Заключительный этап

Индивидуальный предметный тур

Информатика. 8-11 класс

Задача III.1.1.1. Перепад глубины (100 баллов)

Автономный необитаемый подводный аппарат проплыл по заданной траектории, записав последовательность целых чисел a_i — глубину своего погружения в метрах на i-й секунде.

Известно, что за одну секунду глубина погружения не может измениться более чем на d метров в большую или меньшую сторону. Определение глубины не всегда работает точно, из-за чего это условие может быть нарушено в исходной последовательности. Необходимо очистить данные, удалив из них как можно меньше элементов.

Требуется написать программу, которая по данным a_i и d определит наименьшее возможное количество элементов, которые нужно удалить из последовательности a_i чтобы разность рядом стоящих элементов в оставшейся последовательности по модулю не превосходила d.

Формат входных данных

Входные данные содержат целые числа n и d — количество измерений и максимальный перепад глубины. Далее следует n целых чисел a_i — измерения глубины.

Формат выходных данных

Выходные данные должны содержать единственное целое число — наименьшее количество удаляемых элементов.

Ограничения

$1 \leqslant n \leqslant 20000,\ 0 \leqslant d \leqslant 1000,\ 0 \leqslant a_i \leqslant 10^9.$

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 4 10 15 14

Стандартный вывод
1

Решение

Задача решается методом динамического программирования.

Пусть dp_i — минимальное количество элементов, которые нужно удалить, чтобы элементы на префиксе с 1-го по i-й имели перепад не более d, и при этом элемент i остался в последовательности.

Тогда $dp_i = 0$ и $dp_i = \min\limits_{j=\overline{1,i-1}} dp_j + i_j - 1, i = \overline{2,n}$.

следует также учесть возможность удаления элементов в суффиксе последовательности, поэтому окончательный ответ равен $\min\limits_{i=\overline{1,n}} dp_i + n - i$

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <vector>

int main() {
    int n, d;
    std::cin >> n >> d;
    std::vector<int> a;
    a.resize(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) std::cin >> a[i];
    std::reverse(a.begin(), a.end());
    std::vector<int> dp;
    dp.resize(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        dp[i] = i;
        for (int j = 0; j < i; ++j) {
            int v = dp[j] + i - j - 1;
            if (std::abs(a[i] - a[j]) <= d && v < dp[i])
                dp[i] = v;
        }
    }
    int m = dp[n - 1];
    for (int i = 0; i < n - 1; ++i)
        m = std::min(dp[i] + n - i - 1, m);
    std::cout << m;
    return 0;
}
}
```

Задача III.1.1.2. Отладка шарика (100 баллов)

Юный программист Вася решил разработать собственную платформу виртуальной реальности. Для начала он реализовал вывод пустой черной сцены с единственным красным шаром. Однако в алгоритме вывода шара Вася допустил ошибки, из-за которых шар не всегда выводился правильно.

Для отладки Вася сделал скриншоты своего приложения (шар на них должен превратиться в круг). Скриншот представлен прямоугольным массивом символов, в котором символ «#» представляет красный пиксель, а символ «.» — черный пиксель.

Если шар нарисован правильно, то красными будут только те пиксели, координаты которых
$(x; y)$ удовлетворяют условию $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2$, где $x_0,\ y_0,\ r$ — неизвестные целые числа.

Требуется написать программу, которая по изображению выяснит, правильно ли на нем нарисован шар (спроецированный в круг), и если да, то определит значения $x_0,\ y_0,\ r$.

Формат входных данных

Первая строка входных данных содержит целые числа X Y — ширину и высоту прямоугольника. Следующие Y строк содержат по X символов «#» и «.» каждая — описание изображения.

Формат выходных данных

Выходные данные должны содержать целые числа $1 x_0 y_0 r$, если изображение является правильным, и число 0 в противном случае. Координаты отсчитываются от верхнего левого угла.

Ограничения

$$3 \leqslant X, Y \leqslant 2000,\ r \geqslant 1.$$

$$1 \leqslant x_0 - r < x_0 + r \leqslant X,\ 1 \leqslant y_0 - r < y_0 + r \leqslant Y.$$

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

`3 3`
`.#.`
`###`
`.#.`

Стандартный вывод
`1 2 2 1`

Решение

Поскольку правильное изображение содержит ровно один круг, то ограничивающий прямоугольник всех красных пикселей на изображении должен совпадать с ограничивающим прямоугольником круга.

Таким образом, следует найти ограничивающий прямоугольник (то есть найти минимальные и максимальные координаты красных пикселей по каждой оси), проверить, что он является квадратом с нечетной длиной стороны, найти потенциальный центр круга как центр ограничивающего квадрата. Затем следует проверить, что внутри квадрата красными являются те и только те пиксели, которые удовлетворяют условию:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2.$$

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <cmath>

static int X, Y;
static std::vector<std::string> a;

static int sqr(int x) { return x*x; }
static int sqrt(int x) { return int(std::sqrt(x)); }

int best_circle_at(int xc, int yc) {
    int minr = 0, maxr = sqr(X);
    for (int y = 0; y < Y; ++y) {
        for (int x = 0; x < X; ++x) {
            int r2 = sqr(x - xc) + sqr(y - yc);
            if (a[y][x] == '#')
                minr = std::max(r2, minr);
            else
                maxr = std::min(r2 - 1, maxr);
        }
    }
    return maxr >= minr ? sqrt(maxr) : 0;
}

bool check_circle_at(int xc, int yc, int r) {
    for (int y = 0; y < Y; ++y) {
        for (int x = 0; x < X; ++x) {
            int r2 = sqr(x - xc) + sqr(y - yc);
            if ((a[y][x] == '#') != (r2 <= sqr(r)))
                return false;
        }
    }
    return true;
}

int main() {
    std::cin >> X >> Y >> std::ws;
```

```
    a.resize(Y);
    for (int y = 0; y < Y; ++y)
        std::getline(std::cin, a[y]);
    int bestr = 0, bestx, besty;
    for (int y = 0; y < Y; ++y) {
        for (int x = 0; x < X; ++x) {
            int r = best_circle_at(x, y);
            if (r > bestr) {
                bestr = r;
                bestx = x;
                besty = y;
            }
        }
    }

    if (bestr == 0 || bestr > X / 2 || !check_circle_at(bestx, besty, bestr)) {
        std::cout << 0;
    }
    else {
        std::cout << "1 " << bestx + 1 << " " << besty + 1 << " " << bestr;
    }
}
}
```

Задача III.1.1.3. Морской бой (100 баллов)

Вася создает игру про корабли. В игре есть мины, которые имеют форму круга. Корабль имеет форму выпуклого многоугольника. Вася хочет придумать механику взаимодействия мины и корабля, для этого ему требуется вычислить площадь пересечения мины и корабля. Так как у Васи плохо с геометрией, он просит вас написать программу для вычисления площади пересечения корабля, заданного координатами вершин, и мины, заданной радиусом и координатами центра.

Формат входных данных

Первая строка входных данных содержит 3 целых числа x_c, y_c, r_c — координаты и радиус мины. Вторая строка содержит одно целое число N — количество вершин в многоугольнике, описывающем корабль. Следующие N строк содержат N пар чисел (x_i, y_i) (по одной паре в строке) — координаты вершин выпуклого многоугольника, описывающего корабль, в порядке обхода по часовой стрелке.

Формат выходных данных

Выходные должны содержать одно вещественное число — площадь пересечения мины и корабля с точностью не менее двух знаков после запятой.

Ограничения

$$-1000 \leqslant x_c, y_c, r_c, x_i, y_i \leqslant 1000$$

$$3 \leqslant N \leqslant 10^3$$

Описание подзадач и системы оценивания

Решения, работающие для $-10 \leqslant x_c, y_c, r_c, x_i, y_i \leqslant 10$, оцениваются из 50 баллов. Баллы выставляются за каждый успешно пройденный тест.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод

`1 1 1`
`4`
`0 0`
`0 1`
`1 1`
`1 0`

Стандартный вывод
`0.785398163`

Пример №2

Стандартный ввод

`0 0 1`
`3`
`0 0`
`0 1`
`1 0`

Стандартный вывод
`0.5`

Пример №3

Стандартный ввод

`0 0 4`
`4`
`0 0`
`0 2`
`4 4`
`2 0`

Стандартный вывод
`7.07035`

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS
#include <iostream>
#include <iostream>
```

```
#include <fstream>
#include <string>
#include <sstream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <map>
#include <math.h>
#include <queue>
#include <set>
#include <iostream>
#include <iomanip>


using namespace std;

pair<double, double> points[100000];

double intersect_two_section(double x1, double x2, double xx1, double xx2)
{
	if (x2 < xx1 || x1 > xx2)
		return 0;
	if (x1 >= xx1 && x1 <= xx2 && x2 >= xx1 && x2 <= xx2)
		return x2 - x1;
	if (xx1 >= x1 && xx1 <= x2 && xx2 >= x1 && xx2 <= x2)
		return xx2 - xx1;
	if (x1 >= xx1 && x1 <= xx2)
		return xx2 - x1;
	else
		return x2 - xx1;
}

int main() {
#ifndef ONLINE_JUDGE
	freopen("input.txt", "r", stdin);
	freopen("output.txt", "w", stdout);
#endif
	ios_base::sync_with_stdio(0);
	cin.tie(0);
	int n;
	double x, y, r;
	cin >> x >> y >> r;
	cin >> n;
	double min_x = LONG_MAX, max_x = -LONG_MAX;
	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
		cin >> points[i].first >> points[i].second;
		points[i].first -= x; points[i].second -= y;
		min_x = min(min_x, points[i].first);
		max_x = max(max_x, points[i].first);
	}
	int pointer = 0;

	while (points[(pointer + 1) % n].first >= points[pointer].first)
		pointer = (pointer + 1) % n;
	while (points[(pointer + 1) % n].first <= points[pointer].first)
		pointer = (pointer + 1) % n;

	int left1 = pointer;
	int left2 = (pointer - 1);
	if (left2 < 0)
```

```
                left2 = n - 1;

        int right1 = pointer;
        int right2 = (pointer + 1) % n;

        double step = (max_x - min_x) / 20000000;
        step = max(step, 0.000001);
        bool st = false;
        double last_sec = -1;
        double ans = 0;
        double eps = 0.000000001;
        for (double pos = min_x; pos <= max_x; pos += step)
        {
            if (r * r >= pos * pos)
            {
                double p1 = -sqrt(r * r - pos * pos);
                double p2 = sqrt(r * r - pos * pos);
                while (pos > points[right2].first)
                {
                        right1 = right2;
                        right2 = (right1 + 1) % n;
                }
                while (pos > points[left2].first)
                {
                        left1 = left2;
                        left2 = left1 - 1;
                        if (left2 < 0)
                                left2 = n - 1;
                }
                double delta_y1 = points[right2].second - points[right1].second;
                double delta_y2 = points[left2].second - points[left1].second;
                double Y1 = delta_y1 * (pos - points[right1].first)
                 / (points[right2].first - points[right1].first) + points[right1].second;
                double Y2 = delta_y2 * (pos - points[left1].first)
                / (points[left2].first - points[left1].first) + points[left1].second;
                double new_sec = intersect_two_section(Y2, Y1, p1, p2);
                if (st)
                {
                        ans += (new_sec + last_sec) * step / 2;
                }
                st = true;
                last_sec = new_sec;
            }
        }
        cout << setprecision(20) << fixed;
        cout << ans;
}
```

Физика. 8-9 класс

Задача III.1.2.1. Течения (40 баллов)

Океанский зонд исследует подводные течения. Он может двигаться в любом направлении с постоянной скоростью $v = 5$ м/с относительно воды.

1.1. В некоторой области океана зонд выявил горизонтальное течение, скорость которого u зависит от глубины d по закону $u(d) = d/\tau$, где $\tau = 10$ с. На какое расстояние по горизонтали сместился робот относительно дна, опускаясь со скоростью v с глубины $d_0 = 0$ до $d_1 = 100$ м вертикально вниз относительно воды? Направление скорости течения во всех точках одинаково.

Решение

Обозначим горизонтальную координату зонда x, а вертикальную — y. Поскольку течения воды строго горизонтальны, закон движения зонда по вертикали и относительно воды, и относительно дна будет иметь одинаковый вид:

$$y = vt$$

При этом его горизонтальная скорость относительно дна будет изменяться по закону:

$$u(t) = u(t(y)) = \frac{vt}{\tau},$$

фактически представляющему собой равноускоренное движение с ускорением $a = v/\tau$. Остается воспользоваться законом равноускоренного движения:

$$x(t) = \frac{vt^2}{2\tau}$$

и подставить в него общее время спуска $t = (d_1 - d_0)/v$:

$$x = \frac{(d_1 - d_0)^2}{2v\tau} = 100\ \text{м}$$

Ответ: 100 м.

Система оценки

1. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
2. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

1.2. Находясь в течении из прошлого пункта на глубине $d_0 = 0$, робот выбирает некоторый угол α и начинает двигаться вглубь таким образом, что его скорость *относительно воды* сохраняет с горизонтом угол α. Определите, каким должен быть угол α, чтобы на глубине $d_2 = 25$ м робот оказался ровно над той же точкой дна, что и в начале своего движения.

Решение

Мы уже видели, что относительно дна движение робота в таком течении по вертикали равномерно с некоторой скоростью v_y, а по горизонтали — равноускорено с начальной скоростью v_{0x} и ускорением $a = v_y/\tau$.

Относительно воды то же движение будет равномерным с постоянными скоростями $v_x = v_{0x}, v_y$. Эти скорости связаны с углом погружения α соотношениями:

$$v_x = v\cos\alpha$$
$$v_y = v\sin\alpha$$

Совмещая эти соотношения, запишем закон движения зонда в проекциях на обе оси:

$$x(t) = vt\cos\alpha - \frac{vt^2\sin\alpha}{2\tau}$$
$$y(t) = vt\sin\alpha$$

Здесь мы учли, что описанная в задаче ситуация возможна только если начальная горизонтальная компонента скорости зонда направлена в противоположную течению сторону. Из второго соотношения получим общее время погружения $t = (d_2 - d_0)/(v\sin\alpha)$ и подставим его в первое (учтя, что общее перемещение по горизонтали должно оказаться равным нулю):

$$0 = (d_2 - d_0)\operatorname{tg}\alpha - \frac{(d_2 - d_0)^2}{2v\tau\sin\alpha}$$

Отсюда окончательно:

$$\cos\alpha = \frac{2v\tau}{d_2 - d_0}$$

Ответ: 90°.

Система оценки

1. Показано, что движение зонда в проекции на вертикальную ось равномерно, а на горизонтальную — равноускорено — 2 балла.
2. Записаны законы движения в проекциях на обе оси или эквивалентные по роли в решении соотношения — 1 балл за $0y$, 2 балла за $0x$.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

1.3. В некоторой области океана зонд выявил горизонтальное течение, вектор скорости которого в системе отсчета, связанной с дном, задается в каждой точке соотношениями $v_x = -y/\tau, v_y = x/\tau$, где τ — постоянная величина. Зонд выключает двигатели в точке (80 м, 60 м) и, свободно дрейфуя по течению, снова оказывается в этой точке через $T = 15$ мин. Какой путь проделал зонд относительно дна?

Решение

Пускай зонд находится в некоторой точке (x, y). Направление на эту точку составляет с положительным направлением оси x угол $\alpha = \operatorname{arctg}(y/x)$. В то же время вектор скорости $(-y, x)/\tau$ будет составлять с этим же направлением угол $\beta = \operatorname{arctg}(-x/y)$. Несложно заметить из рисунка или тригонометрических соотношений, что $\alpha - \beta = 90°$. Проще всего сделать это, вычислив скалярное произведение этих векторов, но можно и просто показать построением. Таким образом, скорость зонда относительно дна оказывается в каждый момент времени перпендикулярна его радиус-вектору. Такая ситуация соответствует движению по окружности.

Отсюда легко получить окончательный результат:

$$s = 2\pi R = 2\pi\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \approx 628 \text{ м}$$

Ответ: 628 м.

Система оценки

1. Показано, что зонд будет двигаться по окружности — 4 балла.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

1.4. Определите значение коэффициента τ из предыдущего пункта.

Решение

Заметим, что введенный в прошлом пункте модуль вектора скорости $v = \sqrt{y^2 + x^2}/\tau$ равен произведению модуля радиус-вектора $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ на константу, а последний при движении по окружности с центром в начале координат остается неизменным. Мы можем быть уверены, что движение по окружности будет и равномерным, причем $v = R/\tau$. Сравнивая это выражение со связью угловой и линейной скоростей при движении по окружности $v = \omega R$, получаем $\omega = 1/\tau$. В то же время:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\tau \Rightarrow \tau = \frac{T}{2\pi} \approx 143\text{ с}$$

Ответ: 143 с.

Система оценки

1. Показано, что модуль скорости зонда будет постоянным — 3 балла.
2. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 4 балла.
3. Получен правильный численный ответ — 3 балла.

Задача III.1.2.2. Водохранилище (30 баллов)

Водохранилище представляет из себя большой резервуар с вертикальными стенками, наполняющийся течением реки. На время строительства электростанции все водосбросы водохранилища были перекрыты, и вода покидает его только за счет испарения. Для исследования этого процесса в водохранилище установлена система мониторинга, по данным которой удалось установить зависимость скорости испарения воды от времени года (см. рисунок III.1.1). Для простоты считайте, что все месяцы равны и длятся ровно 30 суток. Начальная точка графика соответствует началу января. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,26$ МДж/кг.

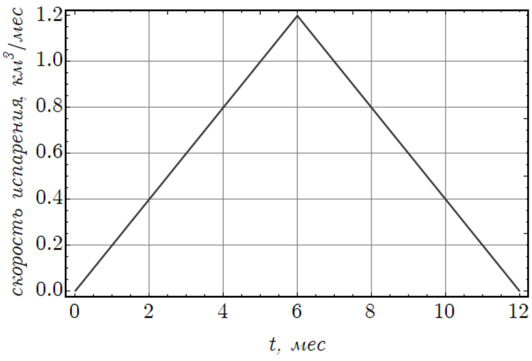

Рис. III.1.1:

2.1. Какое количество теплоты уносит испаряющаяся вода за лето (с начала шестого по конец восьмого месяца).

Решение

Общий объем воды, испаряющийся между некоторыми моментами времени t_1 и t_2 равен площади, ограниченной графиком скорости v ее испарения от времени на этом промежутке времени. Поскольку все участки графика прямолинейны, легко посчитать эту площадь для интересующего нас интервала (от $t = 5$ мес до $t = 8$ мес):

$$V = \frac{(t_{max} - t_1)(v(t_{max}) + v(t_1))}{2} + \frac{(t_2 - t_{max})(v(t_{max}) + v(t_2))}{2} = 3,1\ \text{км}^3$$

Количество теплоты, необходимое для испарения такого объема воды, равно:

$$Q = Lm = \rho LV \approx 7 \cdot 10^{18}\ \text{Дж}$$

Ответ: $7 \cdot 10^{18}$ Дж

Система оценки

1. Указано, что объем испарившейся воды может быть вычислен как площадь под графиком — 3 балла.
2. Верно выбраны начальная и конечная точка интересующего нас интервала и получено правильное численное или аналитическое выражение для испарившегося за лето объема — 2 балла.
3. Записана связь испаряющегося объема с уносимой им теплотой — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

2.2. Наблюдения показали, что на протяжении большей части года объем воды, поступающей в водохранилище остается более менее постоянным, но резко возрастает в сезон половодья (см. рисунок III.1.2). Определите, в какой момент года уровень воды в водохранилище был максимален.

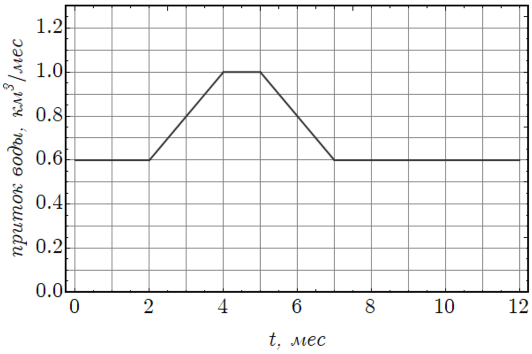

Рис. III.1.2:

Решение

Для решения удобно изобразить оба графика (испарения и притока воды) на одних осях: рисунок III.1.3. Пока приток превышает испарение (темно-серые участки на графике), уровень воды растет. Когда испарение оказывается «над» притоком (светло-серый участок) — уровень воды начинает убывать. Таким образом, существуют две точки, в которых уровень воды может быть максимален: $t = 5$ с, в которой уровень воды уже перестал расти, но еще не начал убывать и конец года $t = 12$ с, перед которым уровень воды продолжал расти, пока не закончился период наблюдения.

Для того, чтобы понять, в какой из этих точек уровень воды был выше, необходимо сравнить площади светлого четырехугольника и темного треугольника на рисунке. Сделать это можно как аналитическим расчетом, так и простым пересчитыванием «клеточек». Подобный подсчет показывает, что между концами пятого и девятого месяцев испарение воды превысило приток на $V_1 = 1$ км^3, а между концом девятого месяца и концом года приток превысил испарение на $V_2 = 0,9$ км^3. Поскольку $V_1 > V_2$, уровень воды в конце года оказался все же меньше, чем в момент $t = 5$ мес

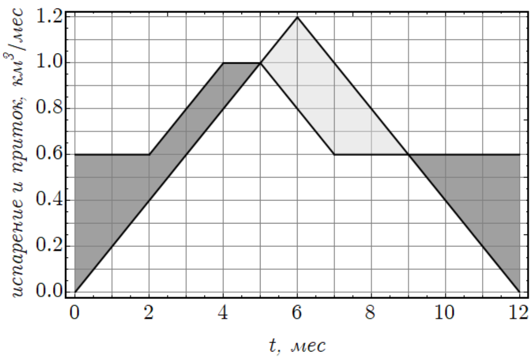

Рис. III.1.3:

Ответ: В конце мая (начале июня) или, эквивалентно, в момент $t = 5$ мес.

Система оценки

1. Показано, что уровень воды рос до момента $t = 5$ мес, а затем падал вплоть до $t = 9$ мес — 3 балла.
2. Рассмотрены верные площади на графиках, соответствующие притоку и испарению или непосредственно их разности — 3 балла.
3. Рассмотрен вариант конца года и показано, что в конце года уровень воды будет ниже, чем в $t = 5$ мес — 2 балла.
4. Получен правильный ответ — 2 балла.

2.3. Известно, что за год после перекрытия водосбросов давление воды на дно водохранилища выросло на $\Delta p = 3 \cdot 10^5$ Па. Какое количество механической работы может совершить вода если сбросить ее до уровня начала года?

Решение

Гидростатическое давление воды определяется формулой $p = \rho g h$, его рост обусловлен годовым приростом уровня воды $\Delta h = \Delta p/(\rho g)$. Этот прирост связан с увеличением ΔV объема воды в водохранилище простым соотношением $\Delta V = S\Delta h$. Как и в прошлом пункте, посчитать его можно, найдя разность площадей под графиком притока и под графиком испарения на всей области определения:

$$\Delta V = V_+ - V_- = 8,4\,\text{км}^3 - 7,2\,\text{км}^3 = 1,2\,\text{км}^3$$

Таким образом:

$$S = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{\Delta V \rho g}{\Delta p}$$

Энергия, которую можно получить, сбрасывая воду, выражается формулой $E = mgh/2$, где $h/2$ — высота центра масс этой воды, а h — уровень воды. Отсюда получим:

$$E = \frac{mg\Delta h}{2} = \frac{\rho g S \Delta h^2}{2} = \frac{S\Delta p^2}{2\rho g} = \frac{\Delta V \Delta p}{2} = 3,6 \cdot 10^{14}\,\text{Дж}$$

Ответ: $3,6 \cdot 10^{14}$ Дж.

Система оценки

1. Получена связь между давлением и уровнем воды — 2 балла.
2. Получено верное выражение для запасенной водой потенциальной энергии — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Задача III.1.2.3. Ледоход (30 баллов)

Исследовательский робот-амфибия изучает льды Арктики. Для движения по айсбергу он использует шипованые колеса, коэффициент трения которых о лед равен $\mu_1 = 0,2$, а для удержания на месте может выпускать специальные зацепы, на которых его коэффициент трения о лед возрастает до $\mu_2 = 0,6$.

3.1. Робот движется с постоянной скоростью по небольшой плоской льдине и в некоторый момент, заметив опасность, резко выпускает зацепы. Какое ускорение (относительно воды) приобретет льдина в начале торможения робота если известно, что под весом робота она опустилась настолько, что уровень ее поверхности совпал с уровнем воды? Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

Решение

Запишем условие равновесия между силами тяжести и Архимеда, действующими на льдину и весом робота:

$$Mg + mg = \rho_в g V = Mg\frac{\rho_в}{\rho_л},$$

где m — масса робота, M — масса льдины, V — объем ее погруженной части, совпадающий с общим объемом льдины, поскольку по условию льдина полностью ушла под воду.

Из этого соотношения следует:

$$m = M\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right)$$

Теперь рассмотрим непосредственно торможение робота. Выпуская зацепы, робот создает силу трения $F = \mu_2 mg$, которая начинает действовать и на него (против движения), и на льдину (по движению) робота. В инерциальной системе отсчета (относительно воды) эта сила придает льдине ускорение:

$$a = \frac{m}{M}\mu_2 g = \mu_2 g\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) \approx 0,59 \text{ м/с}^2$$

Влиянием вязкого трения в начале торможения можно пренебречь, поскольку оно появляется только когда льдина приобретает некоторую скорость относительно воды.

Ответ: $0,59$ м/с^2.

Система оценки

1. Записано условие равновесия льдины — 2 балла.
2. Найдено соотношение масс робота и льдины — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.2. Робот находится на гладкой горизонтальной льдине, удерживаясь зацепами. В этот момент в льдину врезается другая, из-за чего льдина с роботом очень быстро приобретает некоторую скорость v относительно воды. Известно, что вертикальная компонента этой скорости равна $v_y = 5$ м/с и направлена вверх. Определите максимальное значение модуля v, при котором робот не сдвинется с места относительно льда.

Решение

При ударе сила нормальной реакции N между роботом и опорой скачкообразно возрастает и оказывается много больше mg. За короткий интервал времени Δt эта сила увеличивает вертикальную составляющую импульса робота p_y на величину mv_y, следовательно:

$$N \approx \frac{mv_y}{\Delta t}$$

Вместе с нормальной реакцией скачкообразно возрастает и сила трения, которая становится равна $F = \mu_2 N$. Эта сила придает роботу горизонтальную скорость v_x. Максимальное значение v_x, которое может получить робот за счет этой силы без проскальзывания определяется равенством:

$$mv_x = F\Delta t = \mu_2 N \Delta t \approx \mu_2 m v_y$$

Таким образом, $v_x \approx \mu_2 v_y$, а модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx v_y \sqrt{1 + \mu_2^2} \approx 5,8 \text{ м/с}$$

Ответ: $5,8$ м/с.

Система оценки

1. Указана связь между силой трения и силой нормальной реакции опоры — 2 балла.
2. Указано, что в момент удара сила реакции опоры определяется изменением импульса тела, а не его весом в покое — 3 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.3. В некоторый момент движения робота льдина под ним раскалывается, и робот оказывается без начальной скорости на гладком сколе, наклоненном под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. За какое время робот должен успеть выпустить зацепы, чтобы не упасть в воду если расстояние от точки начала скольжения до края льдины (вдоль поверхности скола) составляет $l = 15$ м? Считать, что масса льдины много больше массы робота.

Решение

Запишем второй закон Ньютона для робота на наклонной плоскости в проекции на оси x, направленную вдоль льдины и y, перпендикулярную ей:

$$mg\sin\alpha - \mu N = ma$$
$$mg\cos\alpha - N = 0$$

Из этой системы непосредственно следует:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Заметим, что при $\mu < tg\alpha$ ускорение оказывается положительным (то есть робот разгоняется, а при $\mu > tg\alpha$ — отрицательным (робот тормозит). При этом в условиях задачи $\mu_1 < \operatorname{tg}\alpha \approx 0,57 < \mu_2$.

Таким образом, робот будет равномерно разгоняться до момента выпуска зацепов с ускорением $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)$, а затем — равномерно тормозить с ускорением $a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)$. Чтобы он успел остановиться ровно в последний момент, необходимо, чтобы изменения скорости на обоих этих этапах по модулю совпадали:

$$a_1t_1 = -a_2t_2 \Rightarrow t_2 = t_1\frac{a_1}{a_2},$$

а сумма пройденных расстояний давала общую длину льдины:

$$l = \frac{a_1t_1^2}{2} + \frac{a_2t_2^2}{2} = \frac{a_1(a_1^2 + a_2^2)}{2a_2^2}t_1^2$$

Отсюда непосредственно получим:

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) \approx 3,2\,\text{м/с}^2$$
$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \approx -0,19\,\text{м/с}^2$$
$$t_1 = \sqrt{\frac{2a_2^2l}{a_1(a_1^2 + a_2^2)}} \approx 0,18\,\text{с}$$

Поскольку подстановка аналитических выражения для ускорений непосредственно в формулу для времени даст очень громоздкое выражение, в этой задаче уместно использовать промежуточные вычисления в числах.

Ответ: $0,18$ с.

Система оценки

1. Установлено, что движение будет состоять из двух участков с противоположными направлениями ускорения — 2 балла.
2. Найдены ускорения на обоих участках — 3 балла. 2 балла если верно найдено только одно из ускорений.
3. Показана связь между приращениями скорости на обоих участках — 1 балла.
4. Показана связь между перемещениями (путями) на обоих участках — 2 балла.
5. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Физика. 10-11 класс

Задача III.1.3.1. Зонд (40 баллов)

Глубоководный зонд может перемещаться в одном из двух режимов: либо горизонтально с постоянной скоростью $v = 6$ м/с либо в любом другом направлении с постоянной скоростью $u = 3$ м/с. При этом конкретный угол, который составляет направление его скорости с горизонтом, роли не играет.

1.1. Зонд исследует дно, двигаясь на пренебрежимо малом расстоянии от него, и встречает на своем пути холм в форме шарового сегмента, «вырезанного» конусом с углом раствора 2φ (см. рисунок III.1.4). Зонду необходимо попасть на противоположную сторону холма. Определите минимальное значение φ, при котором для зонда будет быстрее обойти гору, двигаясь на постоянной глубине, чем взойти на нее и затем спуститься. Считать, что на всем протяжении движения зонд должен оставаться в непосредственной близости от дна.

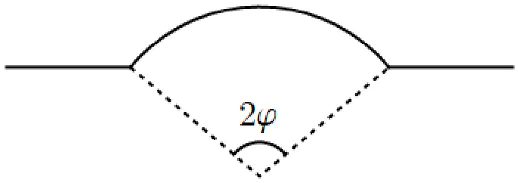

Рис. III.1.4:

Решение

Длину дуги, которую необходимо преодолеть, чтобы перевалить через холм, легко определить непосредственно по рисунку она составляет:

$$l_1 = 2\varphi R,$$

где R — радиус сферы, а угол измерен в радианах.

Горизонтальный срез холма на уровне дна представляет собой окружность с радиусом $r = R(1 - \cos\varphi)$. Длина половины этой окружности, которую нужно пройти, чтобы попасть на противоположную сторону холма, равна:

$$l_2 = \pi r = \pi R(1 - \cos\varphi)$$

Двигаясь по первой траектории, зонд будет все время (кроме одной точки) иметь скорость, направленную под углом к горизонту, а значит двигаться со скоростью u. На второй траектории зонд все время остается в одной горизонтальной плоскости, а значит двигается со скоростью v. Таким образом, условие равенства времен на преодоление обеих траекторий может быть записано в виде:

$$\frac{2\varphi \cancel{R}}{u} = \frac{\pi \cancel{R}(1 - \cos\varphi)}{v}$$

Полученное трансцендентное уравнение легко решить графически. Изобразив на одних осях графики функций $t_1/R = 2v\varphi/(\pi u)$ и $t_2/R = 1 - \cos\varphi$, можно увидеть, что они имеют ровно одну общую точку в начале координат III.1.5.

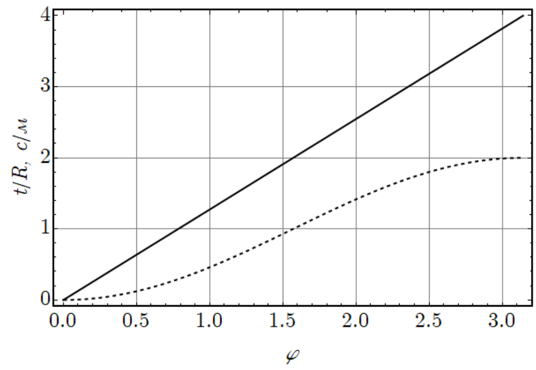

Рис. III.1.5:

Таким образом, при любом угле φ зонду будет быстрее двигаться в обход, чем взбираться на гору.

Ответ: $\varphi = 0$.

Система оценки

1. Найдены расстояния, которые необходимо преодолеть зонду на обеих траекториях — по 2,5 балла за траекторию.
2. Выражены времена, которые займет такое движение — по 1,5 балла за траекторию.
3. Получен правильный ответ — 2 балла.

1.2. За какое минимальное время t зонд может переместиться из точки A в точку B если известно, что расстояние между этими точками вдоль горизонта равно $l = 100$м, а разница в глубине составляет $h = 60$ м?

Решение

Кратчайшей траекторией между двумя точками является отрезок прямой, однако мы не можем гарантировать, что такая траектория будет быстрейшей в условиях данной задачи. В самом деле, зонд двигается существенно быстрее строго по горизонтали, поэтому может быть более оптимальной траектория, состоящая из двух отрезков, один из которых горизонтальный (рисунок III.1.6).

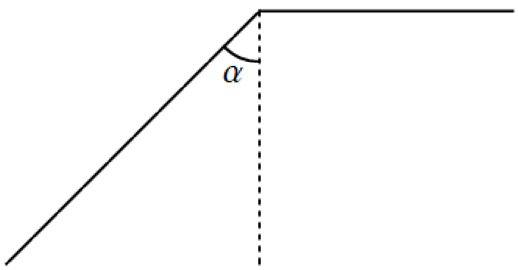

Рис. III.1.6:

Найти оптимальный угол α можно при помощи оптической аналогии. Траектория зонда в данном случае повторяет форму луча света, испытывающего полное внутреннее отражение на горизонтальной границе раздела с относительным показателем преломления равным u/v. Согласно принципу Ферма, свет будет распространяться по самой быстрой траектории, поэтому поиск угла α сводится к поиску критического угла падения в данном случае:

$$\sin\alpha = u/v \Rightarrow \alpha = \arcsin(u/v)$$

Зная этот угол, можно вычислить, что на первом (диагональном) отрезке зонд пройдет расстояние h по вертикали и:

$$x_1 = h\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{hu}{\sqrt{v^2 - u^2}}$$

по горизонтали.

Следовательно, на втором участке зонду останется пройти расстояние:

$$x_2 = l - x_1,$$

а общее время может быть найдено в виде:

$$t = \frac{h}{u\cos\alpha} + \frac{x_2}{v} = \frac{hv}{u\sqrt{v^2 - u^2}} + \frac{l - hu/\sqrt{v^2 - u^2}}{v} \approx 23\text{ с}$$

Ответ: 23 с.

Система оценки

1. Замечено, что быстрейшая траектория зонда не обязана быть прямой — 2 балла.
2. Найден оптимальный угол излома траектории или координаты, в которой произошел излом — 4 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла. Допускается промежуточная подстановка угла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

1.3 Зонд переместился между двумя точками по самой быстрой траектории, в результате чего его средняя путевая скорость оказалась равна $v_s = 5$ м/с. На той же траектории найдите его среднюю скорость по перемещению.

Решение

В прошлом пункте мы показали, что быстрейшая траектория между двумя точками в общем случае является двузвенной ломаной (в частных она вырождается в отрезок прямой). Пусть зонд двигался с изменением глубины на протяжении времени t_1 и горизонтально на протяжении времени t_2. Тогда его средняя путевая скорость будет равна:

$$v_s = \frac{ut_1 + vt_2}{t_1 + t_2}$$

Обозначим $t_2/t_1 = \tau$ и получим:

$$v_s = \frac{u + v\tau}{1 + \tau} \Rightarrow \tau = \frac{v_s - u}{v - v_s} = 2$$

С учетом оптимального угла $\alpha = 30°$, найденного в предыдущем пункте, на первом участке траектории перемещения зонда x_1, y_1 составили:

$$x_1 = ut_1 \sin\alpha = ut_1/2$$
$$y_1 = ut_1 \cos\alpha = \sqrt{3}ut_1/2,$$

а на втором:

$$x_2 = vt_2 = u\tau t_1$$
$$y_2 = 0$$

Общее время движения составило при этом $t = t_1 + t_2 = t_1(1+\tau)$. Таким образом, средняя скорость по перемещению v_r равна:

$$v_r = \frac{\sqrt{y_1^2 + (x_1 + x_2)^2}}{t} = \frac{u\sqrt{3/4 + (\tau + 1/4)^2}}{1+\tau} = u\frac{\sqrt{3 + (1/2 + 2\tau)^2}}{2(1+\tau)}$$

Поскольку аналитическая подстановка в данном случае дает весьма громоздкое выражение, разумно подставить численное значение τ:

$$v_r = u\frac{\sqrt{3 + (1 + 4\tau)^2}}{2(1+\tau)} \approx 2,4 \text{ м/с}$$

Ответ: $2,4$ м/с.

Система оценки

1. Показано, что траектория движения является двузвенной ломаной и верно определен ее угол — 2 балла.
2. Найдено отношение времен движения на разных участках — 3 балла.
3. Записаны выражения для перемещений по координатам или длин звеньев ломаных (при решении через теорему косинусов) — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

1.4. Зонд должен взять пробы воды в восьми точках, расположенных в вершинах куба с гранью $a = 45$ м, грани которого ориентированы строго вертикально или горизонтально. За какое минимальное время он может это сделать? Считайте, что на само взятие пробы уходит пренебрежимо малое.

Решение

Задача сводится к проведению быстрейшей траектории через все восемь вершин куба, по которой пройдет дрон, забирая пробы. Для сокращения времени движения дрон должен пройти по вертикали минимальное возможное расстояние. Учитывая, что среди точек, в которых он должен побывать, есть те, что находятся строго друг над другом, сделать это лучше вертикально, а не под углом как в прошлых пунктах. Очевидно, что невозможно побывать во всех точках куба, пройдя по вертикали менее, чем a, поэтому траектория, в которой есть ровно один вертикальный отрезок, а остальные отрезки также окажутся прямолинейными, но горизонтальными —

кратчайшая. Изобразим пример такой траектории (рисунок III.1.7). Поскольку на траектории нет отрезков длиннее a, а вертикальный путь минимален, она является и кратчайшей, и быстрейшей для дрона.

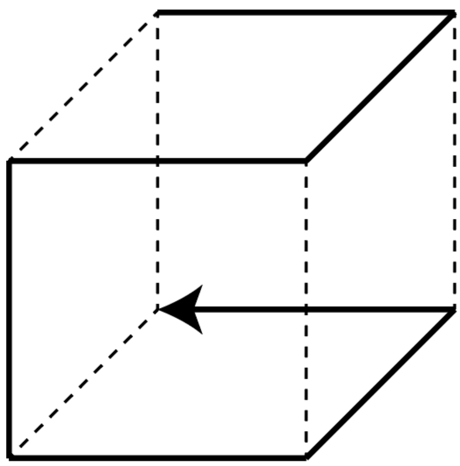

Рис. III.1.7:

Теперь посчитать общее время движения куба по этой траектории элементарно:

$$t = 6\frac{a}{v} + \frac{a}{u} = 60\ \text{с} = 1\ \text{мин}$$

Ответ: 1 мин.

Система оценки

1. Показано, что оптимальной траекторией является семизвенная ломаная — 3 балла.
2. Показано, что ровно одно звено этой ломаной может быть вертикальным и такое решение оптимально — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

Задача III.1.3.2. Гидравлика (30 баллов)

Элемент гидравлической системы состоит из двух сообщающихся сосудов одинаковой площади поперечного сечения S, заполненных водой: открытого и закрытого (см. рисунок III.1.8). В закрытом сосуде также находится воздух. В обоих сосудах плавают датчики-поплавки Д1 и Д2, измеряющие высоту уровня воды над дном сосуда (h_1 и h_2 соответственно). Поскольку вода может подаваться в гидравлическую систему или откачиваться из нее, а также может контролируемо изменяться температура воздуха, обе величины h_1 и h_2 не являются постоянными.

Плотность воды считать равной $\rho = 1000$ кг/м^3, атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

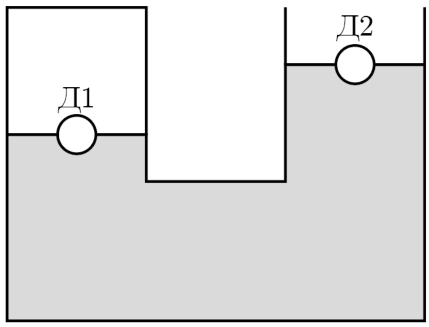

Рис. III.1.8:

2.1. Работа газа на процессе 1-2, изображенном на диаграмме III.1.9, равна $A = 36$ кДж. Определите площадь сечения сосуда S.

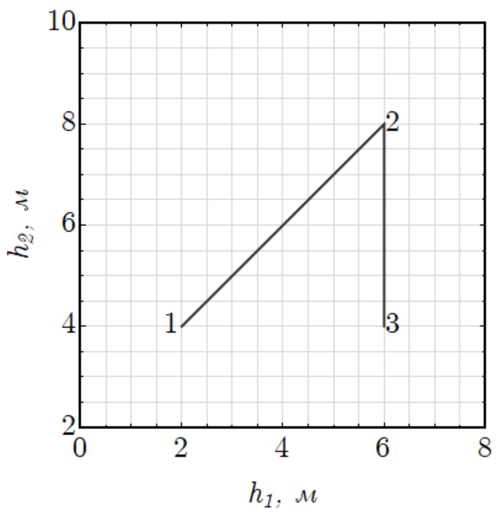

Рис. III.1.9:

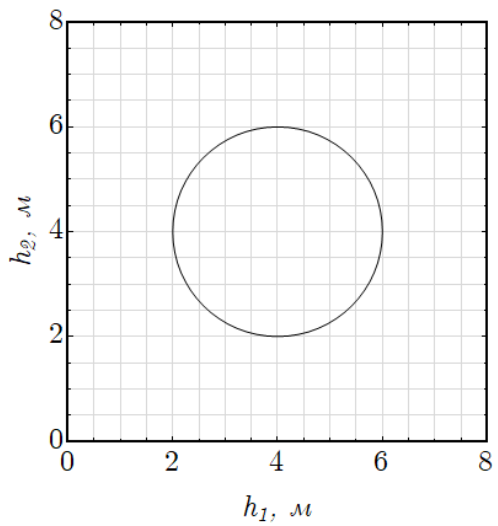

Рис. III.1.10:

Решение

Выразим давление газа в сосуде через высоты $h_{1,2}$ и атмосферное:

$$p = p_{\text{гидростат}} + p_a = \rho g(h_2 - h_1) + p_a$$

Из этого выражения видно, что на диаграмме прямые, идущие под углом 45° к осям, то есть такие, на которых $h_2 - h_1 = const$ — изобары. В то же время объем газа, разумеется, связан с высотой h_1 соотношением:

$$V = S(H - h_1),$$

где H — общая высота закрытого сосуда.

Работа на изобаре 1-2 находится по элементарной формуле:

$$A = p\Delta V = (\rho g(h_2 - h_1) + p_a)S\Delta h_1$$

Из диаграммы III.1.9 можно видеть, что на данном участке $(h_2 - h_1) = 2$ м, $\Delta h_1 = 4$ м. Таким образом, окончательно:

$$S = \frac{A}{(\rho g(h_2 - h_1) + p_a)\Delta h_1} = 0,075 \text{ м}^2$$

Ответ: $0,075$ м^2.

Система оценки

1. Показано, что процесс 1-2 является изобарным — 3 балла.
2. Найдена связь между изменением высоты h_1, изменением объема газа и площадью сосудов — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

2.2. В процессе 1-2, изображенном на диаграмме III.1.9, воздух в закрытом сосуде имел теплоемкость C_0. Какую теплоемкость будет иметь этот же воздух в процессе 2-3?

Решение

Как уже было показано, процесс 1-2 является изобарным. Несложно также увидеть, что процесс 2-3, в котором сохраняется высота h_1, является изохорным. Воздух, на 99% состоящий из двухатомных азота и кислорода, может считаться двухатомным газом. Для последнего известны молярные теплоемкости:

$$C_V = \frac{5}{2}R$$
$$C_P = \frac{7}{2}R$$

Эти соотношения могут считаться табличными или быть легко выведены из определения теплоемкости и первого начала термодинамики. Таким образом:

$$C_{23} = C_{12}\frac{C_V}{C_P} = \frac{5}{7}C_0$$

Ответ: $C_{23} = \frac{5}{7}C_0$.

Система оценки

1. Указано, что процесс 1-2 является изобарным — 2 балла.
2. Указано, что процесс 2-3 является изохорным — 3 балла.
3. Выведены или записаны выражения для теплоемкостей двухатомного газа в данных процессах — 2 балла.
4. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.

2.3. С воздухом совершается циклический процесс, изображенный на диаграмме III.1.10. Определите отношение максимального и минимального давлений газа в этом процессе.

Решение

Снова воспользуемся знанием того, что изобары на данной диаграмме представляют собой прямые, идущие под углом 45° к осям. В точках минимального и максимального давлений давление не должно ни расти, ни убывать, а значит эти точки должны касаться изобар. Окружность на диаграмме III.1.10 имеет, разумеется, две точки касания с подобными диагональными прямыми, которые могут быть найдены как точки пересечения окружности с диаметром, направленным вдоль перпендикулярной диагонали. На осях h_1, h_2 эти точки имеют координаты:

$$h_1 = h_{01} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}R$$
$$h_2 = h_{02} \mp \frac{\sqrt{2}}{2}R,$$

где R — радиус окружности ($R = 2$ м), а h_{01}, h_{02} — координаты ее центра.

Давление в любой точке задается выражением:

$$p = \rho g(h_2 - h_1) + p_a$$

Подставляя в него координаты точек касания, получим:

$$\Delta p = 2\sqrt{2}\rho g R \approx 57\ \text{кПа}$$

Ответ: 57 кПа.

Система оценки

1. Указано, что минимальное и максимальное давление достигается в точках касания процесса и изобар — 3 балла.
2. Верно указаны данные точки на диаграмме — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла. Ответ 55 кПа, получающийся при подстановке $g = 9,8$ м/с^2 также считается верным.

Задача III.1.3.3. Пожарный робот (30 баллов)

Автономный робот-пожарный оснащен брандспойтом с площадью сечения форсунки (выпускного отверстия) $S = 20$ см^2 из которой он может выбрасывать воду под высоким давлением. Робот выбрасывает $V = 3$ л воды в виде короткой струи под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, в результате чего вода поднимается на максимальную высоту $h = 46$ м. Сопротивлением воздуха и разбрызгиванием струи во всех пунктах задачи можно пренебречь.

3.1. Какую скорость приобретет робот массы $m = 15$ кг, выбросив эту струю стоя на вращающихся без существенного трения колесах?

Решение

Масса струи может быть легко найдена как $M = \rho V$. Скорость струи может быть найдена из закона сохранения энергии с учетом того, что только вертикальная компонента кинетической энергии преобразуется в потенциальную в верхней точке:

$$\frac{\cancel{M}v^2\sin^2\alpha}{2} = \cancel{M}gh \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\alpha}$$

После этого остается записать закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось:

$$\rho V v\cos\alpha = mu \Rightarrow u = \frac{\rho V\sqrt{2gh}}{m\operatorname{tg}\alpha} \approx 3,5 \text{ м/с}$$

Ответ: $3,5$ м/с.

Система оценки

1. Найдена начальная скорость струи — 3 балла. 2 балла если забыта или использована не та тригонометрическая функция.
2. Записан закон сохранения импульса — 3 балла. 2 балла если забыта или использована не та тригонометрическая функция.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 2 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.2. Какую длину l будет иметь струя воды, когда центр этой струи будет проходить через высшую точку своей траектории? Считайте, что $l \ll h$.

Решение

Предположение $l \ll h$ позволяет нам считать, что струя имеет приближенно одну скорость на всем своем протяжении. Тогда длина струи может быть выражена как расстояние, которое успевает пройти вода за интервал времени Δt, разделявший открытие и закрытие брандспойта:

$$l = v\Delta t$$

Нам известна начальная скорость струи, а ее начальная длина может быть найдена через объем, представляющий произведение этой длины на площадь форсунки:

$$v\Delta t = l_0 = \frac{V}{S} \Rightarrow \Delta t = \frac{V}{vS}$$

В верхней точке скорость струи равна горизонтальной компоненте ее начальной скорости $v_x = v\cos\alpha$. Тогда длина этой струи:

$$l = v_x\Delta t = \frac{V}{S}\cos\alpha = 0,75 \text{ м}$$

Ответ: $0,75$ м.

Система оценки

1. Найдена связь между длиной струи и ее скоростью — 3 балла.
2. Найдена связь между длиной, объемом и площадью струи — 2 балла.
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.

3.3. На какую высоту H поднимется струя воды если будет выпущена под таким же углом к горизонту жестко окопавшимся роботом? Считать, что насосы робота совершают одинаковую работу вне зависимости от того, окопался робот или стоит на свободно проворачивающихся колесах.

Решение

В первом пункте задачи была найдена скорость, приобретаемая роботом:

$$u = \frac{\rho V \sqrt{2gh}}{m \operatorname{tg} \alpha}$$

Кинетическая энергия робота при этом:

$$K = \frac{mu^2}{2} = \frac{(\rho V)^2 gh}{m \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Кинетическая энергия самой струи:

$$K_0 = \frac{\rho V v^2}{2} = \frac{\rho V gh}{\sin^2 \alpha}$$

Работа насосов робота в этом случае равна сумме данных кинетических энергий. В то же время при жестком закреплении робота вся работа насоса идет на увеличение кинетической энергии струи K_1:

$$K_1 = K + K_0 = \frac{\rho V gh}{m \sin^2 \alpha} \left(\rho V \cos^2 \alpha + m\right)$$

В то же время доля этой кинетической энергии, связанная с вертикальной компонентой скорости $K_1 \sin^2 \alpha$ в верхней точке траектории струи полностью преобразуется в потенциальную:

$$\rho V g H = K_1 \sin^2 \alpha = \frac{\rho V gh}{m} \left(\rho V \cos^2 \alpha + m\right)$$

Откуда окончательно:

$$H = \frac{K_1 \sin^2 \alpha}{\rho V g} = h \frac{\rho V \cos^2 \alpha + m}{m} \approx 50,6 \text{ м}$$

Ответ: $50,6$ м.

Система оценки

1. Указано, что работа насоса идет на увеличение кинетических энергий робота и струи — 2 балла.
2. Верно найдены эти кинетические энергии — 3 балла (по 1 баллу за каждую из трех).
3. Получено правильное аналитическое выражение для искомой величины — 3 балла.
4. Получен правильный численный ответ — 2 балла.