношения новой величины p' к исходной p.

Таким образом:

$$p' = \frac{R_0 V}{R V_0} p = 4p$$

Система оценки

1. Тем или иным способом обоснована пропорциональность площади дырок на срезе и занимаемого ими объема в материале — 2 балла.
2. Тем или иным способом обоснована связь между площадью и периметром дырок на срезе — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение, отражающее связь искомой величины с изменяемыми параметрами распределения дырок, — 2 балла.
4. Получено правильное численное отношение нового и старого периметров или эквивалентное выражение для самого периметра — 4 балла.

Ответ: $p' = 4p$.

Задача III.1.2.2. Волокна (40 баллов)

Композитный материал состоит из полимерной матрицы, армированной металлическими волокнами. Волокна располагаются внутри матрицы в достаточно случайном порядке, поэтому сопротивление между различными точками поверхности композита оказывается различно.

2.1. Измерения показали, что при подключении омметра к точкам A и B сопротивление композита оказывается равно $R_1 = 20\,\text{Ом}$, к точкам A и C — равно $R_2 = 40\,\text{Ом}$, а к точкам C и D — бесконечно. Чему равно сопротивление между точками B и D?

Решение

Сопротивление между точками C и D бесконечно. Следовательно, эти точки не соединены ни одним волокном. В то же время конечные сопротивления R_1 и R_2 означают, что точка C соединена с точкой A, а затем точка A — с точкой B. Таким образом любое конечное сопротивление между B и D означало бы, что есть путь по металлическим волокнам из C в D (C–A–B–D), но это противоречит бесконечности сопротивления между C и D. Таким образом $R_{BD} \to \infty$.

Система оценки

1. Указана связь между бесконечным сопротивлением и отсутствием соединения между точками — 3 балла.
2. Получен правильный ответ — 3 балла.
3. Убедительно доказан правильный ответ — 4 балла.

Ответ: $R_{BD} \to \infty$.

2.2. Если к точкам A и B подключить напряжение U, то между точками B и C возникает напряжение $U/4$. Определите сопротивление, которое покажет омметр между точками B и C.

Решение

Все сопротивления между точками A, B и C конечны. Они могут состоять из любого количества последовательно или параллельно соединенных проводников, которые в силу линейности закона Ома всегда могут быть сведены к некоторому постоянному отношению между напряжением на паре точек и силой тока, протекающей между ними, имеющему смысл эквивалентного сопротивления. Поскольку в данном пункте используются только данные три контакта, мы можем изобразить эквивалентную схему на рисунке III.1.1.

Поскольку подключение к точкам A и B напряжения U приводит к возникновению на резисторе R_{BC} напряжения $U/4$, мы можем записать, что по нижней ветви цепи течет ток:

$$I_{ACB} = \frac{U}{4R_{BC}} = \frac{U}{R_{AC} + R_{BC}}$$

Из последнего равенства непосредственно следует:

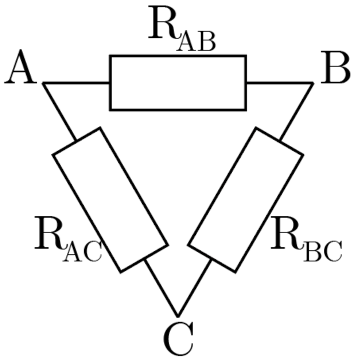


Рис. III.1.1: Схема соединения

$$R_{AC} = 3R_{BC}$$

Используя формулы последовательного и параллельного соединения и данные прошлого пункта, можно записать:

$$R_1 = \frac{R_{AB}(R_{BC} + R_{AC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} = \frac{4R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + 4R_{BC}},$$

$$R_2 = \frac{R_{AC}(R_{BC} + R_{AB})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} = \frac{3R_{BC}^2 + 3R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + 4R_{BC}}$$

Аналогично, искомое сопротивление R_3 выражается как:

$$R_3 = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{AC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} = \frac{3R_{BC}^2 + R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + 4R_{BC}}$$

Кратчайшим способом решения этой системы будет заметить, что знаменатели всех трех дробей совпадают, а числители подчиняются соотношению:

$$R_3 = R_2 - R_1/2 = 30 \text{ Ом}$$

Система оценки

1. Изображена схема эквивалентных сопротивлений — 1 балл.
2. Использована связь между напряжениями U и $U/4$: найдены соответствующие соотношения между сопротивлениями или распределениями токов — 2 балла.
3. Сопротивления R_1 и R_2 выражены через элементы эквивалентной схемы или соответствующие распределения токов и напряжений — по 1 баллу за сопротивление.
4. Искомое сопротивление выражено через элементы эквивалентной схемы или соответствующие распределения токов и напряжений — 2 балла.
5. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 1 балл.
6. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 30 Ом.

2.3. К точкам A и D подключили амперметр. Сопротивление между какими парами точек из набора A, B, C, D осталось неизменным?

Решение

Амперметр имеет малое собственное сопротивление, поэтому заведомо уменьшает сопротивление между точками A и D, которые он соединяет, а также между точками, соединенными через A и D опосредовано. Из первого пункта задачи мы знаем, что точка D не соединена ни прямо, ни через другие точки, ни с B, ни с C, ни, следовательно, с A. В то же время точка A соединена и с B, и с C.

Следовательно, сопротивление между точкой D и любой другой точкой четверки существенно упало (перестало быть бесконечным) после присоединения амперметра, в то же время никакие другие пары точек не оказались соединены новыми способами. Таким образом, остались неизменными сопротивления между всеми парами точек, не включавшими D.

Система оценки

1. Указано, что амперметр обладает малым внутренним сопротивлением — 2 балла.
2. Словами, ссылкой на прошлые пункты или рисунком описано, какие точки были соединены до подключения амперметра, — 2 балла.
3. Каждая верно указанная пара точек — 2 балла.
4. Каждая неверно указанная пара точек — минус 2 балла.

Ответ: AB, BC, AC.

2.4. Отключив все остальные приборы, к контактам A и C подключили напряжение $U = 30\,\text{В}$. Какая тепловая мощность N выделяется во всем объеме материала?

Решение

Эквивалентное сопротивление между точками A и C, как известно из первого пункта, равно R_2. Этой величины достаточно, чтобы найти общий ток при таком подключении:

$$I = \frac{U}{R_2}$$

и, применяя закон Джоуля – Ленца, получить общее тепловыделение:

$$N = UI = \frac{U^2}{R_2} = 22,5\,\text{Вт}$$

Система оценки

1. Указано, что в условиях данного подключения вся схема может быть заменена одним эквивалентным сопротивлением — 3 балла.

2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 4 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

Ответ: $22,5$ Вт.

Задача III.1.2.3. Склейка (30 баллов)

Композит состоит из двух слоев (А и В) с различными тепловыми свойствами, соединенных между собой тонким слоем специального клея. Достигая определенной критической температуры, клей начинает терять свои свойства, в результате чего композит быстро разрушается.

3.1. При испытаниях пластина из композита разделяет две камеры, в одной из которых удерживается постоянная температура $t_0 = 0°\text{C}$, а температура во второй плавно повышается. Первый эксперимент показал, что если повернуть композит стороной А к горячей камере, разрушение происходит при достижении температуры в ней $t_1 = 600°\text{C}$. Затем такую же пластину развернули к горячей камере стороной В, в результате чего выяснилось, что при такой установке разрушение происходит уже при достижении температуры $t_2 = 1200°\text{C}$. При какой температуре t произошло бы разрушение если бы эта температура поддерживалась в обеих камерах? Считайте, что нагревание происходит достаточно медленно, чтобы внутри материала устанавливалось равновесное распределение температур.

Решение

Тепловой поток через слой любого материала может быть выражен формулой:

$$\Phi = \frac{\varkappa S}{d}\Delta t,$$

где $\varkappa$ — теплопроводность материала, S — его площадь, d — толщина, а Δt — разница температур по разные стороны этого материала. Однако в условиях данной задачи разумно объединить большую часть этих величин в один коэффициент k:

$$\Phi = k\Delta t$$

В квазиравновесном процессе тепловые потоки через обе стороны композита должны совпадать. Обозначим температуру разрушения $t_{\text{кр}}$ и запишем баланс тепловых потоков в обоих описанных случаях:

$$k_A(t_1 - t_{\text{кр}}) = \Phi = k_B(t_{\text{кр}} - t_0) \qquad \text{(III.1.1)}$$

$$k_B(t_2 - t_{\text{кр}}) = \Phi = k_A(t_{\text{кр}} - t_0) \qquad \text{(III.1.2)}$$

Исключая из этих уравнений $k_{A,B}$, получим:

$$(t_2 - t_{\text{кр}})(t_1 - t_{\text{кр}}) = (t_{\text{кр}} - t_0)^2$$

Раскрывая скобки, и сокращая в обеих частях уравнения $t_{кр}^2$, получим:

$$t_1t_2 - t_{кр}(t_2 + t_1) = t_0^2 - 2t_0t_{кр},$$

откуда окончательно:

$$t_{кр} = \frac{t_1t_2 - t_0^2}{t_1 + t_2 - 2t_0} = 400°\text{C}$$

Система оценки

1. Записана пропорциональность теплового потока разнице температур — 2 балла.
2. Записано равенство тепловых потоков через обе стороны при квазиравновесном нагреве — 2 балла.
3. На основании прошлых двух пунктов составлена полная система уравнений, позволяющая найти $t_{кр}$, — 3 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 1 балл.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 400°C.

3.2. При какой температуре горячей камеры начнется разрушение пластины из композита, состоящей из трех слоев B-A-B, соединенных в этой последовательности тем же клеем? Одна сторона пластины по-прежнему поддерживается при температуре t_0.

Решение

Действуя аналогично прошлому пункту, можно заметить, что общий поток теплоты через трехслойный композит:

$$\Phi = k_B\Delta t_1 = k_A\Delta t_2 = k_B\Delta t_3, \tag{III.1.3}$$

где $\Delta t_{1,2,3}$ — перепады температур на соответствующих слоях. Из уравнений (III.1.1), (III.1.2) видно, что:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{t_2 - t_{кр}}{t_1 - t_{кр}} = 2$$

и

$$\Delta t_1 = \Delta t_3$$

Обозначим искомую температуру θ. Тогда:

$$\theta = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \Phi\left(\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right) = \frac{5\Phi}{2k_B}$$

В то же время температуры, возникающие в слоях клея, будут равны Δt_1 и $\theta - \Delta t_1$. Вторая будет, разумеется, выше, поэтому разрушение произойдет как только выполнится равенство:

$$\theta - \Delta t_1 = t_{\text{кр}}$$

В то же время из (III.1.3) следует $\Delta t_1 = \Phi/k_B$. Таким образом:

$$\Delta t_1 = \frac{\Phi}{k_B} = \frac{2}{5}\theta \Rightarrow t_{\text{кр}} = \theta - \Delta t_1 = \frac{3}{5}\theta \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}t_{\text{кр}} \approx 667°\text{C}$$

Система оценки

1. Получено численное или аналитическое соотношение между теплопроводностями слоев А и В или эквивалентными отношениями перепадов температур — 3 балла.
2. Найдена связь между искомой температурой и температурой разрушения через теплопроводности слоев или эквивалентные им выражения — 3 балла.
3. Указано, что разрушение может произойти на двух склейках, и правильно показано, на какой оно произойдет раньше — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 667°C.

3.3. В новом эксперименте отдельно взятая пластина А прислоняется одной стороной к большому кубу льда, а второй устанавливается в окно горячей камеры, в которой поддерживается постоянная температура t_2. В результате куб полностью тает через $\tau = 10$мин. Через какое время расплавится куб, если установить в окно горячей камеры отдельно взятую пластину В, а температуру в ней опустить до t_1? Теплообменом куба льда с окружающей средой через остальные грани можно пренебречь.

Решение

Температура тающего льда постоянна и равна t_0. Для того, чтобы он растаял, необходимо передать ему

$$Q = \lambda m$$

теплоты, на что при мощности теплового потока Φ уйдет время

$$\tau' = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\lambda m}{\Phi}$$

времени. Выражая, как в прошлых пунктах, $\Phi = k\Delta t$, получим:

$$\tau = \frac{\lambda m}{k_A(t_2 - t_0)}$$

$$\tau' = \frac{\lambda m}{k_B(t_1 - t_0)} = \tau\frac{k_A(t_2 - t_0)}{k_B(t_1 - t_0)}$$

С учетом (III.1.1), (III.1.2):

$$\tau' = \tau\frac{(t_2 - t_0)(t_2 - t_{\text{кр}})}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_{\text{кр}})} = 40\ \text{мин}$$

Система оценки

1. Записано выражение для теплоты плавления куба или словами описано эквивалентное рассуждение — 2 балла.
2. Получена связь теплоты плавления с тепловым потоком и временем — 3 балла.
3. Найдено соотношение тепловых потоков или времен плавления через разные пластины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 40 мин.

Физика. 10–11 класс

Задача III.1.3.1. Изгиб и сжатие (30 баллов)

На испытательном стенде проводится тестирование нового композита. Образец представляет собой стержень квадратного сечения длиной $L_0 = 1$ м и толщиной $d = 1$ см. По результатам тестирования на сжатие-растяжение при комнатной температуре T_0 удалось построить следующую таблицу зависимости длины стержня L от прикладываемой к нему на растяжение вдоль длинной стороны силы F (отрицательные значения означают сжатие):

F, кН	−40	−30	−20	−10	0	10	20	> 20
L, см	99,2	99,4	99,6	99,8	100	100,2	100,4	разрыв

1.1. Образец закрепляется между тремя валиками как показано на рисунке III.1.2. Крайние валики, расположенные на концах образца, двигаются в горизонтальной плоскости так, чтобы все время находиться на концах образца, а средний медленно опускается вниз. При каком смещении x среднего валика относительно начального положения на рисунке образец начнет разрушаться если известно, что прогибаясь, он принимает форму дуги окружности?

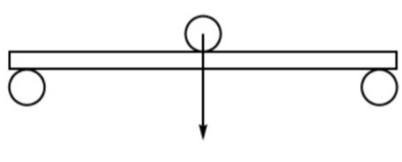


Рис. III.1.2: Схема к задаче

Решение

Считая, что образец изгибается по дуге окружности, определим связь между радиусом R этой окружности и искомым смещением x. Пусть дуга окружности имеет угловую меру φ (в радианах). Тогда:

$$L_0 = R\varphi$$

$$x = R\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = R\left(1 - \cos\left(\frac{L_0}{2R}\right)\right) \tag{III.1.4}$$

Заметим из таблицы, что коэффициент жесткости материала на сжатие и растяжение одинаков, а значит при изгибе балки по среднему радиусу R ее внутренняя сторона будет иметь радиус $R - d/2$, а внешняя — $R + d/2$. Из таблицы также видно, что разрушение произойдет за счет разрыва внешней, растягивающейся стороны, когда ее длина $L = R\varphi$ достигнет критического значения $L_m = 100,4$ см. Можно записать:

$$L_m = (R + d/2)\varphi = L_0\frac{R + d/2}{R}$$

Из этого выражения легко получить радиус дуги:

$$R = \frac{L_0 d}{2(L_m - L_0)}$$

Подставляя его в (III.1.4), получим окончательно:

$$x = \frac{L_0 d}{2(L_m - L_0)}\left(1 - \cos\left(\frac{L_m - L_0}{L_0 d}\right)\right) \approx 9,9 \text{ см}$$

Система оценки

1. Верно истолкована причина разрушения образца: разрыв внешней стороны — 3 балла.
2. Найден минимальный радиус кривизны балки — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.
5. Верным также считается аналитическое выражение, полученное в приближении $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, если его применимость обоснована. В связи с этим допускается численный ответ 10 см.

Ответ: $9,9$ см.

1.2. Коэффициент линейного теплового расширения образца составляет $\alpha = 2.5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ Образец зажимается между не деформируемыми стенками, расстояние между которыми постоянно и равно L_0. Измерения показали, что при нагреве образца на $\Delta T = 200$ K возникшее в нем внутреннее напряжение оказалось равно $P = 150$ МПа. Чему равен коэффициент жесткости стержня при температуре $T_0 + \Delta T$?

Решение

Обозначим L_1 равновесную длину стержня после нагрева. Из определения коэффициента теплового расширения следует:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Внутреннее механическое напряжение имеет размерность давления и связано с силой, с которой стержень действует на стенки, соотношением:

$$F = Pd^2$$

Коэффициент жесткости есть отношение этой силы к удлинению стержня:

$$k_1 = \frac{F}{\Delta l} = \frac{Pd^2}{\alpha L_0 \Delta T} = 3 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$$

Система оценки

1. Записана равновесная длина нагретого стержня, используемая в законе Гука, или аналогичное ей удлинение — 3 балла.
2. Записана связь между силой и внутренним напряжением — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: $3 \cdot 10^6$ Н/м.

1.3. Считая зависимость жесткости материала от температуры линейной, найдите температуру T, до которой необходимо нагреть стержень в условиях прошлого пункта, чтобы давление, оказываемое им на стенки, было максимально.

Решение

Коэффициент жесткости k_0 при температуре T_0 может быть непосредственно найден из таблицы:

$$k_0 = \frac{F}{\Delta L} = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$$

Коэффициент жесткости k_1 для температуры $T_0 + \Delta T$ был найден в прошлом пункте. Зная, что зависимость $k(T)$ линейная, мы можем записать:

$$k(T) = k_0 + a(T - T_0)$$

и найти коэффициент a:

$$a = \frac{k_1 - k_0}{\Delta T}$$

Теперь выразим давление стержня на стенки в зависимости от его температуры:

$$P = \frac{F}{d^2} = \frac{k_0(T - T_0) + a(T - T_0)^2}{d^2}$$

Числитель этой дроби представляет собой квадратную функцию температуры, имеющую максимум при:

$$T = T_0 + \frac{k_0}{2a} = T_0 + \frac{k_0 \Delta T}{2(k_1 - k_0)} = T_0 + 250\,\text{K}$$

Система оценки

1. Найдены два коэффициента жесткости при разных температурах — по 2 балла за каждый.
2. Выражена зависимость давления или силы от температуры — 2 балла.
3. Верно записано условие максимума давления — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое или смешанное численно-аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.

Ответ: $T_0 + 250\,\text{K}$.

Задача III.1.3.2. Теплотрубки (40 баллов)

Для отведения больших количеств тепла используются композитные теплотрубки — медные трубки, заполненные легко кипящей жидкостью, которая, закипая на одном (горячем) конце и конденсируясь на другом (холодном) конце такой трубки, может передавать теплоту существенно быстрее, чем это происходит при обычном теплообмене. Однако, теплопроводность теплотрубок может существенно падать, если температура слишком велика (в этом случае вся жидкость переходит в пар) или, напротив, слишком мала (в этом случае наполнитель теплотрубки останется жидким или даже затвердеет).

В эксперименте используются одинаковые теплотрубки со следующими характеристиками: в диапазоне температур от $t_0 = 0°\text{C}$ до $t_1 = 100°\text{C}$ мощность Φ теплового потока через трубку связана с разницей температур Δt на ее концах соотношением $\Phi = k\Delta t$, где $k = 90\,\text{Вт/К}$. Если среднее арифметическое температур на концах трубки оказывается вне этого диапазона, коэффициент k меняется на $k_0 = 10\,\text{Вт/К}$. Потерями тепла через боковые стороны трубок во всех пунктах можно пренебречь.

2.1. Тепловой резервуар A соединен теплотрубкой с тепловым резервуаром B. В резервуаре A кипит вода, причем каждую минуту испаряется $V = 0,03$л. Определите температуру, поддерживаемую в резервуаре B. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,26\,\text{МДж/кг}$, плотность воды $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$.

Решение

Для того чтобы вода продолжала кипеть, необходимо подводить к ней тепловую мощность:

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = L\rho \frac{V}{\Delta t},$$

где $\Delta t = 60$ с.

Поскольку теплота всегда передается от более горячего тела к более холодному, мы можем быть уверены, что температура резервуара B выше температуры кипения воды, а значит средняя температура теплотрубки выходит за пределы рабочего диапазона. Это значит, что мы можем записать для мощности соотношение:

$$\Phi = L\rho \frac{V}{\Delta t} = k_0(t_2 - t_1)$$

Отсюда окончательно находим t_2:

$$t_2 = \frac{L\rho V}{\Delta t k_0} + t_1 \approx 213°\mathrm{C}$$

Система оценки

1. Показано, что температура трубки лежит вне ее рабочего диапазона — 2 балла.
2. Записано выражение для мощности, необходимой для поддержания кипения, — 3 балла (2 балла если найдена только энергия, но не мощность).
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 213°C.

2.2. Тепловой резервуар B соединен с тепловыми резервуарами A и C; с каждым — одной теплотрубкой. В резервуаре A поддерживается постоянная температура $t_A = -100°\mathrm{C}$, в резервуаре C — постоянная температура $t_C = 200°\mathrm{C}$. Какая температура может установиться в тепловом резервуаре B, изолированном от окружающей среды (помимо трубок)?

Решение

Этот и последующие пункты задачи проще всего решаются при помощи термоэлектрической аналогии. Действительно, если заменить потоки тепла Φ на силы тока I, разницы температур ΔT — на напряжения U, а коэффициенты теплопроводности k — на обратные сопротивления $1/R$, законы с точностью превратятся в законы, описывающие электрические цепи. Эту аналогию можно проводить, а можно непосредственно рассуждать от потоков тепла и распределения температур — оба подхода считаются верными.

Рассуждая в этом стиле, мы можем воспользоваться формулой последовательного соединения и вычислить общий поток тепла из резервуара A в C:

$$\Phi = (t_C - t_A)\left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B}\right)^{-1} = \frac{(t_C - t_A)k_A k_B}{k_A + k_B},$$

а значит, может быть найдена температура резервуара B:

$$t_B = t_A + \frac{\Phi}{k_A} = t_A + \frac{(t_C - t_A)k_B}{k_A + k_B} \tag{III.1.5}$$

Дальнейшие рассуждения требуют внимательности. Если предположить, что теплопроводности обеих трубок одинаковы, выражение (III.1.5) даст среднее арифметическое их температур, то есть 50°. В этом случае обе трубки окажутся вне рабочего диапазона температур, а значит предположение о равенстве теплопроводностей выполнится, и данный ответ действительно возможен на практике.

Если же предположить, что одна из трубок попала в рабочий диапазон, а другая — нет, то подстановка теплопроводностей в выражение (4.5) покажет, что перепады температур должны разделиться в пропорции $k : k_0 = 9 : 1$, причем больший перепад температур возникает на более теплопроводной трубе. В этих случаях температура резервуара B должна составлять $-70°$C или $170°$C. В обоих случаях трубка с малым перепадом температур не попадет в рабочий диапазон, что противоречит исходному предположению. Таким образом окончательно:

$$t_B = \frac{t_A + t_C}{2} = 50°\text{C}$$

Система оценки

1. Доказано, что трубки не могут находиться в разных температурных режимах — 2 балла.
2. С помощью термоэлектрической аналогии или прямого подсчета найден тепловой поток через трубки — 4 балла. Этот пункт также может быть решен из соображений симметрии, но такие рассуждения засчитываются, только если зачтен прошлый пункт. Если рассуждения прошлого пункта проведены качественно и неубедительно, использование симметрийных соображений оценивается в 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 50°C.

2.3. Шесть тепловых резервуаров соединены так, как это изображено на рисунке III.1.3. Температуры резервуаров A, B, C, D поддерживаются равными $t_A = 5°$C, $t_B = 35°$C, $t_C = 65°$C, $t_D = 95°$C соответственно, резервуары M и N изолированы от окружающей среды (помимо трубок). Определите мощность теплового потока в сечении трубки MN.

Решение

Снова воспользуемся термоэлектрической аналогией. В узлах M и N можно записать равенство входящих и выходящих потоков тепла:

$$\Phi_{CN} + \Phi_{DN} = \Phi_{MN} = \Phi_{MA} + \Phi_{MB}$$

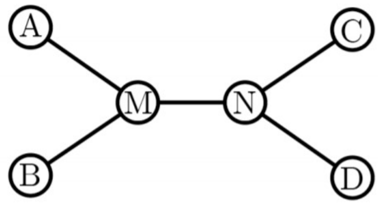


Рис. III.1.3: Схема соединения

Поскольку все температуры задачи лежат в рабочем диапазоне, потоки тепла выше легко выразить через температуры:

$$k(t_C - t_N) + k(t_D - t_N) = k(t_N - t_M) = k(t_M - t_A) + k(t_M - t_B),$$

откуда:

$$2t_N - t_M = t_C + t_D,$$

$$2t_M - t_N = t_A + t_B$$

Вычитая второе равенство из первого, получим:

$$2(t_N - t_M) = t_C + t_D - t_A - t_B$$

что позволяет выразить окончательный поток теплоты:

$$\Phi_{MN} = k(t_N - t_M) = k\frac{t_C + t_D - t_A - t_B}{2} = 5400\,\text{Вт}$$

Система оценки

1. Указано, что все трубки находятся в рабочем диапазоне температур — 1 балл.
2. Записано равенство входящих и выходящих потоков мощности в узлах M, N или эквивалентное утверждение — 2 балла.
3. Верно записаны связи между температурами в узлах и потоками через соответствующие трубки — 3 балла (меньше, если верно записана только часть связей).
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 540 Вт.

2.4. Четыре тепловых резервуара A, B, C, D находятся в вершинах тетраэдра (треугольной пирамиды), и каждый соединен с каждым другим одной теплотрубкой. Резервуар A поддерживается при постоянной температуре $t_A = 10°\text{C}$, к резервуару B постоянно подводится $P = 14,4$ кВт тепла, резервуары C и D изолированы от окружающей среды (помимо трубок). Определите температуры этих двух резервуаров если известно, что все температуры в системе лежат в пределах рабочего диапазона теплотрубок.

Решение

Снова воспользуемся термоэлектрической аналогией и заметим, что подключение резервуаров C и D одинаковое. Следовательно, их температуры будут равны, а тепловой поток между ними отсутствует. Тогда задача сводится к поиску эквивалентного сопротивления довольно простой схемы:

$$k_{\text{общ}} = k_{AB} + \frac{k_{AC}k_{CB}}{k_{AC} + k_{CB}} + \frac{k_{AD}k_{DB}}{k_{AD} + k_{DB}}$$

Поскольку все температуры лежат в рабочем диапазоне, все коэффициенты теплопроводности в этом выражении равны k, и все выражение сводится к

$$\frac{P}{t_B - t_A} = k_{\text{общ}} = 2k,$$

что позволяет выразить температуру в точке B:

$$t_B = t_A + \frac{P}{2k}$$

Точки C и D соединены с A и B одинаковыми теплотрубками, работающими в одном режиме, поэтому их температуры просто равны среднему арифметическому t_A и t_B:

$$t_C = t_D = t_A + \frac{P}{4k} = 50°\text{C}$$

Система оценки

1. Указано, что температуры резервуаров C и D равны, а поток тепла между ними отсутствует — 3 балла.
2. Прямым доказательством или термоэлектрической аналогией обоснована общая теплопроводность цепи или эквивалентное ей уравнение — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 50°C.

Задача III.1.3.3. Метаматериал (30 баллов)

Композиты, структурированные на очень маленьких пространственных масштабах, позволяют создавать метаматериалы — материалы, физические свойства которых определяются главным образом структурой, а не составом. Важную роль такие материалы играют в оптике, позволяя создавать среду с практически любыми желаемыми оптическими свойствами.

3.1. На одну точку пластинки из метаматериала падают два лазерных луча: красный под углом 3α и синий под углом 2α. Преломляясь, оба луча начинают распространяться внутри пластинки как один, идущий под углом преломления α. Как должны относиться показатели преломления материала для красного и синего света, чтобы описанная ситуация реализовывалась при $\alpha = 20°$?

Решение

Запишем закон Снеллиуса для двух показателей преломления $n_к$ и $n_с$ для красного и синего лучей соответственно:

$$\sin 3\alpha = n_к \sin\alpha$$

$$\sin 2\alpha = n_с \sin\alpha$$

Простым делением этих выражений друг на друга, получим итоговое выражение:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{n_к}{n_с} \approx 1,35$$

Система оценки

1. Записаны законы Снеллиуса для красного и синего лучей — по 2 балла за луч.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

Ответ: $1,35$.

3.2. Из описанного в прошлом пункте материала изготовлена тонкая собирающая линза. На расстоянии $a = 30$ см от ее плоскости установлен красный диод, четкое изображение которого получено на плоском, параллельном линзе экране, также отстоящем от линзы на расстояние a. На каком расстоянии от красного диода необходимо установить синий, чтобы его четкое изображение можно было увидеть на том же экране? В этом и следующем пунктах считайте, что все лучи проходят через линзу под малыми углами падения.

Решение

В пределе малых углов конкретное положение источника на плоскости, параллельной линзе, не влияет на расстояние от плоскости линзы до его изображения, поэтому для простоты будем считать, что все источники и изображения находятся на главной оптической оси линзы.

При преломлении луча (падающего из воздуха) линзе, ее оптическая сила (в приближении малых углов) пропорциональна $(n-1)$. Это утверждение может считаться известным законом оптики или доказано через закон Снеллиуса. Запишем формулу тонкой линзы для красного диода:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow F = a/2$$

Формула тонкой линзы для синего диода, где b — расстояние от синего диода до экрана.

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{F'a}{a - F'} \tag{III.1.6}$$

Как мы уже сказали:

$$F' = F\frac{n_{\text{к}} - 1}{n_{\text{с}} - 1}$$

Условия прошлого пункта позволяют выразить $n_{\text{к, с}}$:

$$F' = F\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \frac{a}{2}\left(\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}\right)$$

Подставляя эти формулы в (III.1.6) и сокращая знаменатели, получим:

$$b = a\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{2\sin 2\alpha - \sin 3\alpha - \sin\alpha}$$

Окончательно, искомое расстояние между диодами:

$$d = b - a = a\frac{2(\sin 3\alpha - \sin 2\alpha)}{2\sin 2\alpha - \sin 3\alpha - \sin\alpha} \approx 1,7\text{ м}$$

Система оценки

1. Указана зависимость оптической силы или фокусного расстояния линзы от показателя преломления — 2 балла.
2. Записаны формулы тонкой линзы для красного и синего диода — по 2 балла за диод.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.
5. Если вместо расстояния между диодами ученик нашел расстояние от диода до линзы — прошлые два пункта оцениваются по 1 баллу.

Ответ: $1,7$ м.

3.3. Одним из самых необычных свойств, которыми могут обладать метаматериалы, является отрицательный показатель преломления. На каком расстоянии от линзы из прошлого пункта задачи оказалось бы изображение красного диода, если бы ее изготовили из материала с таким же по модулю, но противоположным по знаку показателем преломления? Геометрия линзы и расположение источника остаются неизменными.

Решение

Снова заметим, что оптическая сила линзы пропорциональна величине $(n-1)$. Для красного диода:

$$n - 1 = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - 1 = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

Для метаматериала с отрицательным показателем преломления $-n$:

$$-n - 1 = -\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - 1 = \frac{-\sin 3\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

Таким образом, фокусное расстояние «металинзы»:

$$F' = F\frac{-n-1}{n-1} = \frac{a}{2}\left(\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha - \sin 3\alpha}\right)$$

Обратим внимание, что эта величина отрицательна, то есть полученная линза окажется рассеивающей. Тем не менее, расстояние от нее до изображения (мнимого) по-прежнему можно найти по формуле тонкой линзы:

$$b = \left|\frac{F'a}{a - F'}\right| = \left|\frac{(a^2/2)(\sin \alpha + \sin 3\alpha)/(\sin \alpha - \sin 3\alpha)}{a - (a/2)(\sin \alpha + \sin 3\alpha)/(\sin \alpha - \sin 3\alpha)}\right| = a\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{3\sin 3\alpha - \sin \alpha} \approx 16 \text{ см}$$

Система оценки

1. Указана зависимость оптической силы или фокусного расстояния линзы от показателя преломления — 3 балла.
2. Записана формула тонкой линзы — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Ответ: 16 см.