Заключительный этап

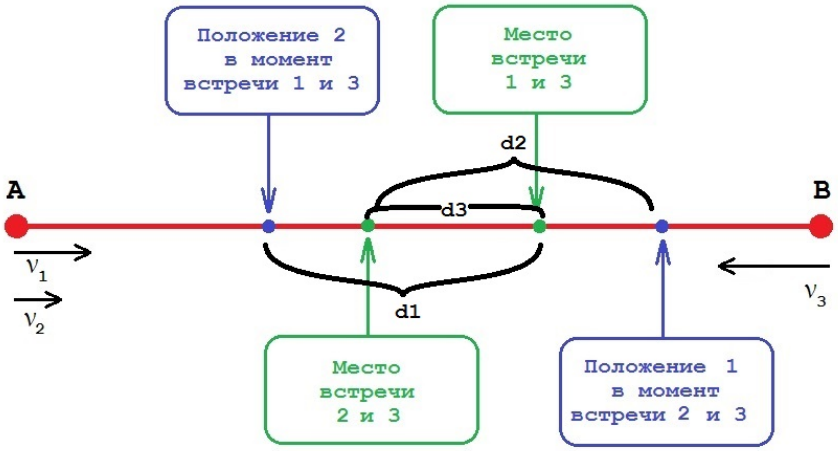
Индивидуальный предметный тур

Информатика. 8–11 класс

Задача III.1.1.1. Интеллектуальная ГИС (12 баллов)

Вы являетесь тестером в команде разработчиков новой интеллектуальной геоинформационной системы. Данная система помимо прямых расчетов расположения отслеживаемых объектов, должна уметь определять необходимые данные (расстояния, координаты и т. п.) путем сопоставления множества косвенных данных.

В данный момент тестируется следующая ситуация: есть три объекта 1, 2 и 3. Объекты 1 и 2 одновременно стартуют из точки A в направлении точки B, объект 3 в этот же момент стартует из точки B в направлении точки A. Известно, что скорость объекта 1 (обозначим ее v_1) строго больше скорости объекта 2 (обозначим ее v_2), но сами значения этих скоростей не известны. Однако известна их разность $dv = v_1 - v_2$. Очевидно, что при своем движении, объект 3 сначала встретится с объектом 1, а затем через какое-то время встретится с объектом 2. Известны следующие расстояния: d_1 — расстояние между 1 и 2 в момент встречи третьего и первого, d_2 — расстояние между 1 и 2 в момент встречи третьего и второго, d_3 — расстояние между точками встречи. Требуется по заданным четырем параметрам определить расстояние между точками A и B. В момент встречи второго и третьего первый не успевает достичь точки B.



Формат входных данных

На вход подаются четыре положительных числа dv, d_1, d_2, d_3 через пробел. Все числа целые в пределах от 1 до 10^9. $d_3 < d_1 < d_2$. Входные данные таковы, что в момент встречи второго и третьего первый еще не успевает достичь точки A.

Формат выходных данных

Вывести одно число — расстояние между точками AB. Ответ следует выводить с округлением ровно до пяти знаков после десятичной точки.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
3 9 12 5
Стандартный вывод
36.00000

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

int main(){
    long double dv, d1, d2, d3;
    cin >> dv >> d1 >> d2 >> d3;

    cout << fixed << setprecision(5) << d1 * d2 / (d2 - d1);
    return 0;
}
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```python
rom decimal import Decimal
a = list(map(int, input().split()))
d1 = Decimal(str(a[1]))
d2 = Decimal(a[2])
n = 5
a = d1 * d2 / (d2 - d1)
print(f'{a:.{n}f}')
```

Задача III.1.1.2. Самоорганизация в городе (15 баллов)

Рассмотрим следующую модель обмена ресурсами внутри некоторого города. Город состоит из n расположенных в один ряд кварталов. Каждый квартал изначально имеет a_i единиц запаса некоторого ресурса, причем никакие два квартала не обладают одинаковыми запасами. Для любых двух рядом расположенных кварталов возможна операция передачи одной единицы ресурса от большего по запасам к меньшему, но, само собой, отдающий квартал не должен стать беднее по запасам того,

кому он отдает. Основным требованием властей города является разнообразие запасов, что означает что ни в какой момент времени никакие два квартала не должны обладать одинаковыми по величине запасами. Таким образом, операция передачи может быть осуществлена только тогда, когда после ее выполнения новые величины запасов обоих участвовавших в операции передачи ресурса кварталов не совпадают ни с одним другим кварталом (в том числе и между собой). Если есть несколько пар рядом стоящих кварталов, имеющих возможность передачи, то выбирается пара с наибольшей разностью, а если и таких несколько, то среди них выбирается пара с минимальным значением запаса у получающего помощь квартала. За одну единицу времени возможен ровно один обмен. Такие операции поочередно производятся до тех пор, пока это не нарушает правила разнообразия. Требуется выяснить, каким станет распределение ресурса после окончания обменов.

Формат входных данных

В первой строке содержится число n — количество кварталов. Во второй строке находятся n натуральных чисел a_i через пробел — запасы ресурса у соответствующего квартала. Все величины запасов попрано различны. Все числа на входе в пределах от 1 до 1000.

Формат выходных данных

Вывести в одну строку через пробел n чисел — запасы в кварталах после того, как станет невозможно производить операции передачи ресурса.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 2 10 9 3 6 12

Стандартный вывод
3 9 8 5 7 10

Пояснение к примеру 1

Приведем последовательность перераспределений:
0) 2 10 **9 3** 6 12
1) **2 10** 8 4 6 12
2) 3 9 8 4 **6 12**
3) 3 9 8 **4 7** 11
4) 3 9 8 5 **6 11**
5) 3 9 8 5 7 10

В нулевой строке исходные значения. Самая большая разница между 10 и 2, но эту операцию запрещено проводить, так как тогда во втором квартале будет 9, но 9 уже есть в третьем. Следующая по величине разница между 9 и 3, а так же между 12 и 6. Тогда производится помощь наиболее нуждающемуся в этих двух вариантах,

а именно $9 \to 3$. В первой строке результат передачи. Теперь самая большая разница между 2 и 10 и ничто не мешает произвести передачу $10 \to 2$. Во второй строке результат. Теперь снова есть два варианта $9 \to 3$ и $12 \to 6$, но теперь первый запрещен по причине того, что после этого получатся числа 4 и 8, но эти числа уже во второй строке есть. Тогда выполняется второй вариант $12 \to 6$, получается третья строка. По прежнему нельзя $9 \to 3$, но и $11 \to 7$ нельзя, так как тогда будет повторение 8. Следующей по разности парой будет $7 \to 4$, которая и выполнит операцию. Получим четвертую строку. $3 \to 9$ снова запрещено, но теперь можно $11 \to 6$, и получим пятую строку. И теперь ни одной операции не получится произвести, то есть эта строка и будет ответом.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

vector<int> mask;

bool ok_turn(int a, int b){
    if(a > b)
        swap(a, b);

    if(mask[a+1] == 0 && mask[b-1] == 0 && a+2 != b)
        return 1;

    return 0;
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    int n;
    cin >> n;
    vector<int> v(n);
    mask.resize(1001, 0);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> v[i];
        mask[v[i]] = 1;
    }

    while(1){
    int big = -1, small = -1;

    for(int i = 1; i < n; i++)
        if(ok_turn(v[i-1], v[i])){
                int tbig = i-1;
                int tsmall = i;
                if(v[tbig] < v[tsmall])
                    swap(tbig, tsmall);
            if(big == -1){
                big = tbig;
```

```
                small = tsmall;
            }
            else{
                if(v[big] - v[small] < v[tbig] - v[tsmall] ||
                    (v[big] - v[small] == v[tbig] - v[tsmall] && v[tsmall] < v[small])){
                    big = tbig;
                    small = tsmall;
                }
            }
        }

        if(big == -1) break;
        mask[v[big]] = 0;
        v[big]--;
        mask[v[big]] = 1;
        mask[v[small]] = 0;
        v[small]++;
        mask[v[small]] = 1;
    }

    for(auto q : v) cout<<q<<' ';
    cout<<endl;
    return 0;
}
```

Задача III.1.1.3. Проектирование электросети (15 баллов)

Рассмотрим проект модели снабжения мегаполиса электроэнергией. Имеется n источников, генерирующих электроэнергию для нужд мегаполиса и уже запланированная структура линий электропередач, соединяющая эти источники с мегаполисом. Совокупно источники и мегаполис будем называть объектами. Для каждого источника известно, какую мощность он генерирует, кроме того известно, какие объекты будут соединены между собой передающими линиями. Известно, что вся сеть имеет древовидную структуру, то есть она связная и не имеет в своем составе циклов. Считаем, что мегаполис потребит всю мощность, которую получится доставить. Потери мощности при передаче считаем равными нулю.

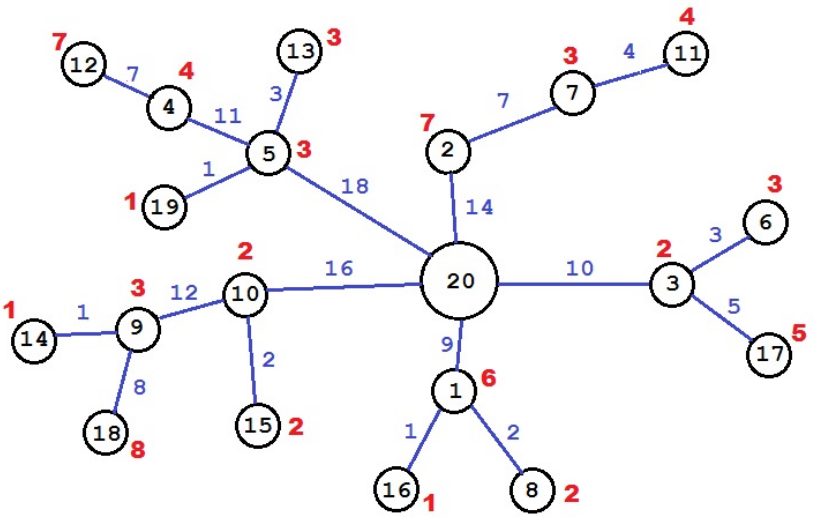
Требуется рассчитать пропускную способность каждой линии в проектируемой сети, то есть наибольшую мощность, которую можно передать по этой линии. При этом нужно указать минимально необходимую пропускную способность, такую, чтобы все имеющиеся генерируемые мощности были доставлены до мегаполиса.

Формат входных данных

В первой строке содержится число n — количество источников электроэнергии. Источники пронумерованы от 1 до n. Мегаполис имеет номер $n+1$. Далее в n следующих строках содержится по два числа a_i, b_j — обозначающих, что объекты номер a_i и b_j по проекту будут соединены линией. В последней строке содержатся n чисел gp_i через пробел, описывающих генерируемую мощность источника номер i. Все числа на входе в пределах от 1 до 1000. Гарантируется, что заданный граф является деревом, то есть связен и не содержит циклов.

Формат выходных данных

Для каждой линии в соответствующей ей отдельной строке указать необходимую минимальную пропускную способность. Порядок линий на выходе должен совпадать с порядком линий на входе.



Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
19 12 4 19 5 5 13 4 5 5 20 2 20 20 10 7 2 10 15 10 9 18 9 14 9 1 20 1 8 16 1 20 3 3 6 17 3 7 11 6 7 2 4 3 3 3 2 3 2 4 7 3 1 2 1 5 8 1

Стандартный вывод
7 1 3 11 18 14 16 7 2 12 8 1 9 2 1 10 3 5 4

Пояснение к примеру

На рисунке приведена схема для первого примера. Красным обозначены генерируемые мощности, синим — необходимые минимальные пропускные способности линий. В частности, видно, что восточный блок источников 3, 6 и 17 генерирует суммарную мощность равную 10, а юго-западный подблок 9, 14, 18 требует для себя линии с пропускной способностью 12, и т. д.

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

int n, a, b;
vector<vector<pii> > G;
vector<int> gp, ans;

void dfs(int a, int p){
    for(auto q : G[a])
        if(q.first != p){
            dfs(q.first, a);
            ans[q.second] = gp[q.first];
            gp[a] += gp[q.first];
        }
}

int main(){
```

```
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    cin >> n;
    n++;
    G.resize(n+2);
    gp.resize(n+1);
    ans.resize(n-1);
    for(int i = 0; i < n-1; i++){
        cin >> a >> b;
        G[a].push_back({b, i});
        G[b].push_back({a, i});
    }

    for(int i = 1; i < n; i++)
        cin >> gp[i];

    dfs(n, n);

    for(int i = 0; i < ans.size(); i++)
        cout << ans[i] <<endl;

    return 0;
}
```

Пример программы-решения

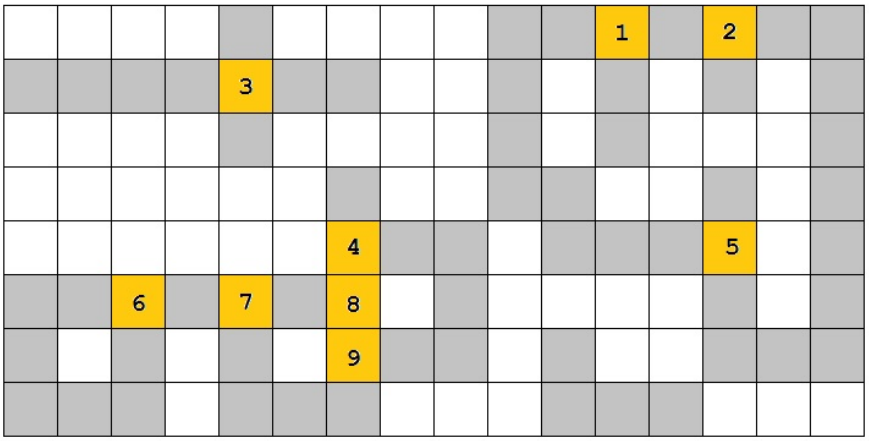
Ниже представлено решение на языке Python.

```
import sys
def dfs(u, par):
    global getId, a, dp, ans
    for elem in a[u]:
        if elem != par:
            dfs(elem, u)
            dp[u] += dp[elem]
            ans[getId[u][elem]] = dp[elem]
sys.setrecursionlimit(100000)
n = int(input())
n += 1
a = []
getId = []
ans = [0] * (n + 1)
dp = [0] * (n + 1)
for i in range(n + 1):
    a.append([])
    add = []
    for j in range(n + 1):
        add.append(-1)
    getId.append(add)
for i in range(n - 1):
    sd = input().split()
    u = int(sd[0])
    v = int(sd[1])
    a[u].append(v)
    a[v].append(u)
    getId[u][v] = i + 1
    getId[v][u] = i + 1
oo = list(map(int, input().split()))
for i in range(len(oo)):
```

```
    dp[i + 1] = oo[i]
dfs(n, -1)
for i in range(1, n):
    print(ans[i])
```

Задача III.1.1.4. Матрица кратчайших расстояний (25 баллов)

Рассмотрим уже известную модель дорожной сети, получаемую при анализе снимка местности. Изображение состоит только из точек двух типов. Точка, отмеченная 1, изображает дорожное полотно, все остальное изображается точками 0. При этом ширина дороги всегда ровно 1 точка. Нигде на изображении нет квадрата 2×2, состоящего из точек 1. Будем считать, что в точках, являющихся пересечением трех или четырех дорог находятся населенные пункты. Пронумеруем эти населенные пункты от 1 до K, сверху вниз и слева направо (см. пример, $K = 9$).



В данном случае нужно решить классическую задачу теории графов для не самого классического способа задания этих графов — при помощи упрощенного рисунка. А именно, нужно для каждой пары населенных пунктов определить кратчайшее расстояние между ними при движении по дорогам, или выяснить, что по дорогам попасть из одного в другой не получится. Будем считать, что перемещаться можно только из одной клетки помеченной 1 в соседнюю по стороне, так же помеченную 1, при этом длина такого перемещения равна 1.

Формат входных данных

Первая строка содержит два числа N и M через пробел — размер изображения. Далее в N строках содержится по M символов 0 или 1 без пробелов между ними, соответствующих изображению. Нигде на изображении нет квадрата 2×2, состоящего из точек 1. N и M находятся в пределах от 5 до 50. Гарантируется, что есть хотя бы один населенный пункт.

Формат выходных данных

Вывести K строк, по K чисел в каждой — матрицу кратчайших расстояний. В i-й строке на j-й позиции должно находиться кратчайшее расстояние между пунктами номер i и номер j. Обратите внимание на формат вывода: каждое расстояние

требуется выводить в формате пять знаков, недостающие символы нужно заменять пробелами. Если из одного пункта попасть в другой нельзя, нужно выводить в таком случае -1.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
8 16 0000100001111111 1111111001010101 0000100001010001 0000001001100101 0000001110111101 1111111010000101 1010101110100111 1110111000111000

Стандартный вывод
0 2 -1 -1 10 -1 -1 -1 -1 2 0 -1 -1 12 -1 -1 -1 -1 -1 -1 0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 0 -1 5 3 1 2 10 12 -1 -1 0 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 5 -1 0 2 4 5 -1 -1 -1 3 -1 2 0 2 3 -1 -1 -1 1 -1 4 2 0 1 -1 -1 -1 2 -1 5 3 1 0

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

int n, m;
vector<string> S;
vector<vector<int> > M, H;
int dx[4] = {0, -1, 0, 1};
int dy[4] = {-1, 0, 1, 0};

bool intr(int x, int y){
    return (x >= 0 && y >= 0 && x < n && y < m);
}

bool np(int x, int y){
    int r = 0;
    for(int i = 0; i < 4; i++){
        int nx = x + dx[i];
```

```
22          int ny = y + dy[i];
23          if(intr(nx, ny))
24              r += S[nx][ny] - '0';
25      }
26
27      return (r >= 3 && S[x][y] == '1');
28  }
29
30  void dfs(int x, int y, int d, int p){
31      if(M[x][y] == 0)
32          M[x][y] = 1;
33      for(int i = 0; i < 4; i++){
34          int nx = x + dx[i];
35          int ny = y + dy[i];
36
37          if(intr(nx, ny) && S[nx][ny] == '1'){
38              if(M[nx][ny] == 0)
39                  dfs(nx, ny, d+1, p);
40              else
41                  if(M[nx][ny] < 0 && -M[nx][ny] != p){
42                     int np = -M[nx][ny];
43                      H[np][p] = min(H[np][p], d+1);
44                      H[p][np] = min(H[p][np], d+1);
45                  }
46          }
47      }
48  }
49
50  int main(){
51      ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);
52
53      cin >> n >> m;
54      S.resize(n);
55      for(int i = 0; i < n; i++)
56          cin >> S[i];
57
58      M.resize(n, vector<int> (m, 0));
59
60      int K = 0;
61      for(int i = 0; i < n; i++)
62          for(int j = 0; j < m; j++)
63          if(np(i, j)){
64              K--;
65              M[i][j] = K;
66          }
67
68          H.resize(-K+1, vector<int>(-K+1, 1e9));
69          for(int i = 1; i <= -K; i++)
70              H[i][i] = 0;
71
72      for(int i = 0; i < n; i++)
73          for(int j = 0; j < m; j++)
74              if(M[i][j] < 0)
75                  dfs(i, j, 0, -M[i][j]);
76
77
78      for (int k = 1; k <= -K; k++)
79          for (int i = 1; i <= -K; i++)
80              for (int j = 1; j <= -K; j++)
81                  H[i][j] = min (H[i][j], H[i][k] + H[k][j]);
```

```
82
83          for(int i = 1; i <= -K; i++)
84              for(int j = 1; j <= -K; j++)
85                          if(H[i][j] == 1e9)
86                              H[i][j] = -1;
87
88          for(int i = 1; i <= -K; i++){
89              for(int j = 1; j <= -K; j++)
90              cout<<setw(5)<<H[i][j];
91              cout<<endl;
92          }
93      return 0;
94  }
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```
1   import queue
2   dx = [-1, 0, 1, 0]
3   dy = [0, 1, 0, -1]
4   n, m = list(map(int, input().split()))
5   a = [['0'] * (m + 2) for i in range(n + 2)]
6   check = [[-1] * (m + 2) for i in range(n + 2)]
7   for i in range(1, n + 1):
8       om = input()
9       for j in range(m):
10          a[i][j + 1] = om[j]
11  yk = 1
12  ff = []
13  for i in range(1, n + 1):
14      for j in range(1, m + 1):
15          if a[i][j] == '1':
16              cc = ord(a[i - 1][j]) + ord(a[i + 1][j]) + ord(a[i][j - 1]) + ord(a[i][j +
                ↪  1]) - ord('0') - ord('0') - ord('0') - ord('0')
17              if cc >= 3:
18                  check[i][j] = yk
19                  ff.append([i, j])
20                  yk += 1
21  for k in range(len(ff)):
22      Q = queue.Queue()
23      Q.put(ff[k])
24      dist = [[1000000000] * (m + 2) for i in range(n + 2)]
25      dist[ff[k][0]][ff[k][1]] = 0
26      while Q.empty() == False:
27          u = Q.get()
28          for i in range(4):
29              if (u[0] + dy[i] >= 1 and u[0] + dy[i] <= n and u[1] + dx[i] >= 1 and u[1]
                ↪  + dx[i] <= m and a[u[0] + dy[i]][u[1] + dx[i]] == '1' and dist[u[0] +
                ↪  dy[i]][u[1] + dx[i]] > dist[u[0]][u[1]] + 1):
30                      dist[u[0] + dy[i]][u[1] + dx[i]] = dist[u[0]][u[1]] + 1
31                      Q.put([u[0] + dy[i], u[1] + dx[i]])
32      for i in range(len(ff)):
33          if dist[ff[i][0]][ff[i][1]] == 1000000000:
34              st = repr(-1).rjust(5)
35              print(st,end='',flush = True)
36          else:
37              st=repr(dist[ff[i][0]][ff[i][1]]).rjust(5)
```

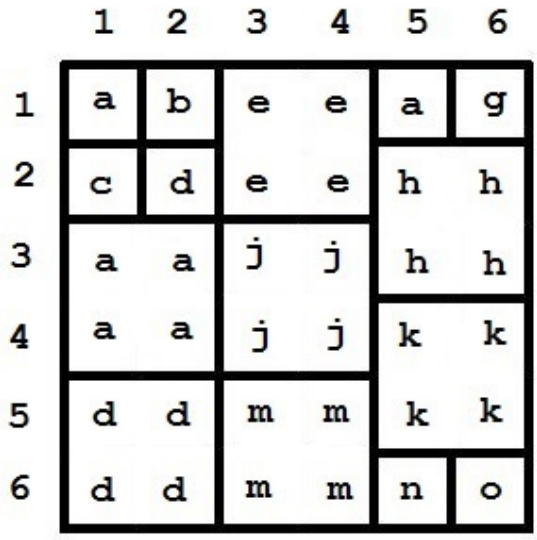
```
38              print(st,end='',flush = True)
39      print()
```

Задача III.1.1.5. Агломерация (33 баллов)

Агломерация — это «компактное скопление населенных пунктов, главным образом городов, местами срастающихся, объединенных в сложную многокомпонентную динамическую систему с интенсивными производственными, транспортными и культурными связями». Изначально отдельно образовавшиеся поселения со временем разрастаются и сливаются в одно многоуровневое образование — городскую агломерацию. При этом процесс слияния может иметь рекурсивную структуру, когда несколько агломераций сливаются в одну агломерацию более высокого уровня.

В этой задаче нужно построить обработку снимка городской агломерации, находящую ее уровень. Идея очевидна — если в агломерацию входит как часть агломерация уровня $n-1$ и нет частей-агломераций уровня n, то сама эта рассматриваемая агломерация имеет уровень n.

Но не все так просто — в данной задаче уточним понятие агломерации следующим образом: под агломерацией будем понимать любую квадратную область плоскости, целиком занятую отдельными поселениями, причем любое поселение, имеющееся в этом квадрате, не должно выходить за его пределы. Любой отдельный населенный пункт назовем агломерацией первого уровня. На снимке такой населенный пункт имеет вид квадрата, все ячейки которого обозначаются одним и тем же символом. Из низкоуровневых агломераций путем слияния получаются более высокоуровневые. Для заданного снимка квадратной области, целиком заполненной населенными кварталами, требуется определить его уровень.



Рассмотрим пример. Каждый единичный квадрат обозначен своим символом и является жилым кварталом. Если несколько рядом стоящих кварталов обозначены одним символом, они образуют населенный пункт, целиком занимающий квадратную область. Каждый такой населенный пункт образует агломерацию первого уровня. Всего таких на рисунке 15. Агломераций второго уровня на рисунке две, укажем их левый верхний и правый нижний углы: (1, 1) —- (2, 2) и (3, 1) —- (6, 4). Агломераций

третьего уровня одна, ее координаты (1, 1) — (4, 4). Весь квадрат в примере является агломерацией уровня четыре.

Отдельно следует отметить, что разные населенные пункты могут быть обозначены одним символом, при условии, что они не имеют общую границу ненулевой длины.

Формат входных данных

В первой строке находится число n — размер стороны квадрата заданной агломерации ($1 \leqslant n \leqslant 100$). В следующих n строках содержится по n маленьких букв из множества a ... z без пробелов, описывающих населенные пункты в составе агломерации. Буквы одного вида, являющиеся соседними по стороне всегда образуют квадраты. Некоторые пары различных квадратов могут быть обозначены одинаковыми буквами, но при этом данные пары квадратов не имеют общих границ ненулевой длины.

Формат выходных данных

Вывести одно число — уровень представленной во входных данных агломерации.

Примеры

Пример №1

Стандартный ввод
6 abeeag cdeehh aajjhh aajjkk ddmmkk ddmmno
Стандартный вывод
4

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке C++.

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef long long ll;
typedef pair<int, int> pii;
typedef long double ld;

int n;
vector<vector<int> > u, d, l ,r;

bool sq(int rx, int ry, int D){
```

```
    int lx = rx - D + 1;
    int ly = ry - D + 1;
    if(r[lx][ly] >= D && d[lx][ly] >= D && u[rx][ry] >= D && l[rx][ry] >= D)
        return 1;
    return 0;
}

int main(){
    ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0);

    string s;
    cin >> n;
    vector<string> v(n+2, string(n+2, '#'));
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        cin >> s;
        s = "#" + s + "#";
        v[i] = s;
    }

    u.resize(n+2, vector<int>(n+2, 0));
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    for(int j = 1; j <= n; j++){
        u[i][j] = (v[i][j] != v[i][j+1]);
        u[i][j] += u[i-1][j] * (u[i][j] != 0);
    }

    l.resize(n+2, vector<int>(n+2, 0));
    for(int j = 1; j <= n; j++)
        for(int i = 1; i <= n; i++){
            l[i][j] = (v[i][j] != v[i+1][j]);
            l[i][j] += l[i][j-1] * (l[i][j] != 0);
        }

    d.resize(n+2, vector<int>(n+2, 0));
    for(int i = n; i >= 1; i--)
        for(int j = n; j >= 1; j--){
            d[i][j] = (v[i][j] != v[i][j-1]);
            d[i][j] += d[i+1][j] * (d[i][j] != 0);
        }

    r.resize(n+2, vector<int>(n+2, 0));
    for(int j = n; j >= 1; j--)
        for(int i = n; i >= 1; i--){
            r[i][j] = (v[i][j] != v[i-1][j]);
            r[i][j] += r[i][j+1] * (r[i][j] != 0);
        }

    vector<vector<int> > dp(n+2, vector<int>(n+2, 0));

    for(int u = 1; u <= n; u++)
        for(int i = n; i >= 1; i--)
            for(int j = n; j >= 1; j--)
                if(i - u + 1 >= 1 && j - u + 1 >= 1){
                    dp[i][j] = max({dp[i][j], dp[i][j-1], dp[i-1][j], dp[i-1][j-1]});
                    if(sq(i, j, u)) dp[i][j]++;
                }

    cout << dp[n][n]<<endl;

    return 0;
```

```
}
```

Пример программы-решения

Ниже представлено решение на языке Python.

```python
n = int(input())
a = [['#'] * (n + 2) for i in range(n + 2)]
for i in range(1, n + 1):
    sd = input()
    for j in range(1, n + 1):
        a[i][j] = sd[j - 1]
ans = []
k = [[0] * (n + 2) for i in range(n + 2)]
for i in range(n + 2):
    ans.append(k)
for sz in range(1, n + 1):
    for i in range(1, n - sz + 2):
        for j in range(1, n - sz + 2):
            y1 = i
            x1 = j
            x2 = j + sz - 1
            y2 = i + sz - 1
            xx1 = x1
            xx2 = x2
            ch = 1
            while x1 <= x2:
                if (a[y1 - 1][x1] == a[y1][x1] or a[y2][x1] == a[y2 + 1][x1]):
                    ch = 0
                    break
                x1 += 1

            while y1 <= y2:
                if (a[y1][xx1] == a[y1][xx1 - 1] or a[y1][xx2] == a[y1][xx2 + 1]):
                    ch = 0
                    break
                y1 += 1;
            ans[sz][i][j] =ch + max(ans[sz - 1][i][j], max(ans[sz - 1][i][j + 1],
            ↪  max(ans[sz - 1][i + 1][j], ans[sz - 1][i + 1][j + 1])))
print(ans[n][1][1])
```

Физика. 8-9 класс

Задача III.1.2.1. Спутниковая съемка с низкой околоземной орбиты (25 баллов)

Спутник вращается по круговой орбите высотой $H = 500$ км, проходящей точно над полюсами Земли. Съемка Земли выполняется с помощью оптико-электронной камеры. Разрешение (проекция пикселя) составляет $l = 1$ метр. Здесь под разрешением подразумевается максимальная длина стороны квадрата на поверхности Земли, изображение которого целиком помещается в один пиксель фотоприемной матрицы, размещенной в фокальной плоскости объектива камеры. Радиус Земли 6370 км, постоянная Планка $6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$ с, масса Земли $5,97 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$ м^2/кг^2.

1.1. (8 баллов) Сколько времени потребуется на съемку всей территории Москвы в пределах МКАД? Съемка осуществляется путем сканирования местности при пролете с севера на и ведется в надир (оптическая ось расположена вертикально). Координаты самой южной точки МКАД $55,57°$ с.ш., $37,66°$ в.д. (путепровод Павелецкого направления ЖД над МКАД), координаты самой северной точки МКАД $55,91°$ с.ш, $37,58°$ в.д. (автобусная остановка «Алтуфьевское шоссе» на МКАД).

Решение

Орбитальная скорость спутника $V_{\text{орб}}$

$$V_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} = 7613,1 \text{ м/с}$$

Тогда скорость подспутниковой точки с учетом круглости Земли можно определить как:

$$V_{\text{птс}} = V_{\text{орб}} \cdot \frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H} = \frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} =$$

$$= \frac{6370 \cdot 10^3}{6870 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6870 \cdot 10^3}} = 7059,18 \text{ м/с}$$

Определим расстояние по меридиану между границами Москвы:

$$a = R \cdot (\varphi_{\text{юг}} - \varphi_{\text{сев}}) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Тогда смещение на расстояние между точками произойдет за время :

$$T = \frac{a}{V_{\text{пст}}} = \frac{6370 \cdot 1000 \cdot (55,91 - 55,57) \cdot \frac{3,14}{180}}{7059,18} = 5,4 \text{ с}$$

Ответ: 5,4 с.

Система оценки

1. Правильно написана формула для орбитальной скорости спутника — 2 балла.
2. Правильно написана формула для скорости подспутниковой точки — 2 балла.
3. Правильно написана формула для длины дуги меридиана в границах Москвы — 1 балл.
4. Правильно написана формула для времени смещения — 2 балла.
5. Правильно найдено численное значение времени смещения — 1 балл.

1.2. (8 балла) Какой минимальный интервал времени может быть между двумя съемками города, расположенного на широте 60 градусов? Принять, что спутник способен отклоняться на угол крена 45 градусов. Первый снимок делается в надир.

Решение

Во время пролета по витку 1 город А находится к западу от трассы полета спутника. За 1,5 часа город сместился на восток вследствие суточного вращения Земли. К моменту пролета 60 градусов с.ш. на витке 2 оказался восточнее трассы полета спутника.

Найдем период обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi \cdot (R_{\text{зем}} + H)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G \cdot M_{\text{зем}}}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (1000 \cdot (6370 + 500))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{66,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 5667 \text{ с}$$

За один виток точка на широте 60 градусов пройдет расстояние L

$$L = T \cdot R_{\text{зем}} \cdot cos60^\circ \cdot \omega_{\text{зем}} = T \cdot R_{\text{зем}} \cdot cos60^\circ \cdot \frac{2\pi}{T_{\text{зем}}} =$$

$$= 5667 \cdot 6370 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{86400} = 1311,9 \text{ км}$$

Тогда при высоте орбиты 500 км необходимый угол крена на следующем витке составит более 60 градусов, что явно превосходит возможности спутника. Значит, нужно дождаться момента, когда Земля совершит почти полный оборот вокруг своей оси.

За одни сутки спутник совершит n витков:

$$n = \frac{T_{\text{зем}}}{T} = \frac{86400}{5667} = 15,25 \text{ витков}$$

Возьмем за точку отсчета времени момент первой съемки и определим положение города к моменту завершения витка №15. Он будет расположен на расстоянии x к западу от трассы полета спутника:

$$x = (n \cdot T - 15 \cdot T) \cdot R_{\text{зем}} \cdot cos60^\circ \cdot \omega_{\text{зем}} = 0,25 \cdot 5667 \cdot 6370 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{86400} = 328 \text{ км}$$

Это потребует отклонение спутника на угол крена, явно меньший 45 градусов, что соответствует его возможностям. Значит, временнОй промежуток между съемками соответствует 15 виткам. Тогда:

$$\tau = 15 \cdot T = 15 \cdot 5667 = 85005c = 23,6 \text{ часов}$$

Ответ: 23,6 часов.

Система оценки

1. Правильно написана формула для периода обращения спутника — 2 балла.
2. Показано, что требуемый угол крена на следующем витке превосходит.
3. возможности системы управления спутником — 1 балл.
4. Верно вычислено количество витков в сутки, совершаемых спутником — 2 балла.
5. Верно написана формула для расстояния от города до трассы полета — 2 балла.
6. Правильно вычислен в числах временной интервал — 1 балл.

1.3. (4 балла) Кроме отклонения по крену, спутник способен поворачиваться по углу тангажа. В этом случае оптическая ось камеры отклоняется от вертикали в плоскости орбиты, то есть спутник «заглядывает» вперед или назад. На какой угол по тангажу должен быть способен отклоняться спутник, чтобы сделать два снимка одного и того же места с интервалом $\tau = 1,5$ минуты: первый раз при съемке в надир, второй раз — с отклонением по тангажу назад.

Решение

За время τ подспутниковая точка пройдет по Земле расстояние L:

$$L = \tau \cdot V_{\text{птс}} = 1,5 \cdot 60 \cdot 7059,18 = 635,3 \text{ км}$$

Это примерно 10% от радиуса Земли, что позволяет считать ее далее плоской. Тогда угол тангажа φ:

$$\varphi = arctg\frac{L}{H} = arctg\frac{635,3}{500} = 52 \text{ градуса}$$

Ответ: 52 градуса.

Система оценки

1. Правильно написана формула для угла тангажа — 2 балла.
2. Правильно найден в числах угол тангажа — 2 балла.

1.4. (5 баллов) Какое минимальное количество спутников нужно равномерно разместить на одной круговой орбите высотой 500 км, чтобы получившая группировка была способна делать снимки объектов под своей орбитой с оперативностью не хуже $\tau = 11$ минут (при нахождении объекта на освещенной стороне Земли)? Каждый спутник способен отклоняться по тангажу на угол $\varphi = \pm 10$ градусов. Под оперативностью подразумевается максимальное время от выдачи спутнику команды на съемку до ее выполнения.

Решение

Величина $H \cdot tg\varphi = 500 \cdot 0,176 = 88$ км намного меньше радиуса Земли, поэтому здесь можно пренебречь разницей между проекцией дуги на поверхность Земли и хордой.

Предположим, спутник получил команду на съемку. За время τ он может снять все на отрезке $H \cdot tg\varphi$ при отклонении назад, все на отрезке $\tau \cdot V_{\text{пст}}$ без отклонения от

вертикали и все на отрезке $H \cdot tg\varphi$ при отклонении вперед. Тогда на каждый спутник должна приходиться длина дуги на поверхности Земли L:

$$L = \tau \cdot V_{\text{птс}} + 2 \cdot H \cdot tg\varphi$$

Здесь учтено, что спутник может отклониться от вертикали на угол φ. Тогда требуемое количество спутников N определяется длиной экватора $2 \cdot \pi \cdot R_{\text{зем}}$:

$$N = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{\text{зем}}}{L} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{\text{зем}}}{\tau \cdot V_{\text{птс}} + 2 \cdot H \cdot tg\varphi} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6367 \cdot 1000}{60 \cdot 11 \cdot 7059,18 + 2 \cdot 500 \cdot 1000 \cdot 0,176} = 8,28 = 9 \text{ спутников}$$

Ответ: 9 спутников.

Система оценки

1. Правильно написана формула для длины дуги орбиты/поверхности Земли, приходящейся на один спутник — 2 балла.
2. Правильно написана формула для требуемого количества спутников — 2 балла.
3. Правильно найдено количество спутников с учетом округления вверх — 1 балл.

Задача III.1.2.2. Спутниковая съемка с геостационарной орбиты (25 баллов)

1.1. (10 баллов) Метеоспутник размещен на геостационарной орбите и оборудован камерой, наблюдающей весь видимый диск Земли. Какое разрешение будет иметь местность около Санкт-Петербурга, если для подспутниковой точки оно составляет 5 км? Под разрешением здесь подразумевается наибольшая из сторон трапеции, образующейся при проекции квадратного пикселя на наклонную поверхность. Санкт-Петербург имеет координаты 60° с.ш и 30, 33° в.д., точка стояния спутника 30, 33° в.д. Геостационарная орбита имеет высоту 35798 км над поверхностью Земли.

Решение

Так как географические долготы Санкт-Петербурга и точки стояния спутника совпадают, то проекция квадратного пикселя будет иметь вид равнобедренной трапеции. В то же время расстояния от спутника до верхней и нижней сторон трапеции практически равны. Следовательно, проекцией пикселя можно принять прямоугольник. Кроме того, размер проекции пикселя по меридиану будет больше, чем по географической параллели, так как имеет место наклон наблюдаемой площадки только по меридиану. Найдем связь размеров получающегося прямоугольника и проекции пикселя а на подспутниковую точку.

$$L = \sqrt{(R_{\text{зем}} \cdot sin60°)^2 + (H_{\text{гсо}} + R_{\text{зем}} \cdot (1 - cos60°))^2} =$$

$$= \sqrt{(6370 \cdot 0,866)^2 + (35798 + 6370 \cdot 0,5)^2} = 39371,4 \text{ км}$$

Расстояние до подспутниковой точки, очевидно, равно высоте геостационарной орбиты $H_{\text{гсо}}$. Тогда дальность съемки L до Санкт-Петербурга:

Теперь найдем возвышение над горизонтом α, под которым виден спутник из Санкт- Петербурга. По теореме синусов:

$$\frac{H_{\text{гсо}} + R_{\text{зем}}}{sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{L}{sin60^\circ}$$

Отсюда:

$$sin(90^\circ + \alpha) = cos\alpha = \frac{H_{\text{гсо}} + R_{\text{зем}}}{L} \cdot sin60^\circ = \frac{35798 + 6370}{39371,4} \cdot 0,866 = 0,9275$$

Тогда высота прямоугольника, а равно его размер по меридиану, составит

$$h = \frac{L}{H_{\text{гсо}}} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{sin\alpha} = \frac{39371,4}{35798} \cdot 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0,9275^2}} = 14,7 \text{ км}$$

Что и является искомым разрешением снимка. Разрешение снимка по параллели будет лучше:

$$\frac{L}{H_{\text{гсо}}} \cdot a$$

Ответ: 14,7 км.

Система оценки

1. Показано, что проекцию пикселя можно принять за прямоугольник — 2 балла.
2. Показано, что размер прямоугольника по меридиану больше, чем по географической
3. параллели — 3 балла.
4. Правильно найдено возвышение спутника над местным горизонтом — 2 балла.
5. Правильно записана формула для разрешения — 2 балла.
6. Верный численный ответ — 1 балл.

1.2. (10 баллов) Какой минимально допустимый формат (пиксели·пиксели) должен иметь снимок, создаваемый камерой на борту геостационарного спутника, чтобы в него целиком помещался весь видимый диск Земли и при этом обеспечивалось разрешение $a = 5$ км для местности около подспутниковой точки? Ответ округлить до сотен в бОльшую сторону.

Решение

Найдем угловой размер пикселя:

$$\varphi_{\text{пикс}} = \frac{a}{H_{\text{гсо}}} = \frac{5}{35798} = 1,397 \cdot 10^{-4} \text{ радиан}$$

Теперь найдем угловой диаметр Земли при ее наблюдении с геостационарной орбиты:

$$\varphi_{\text{зем}} = 2 \cdot arcsin(\frac{R_{\text{зем}}}{H_{\text{гсо}} + R_{\text{зем}}}) = 2 \cdot arcsin(\frac{6370}{35798 + 6370}) = 0,3033 \text{ радиан}$$

Тогда требуемый размер (в пикселях) стороны квадратного снимка составит:

$$N = \frac{\varphi_{\text{зем}}}{\varphi_{\text{пикс}}} = \frac{0,3033}{1,397 \cdot 10^{-4}} = 2171 \text{ пикселей } \approx 2200 \text{ пикселей}$$

Ответ: 2200 пикселей.

Система оценки

1. Правильно написана формула для углового размера пикселя — 2 балла.
2. Правильно написана формула для углового диаметра видимого диска Земли — 3 балла.
3. Правильно написана формула для стороны кадра — 3 балла.
4. Верный численный ответ — 2 балла.

1.3. (5 баллов) Геостационарный метеоспутник делает снимки с частотой $v = 3$ кадра в секунду. Каждый снимок представляет собой квадрат $N \cdot N$ пикселей с форматом, определенным в задаче 2.2. Какой объем данных должна вмещать в себя бортовая память, если передача снимков на Землю производится по радиосвязи 1 раз в сутки? Съемка производится $T = 8$ часов в сутки. Каждый пиксель снимка занимает в памяти объем $n = 4$ бита.

Решение

За одни сутки спутник накопит объем данных:

$$I = N^2 \cdot v \cdot T \cdot n = 2200^2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3600 \cdot 4 = 1,67 \cdot 10^{12} \text{ бит}$$

Ответ: $1,67 \cdot 10^{12}$ бит.

Система оценки

1. Правильно написана формула для объема данных — 3 балла.
2. Верный численный ответ — 2 балла.

Задача III.1.2.3. Космическая радиосвязь (10 баллов)

1.1. (10 баллов) Орбита спутника связи находится в экваториальной плоскости, его движение сонаправлено с суточным вращением Земли. Высота орбиты спутника такова, что период обращения составляет 12 часов. Какой будет длительность сеанса связи τ для экваториальной страны, находящейся на относительно небольшом плоском острове? Радиус Земли 6370 км. Остров расположен на экваторе. Антенны на острове способны обеспечивать информационный обмен со спутником при наличии прямой видимости.

Решение

Угловые скорости спутника и суточного вращения Земли связаны с длительностью сеанса τ и угловой длиной φ пролетаемой за это время дуги:

$$(\omega_{\text{спутн}} - \omega_{\text{земли}}) \cdot \tau = \varphi = 2 \cdot arccos(\frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H})$$

Так как период обращения спутника 12 часов, то $\omega_{\text{спутн}} = 2 \cdot \omega_{\text{земли}}$

Тогда для длительности сеанса:

$$\tau = \frac{2 \cdot arccos(\frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+H})}{2 \cdot \omega_{\text{земли}} - \omega_{\text{земли}}} = \frac{2 \cdot arccos(\frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+H})}{\omega_{\text{земли}}}$$

Составим уравнение для высоты орбиты H:

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} \cdot \frac{T_{\text{сутки}}}{2} = 2 \cdot \pi \cdot (R_{\text{зем}} + H)$$

Тогда радиус орбиты $R_{\text{зем}} + H$:

$$R_{\text{зем}} + H = (\sqrt{G \cdot M_{\text{зем}}} \cdot \frac{T_{\text{сутки}}}{4 \cdot \pi})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} \cdot \frac{86400}{4 \cdot 3,1416})^{\frac{2}{3}}$$

Тогда время сеанса τ:

$$\tau = \frac{2 \cdot arccos(\frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+H})}{\omega_{\text{земли}}} = \frac{arccos(\frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+H}) \cdot T_{\text{сутки}}}{\pi} =$$

$$= \frac{arccos(\frac{6370}{26601,5}) \cdot 85400}{3,1416} = 36550c = 10\text{часов}$$

Ответ: 10 часов.

Система оценки

1. Правильно написана формула для связи угловых скоростей и длины дуги орбиты — 3 балла.
2. Показано, что угловая скорость спутника в 2 раза больше, чем для Земли — 1 балл.
3. Верно написана формула для радиуса или высоты орбиты — 2 балла.
4. Верно написана формула для длительности сеанса связи — 2 балла.
5. Верный численный ответ — 2 балла.

Физика. 10-11 класс

Задача III.1.3.1. Спутниковая съемка (25 баллов)

Спутник вращается по круговой орбите высотой $H = 500$ км, проходящей точно над полюсами Земли. Съемка Земли выполняется с помощью оптико-электронной

камеры. Фотоприемник представляет собой матрицу размером $4000 \cdot 2700$ пикселей, широкая сторона матрицы расположена поперек направления полета. Разрешение (проекция пикселя) составляет $l = 1$ метр. Здесь и далее под разрешением подразумевается максимальный размер стороны квадрата на поверхности Земли, изображение которого целиком помещается в один пиксель фотоприемной матрицы, размещенной в фокальной плоскости объектива камеры. Радиус Земли 6370 км, постоянная Планка $6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$ с, масса Земли $5,97 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $6,67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$ м^2/кг^2.

1.1. (8 баллов) Какой временной интервал будет между снимками Москвы и Тулы? Оба снимка делаются в момент пролета над центрами городов. Съемка ведется в надир (оптическая ось расположена вертикально). Координаты центра Тулы $54,2°$ с.ш., $37,6°$ в.д., координаты центра Москвы $55,75°$ с.ш., $37,6°$ в.д., в данном пункте суточным вращением Земли пренебречь.

Решение

Орбитальная скорость спутника $V_{\text{орб}}$

$$V_{\text{орб}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} = 7613,1 \text{ м/с}$$

Тогда скорость подспутниковой точки с учетом круглости Земли можно определить как:

$$V_{\text{птс}} = V_{\text{орб}} \cdot \frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H} = \frac{R_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + H}} =$$

$$= \frac{6370 \cdot 10^3}{6870 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6870 \cdot 10^3}} = 7059,18 \text{ м/с}$$

Определим расстояние между городами с учетом того, что Тула находится точно к югу от Москвы:

$$a = R \cdot (\varphi_{\text{юг}} - \varphi_{\text{сев}}) \cdot \frac{\pi}{180}$$

Тогда смещение на расстояние между городами произойдет за время T:

$$T = \frac{a}{V_{\text{пст}}} = \frac{6370 \cdot 1000 \cdot (55,75 - 54,2) \cdot \frac{3,14}{180}}{7059,18} = 24,4 \text{ с}$$

Ответ: 24,4 с.

Система оценки

1. Верно написана формула для скорости подспутниковой точки или орбитальной скорости — 2 балла.
2. Верно написана формула для связи географических широт городов и расстояния между ними — 2 балла.
3. Правильно составлена формула для искомого временнОго интервала — 2 балла.

4. Верный численный ответ — 2 балла.

1.2. (7 баллов) На какой угол по крену должен быть способен отклоняться спутник, чтобы иметь возможность снять город на двух подряд идущих витках? Съемка осуществляется с одинаковым углом крена, но с отклонением в разные стороны (вправо/влево) на первом и втором витках соответственно. Отклонение необходимо для учета смещения Земли вследствие ее суточного вращения. Город расположен на широте 60 градусов. Угол крена отсчитывается в плоскости, перпендикулярной направлению полета спутника.

Решение

Во время пролета по витку 1 город А находится к западу от трассы полета спутника. За 1,5 часа город сместился на восток вследствие суточного вращения Земли. К моменту пролета 60 градусов с.ш. на витке 2 оказался восточнее трассы полета спутника.

Найдем период обращения спутника:

$$T = \frac{2\pi \cdot (R_{\text{зем}} + H)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G \cdot M_{\text{зем}}}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (1000 \cdot (6370 + 500))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{66,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 5667 \text{ с}$$

За один виток точка на широте 60 градусов пройдет расстояние L

$$L = T \cdot R_{\text{зем}} \cdot cos60^\circ \cdot \omega_{\text{зем}} = T \cdot R_{\text{зем}} \cdot cos60^\circ \cdot \frac{2\pi}{T_{\text{зем}}} =$$

$$= 5667 \cdot 6370 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3,14}{86400} = 1311,9 \text{ км}$$

Следовательно, расстояние от снимаемой области до трассы полета спутника составит $0,5 \cdot L$ в обоих случаях (углы крена одинаковы).

Тогда в каждый момент съемки спутник должен отклониться на угол (вправо или влево):

$$\Theta = arctg(\frac{0,5 \cdot L}{H}) = arctg(\frac{655,95}{500}) = 52,7 \text{ градуса}$$

Ответ: 52,7 градуса.

Система оценки

1. Верно написана формула для периода обращения спутника — 2 балла.

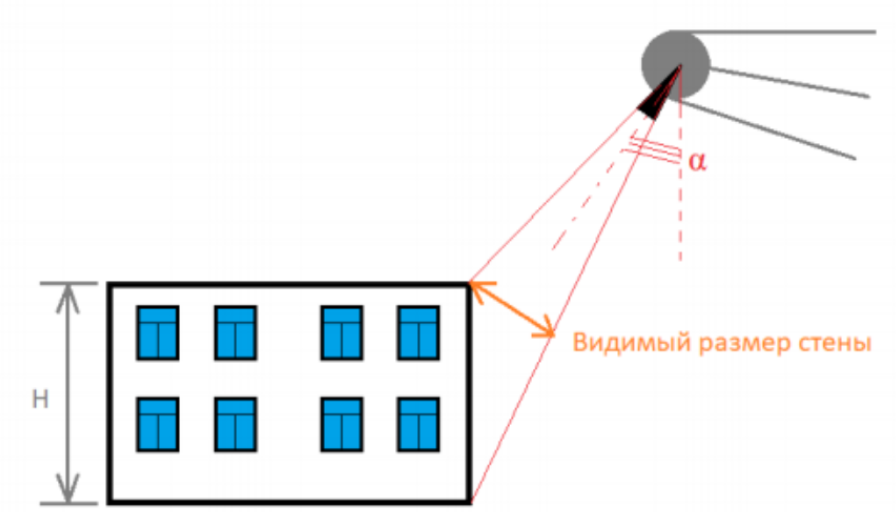
2. Верно составлена формула для пути, пройденного городом вследствие суточного вращения Земли — 2 балл.
3. Правильно составлена формула для искомого угла -2 балла.
4. Верный численный ответ — 1 балл.

1.3. (5 баллов) Кроме отклонения по крену, спутник способен отклоняться для наблюдения с ненулевым углом тангажа, «заглядывая» вперед или назад. В этом случае отклонение оптической оси камеры происходит в плоскости орбиты спутника. Два снимка, сделанная с углами тангажа $\pm\alpha$, способны дать «стереопару» — двухслойное изображение, способное дать информацию о рельефе местности. При совмещении двух снимков одной и той же местности, составляющих стереопару, высотные объекты будут казаться размытыми, тогда как плоские сохранят четкие границы. Каким должен быть угол тангажа, чтобы выявлять здания высотой более $H = 10$ метров на такой паре снимков? Снимки совмещены по объектам на Земле с пренебрежимо малой высотой. Здание уверенно распознается как неплоский объект, если изображения его крыши сдвинуты на снимках на $a = 2$ пикселя относительно друг друга.

Решение

Чтобы выявить рельефность объекта, нужно, чтобы его вершина на двух снимках была сдвинута не менее, чем на 2 пикселя. Для наблюдателя это будет соответствовать кажущемуся смещению в $a \cdot l$ метров. Другими словами, вертикальная стена здания будет иметь видимую высоту $0,5 \cdot a \cdot l$ метров. Тогда неплоскость объекта будет различима при выполнении условия:

$$\frac{a \cdot l}{2 \cdot H} \geqslant tg\alpha$$



Тогда:

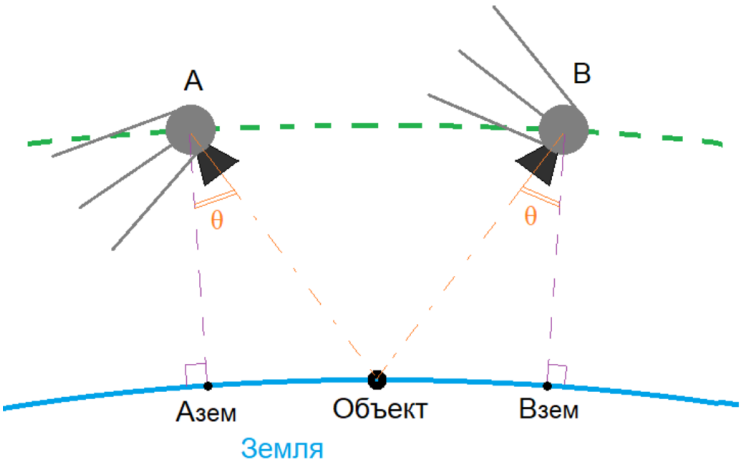
$$\alpha \geqslant arctg(\frac{a \cdot l}{2 \cdot H}) = arctg(\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 10}) = 5,7 \text{ градусов}$$

Ответ: 5,7 градусов.

Система оценки

1. Составлено уравнение, связывающее высоту различимого объекта и угол тангажа — 2 балла.
2. Верно написана формула для требуемого угла тангажа — 2 балла.
3. Правильный численный ответ -1 балл.

1.4. (5 баллов) Спутник имеет возможность снимать видеосюжеты, подворачиваясь за объектом, как показано на рисунке. Поворот происходит в вертикальной плоскости, параллельной вектору скорости спутника (см. рисунок). Одной из задач, решаемых космической видеосъемкой, является наблюдение лесных пожаров. Характерная скорость распространения огненного фронта при ветре 5...7 м/с составляет 5 м/с. Оценить, каким должен быть угол отклонения спутника от вертикали, чтобы видеосюжет позволял анализировать сгорание лесного квартала размером $500 \cdot 500$ м ? Огненный фронт принять очень длинной прямой линией. В данной задаче Землю можно считать плоской.



Видеосюжет снимается, когда спутник пролетает дугу орбиты AB, что соответствует дуге $A_{\text{зем}}B_{\text{зем}}$ на поверхности Земли. При этом оптическая ось камеры все время пересекается с поверхностью Земли в одной точке, где находится снимаемый объект. Для этого спутник вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка.

Решение

Определим потребную длительность видеосюжета. Она составит время прохождения фронта через квартал

$$T = \frac{500}{5} = 100 \text{ с}$$

Значит, за время спутник должен пролететь по орбите расстояние x, причем:

$$\Theta = arctg(\frac{x}{2 \cdot H}) = arctg(\frac{V_{\text{орб}} \cdot T}{2 \cdot H}) = arctg(\frac{7613,3 \cdot 100}{2 \cdot 500 \cdot 10^3}) = 37,2 \text{ градусов}$$

Ответ: 37,2 градусов.

Система оценки

1. Правильно написана формула для требуемой длительности видеосюжета — 1 балл.
2. Правильно составлено уравнение, связывающее угол тангажа и пройденный путь по орбите — 2 балла.
3. Верный численный ответ — 2 балла.

Задача III.1.3.2. Космическая радиосвязь и электротехника (35 баллов)

1.1. (12 баллов) Передатчик, размещенный на спутнике, излучает радиоволны с частотой 145 МГц. Насколько будет отличаться частота сигнала, принимаемая наземной антенной станцией в начале сеанса связи (когда спутник виден под углом 10 градусов к горизонту) ? Радиус Земли 6370 км, высота орбиты 500 км. Трасса полета спутника проходит точно над наземной антенной станцией.

Справка: при движении источника волн воспринимаемая приемником частота волн отличается от излучаемой источником. В повседневной жизни эффект можно наблюдать для звуковых волн на железной дороге. Когда поезд едет НА наблюдателя, то воспринимаемый тон сигнала кажется выше, чем тон сигнала неподвижного или, тем более, удаляющегося поезда. Для электромагнитных волн вообще и света в частности эффект также имеет место, однако вследствие высочайшей скорости их распространения незаметен глазом. Общее уравнение эффекта Доплера для электромагнитных волн в вакууме при подвижном источнике и неподвижном приемнике записывается как:

$$v_{\text{приемник}} = v_{\text{источник}} \cdot \frac{\sqrt{1 - (\frac{V_{\text{источник}}}{c})^2}}{1 - \frac{V_{\text{источник}}}{c} \cdot cos\beta}$$

Где:

$c = 3 \cdot 108$ м/с — скорость света в вакууме;

$V_{\text{источник}}$ — скорость источника;

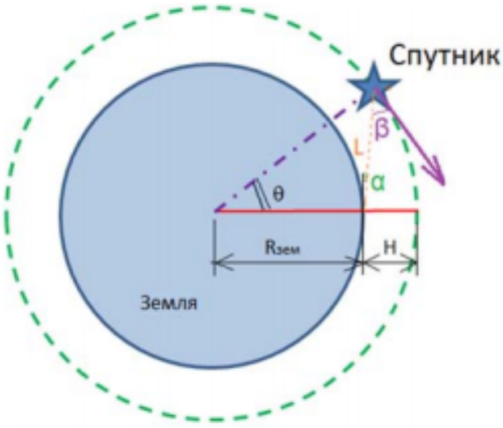
$v_{\text{источник}}$ —излучаемая частота электромагнитных волн;

$v_{\text{приемник}}$ —воспринимаемая приемником частота электромагнитных волн;

β — угол между вектором скорости источника и направлением «источник-приемник». Если источник удаляется от приемника, то $\beta > 90°$

Решение

Для вычисления принимаемой частоты нужно найти угол β между вектором скорости спутника и направлением «Спутник — наземная антенна».



Из теоремы синусов:

$$\frac{R_{\text{зем}}}{sin(\frac{\pi}{2}-\beta)} = \frac{H+R_{\text{зем}}}{sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

Тогда:

$$sin(\frac{\pi}{2}-\beta) = cos(\beta) = \frac{R_{\text{зем}}}{H+R_{\text{зем}}} \cdot sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{R_{\text{зем}}}{H+R_{\text{зем}}} \cdot cos(\alpha)$$

В нашем случае частоту, принимаемую наземной станцией, можно с учетом эффекта Доплера описать как:

$$v_{\text{зем}} = v_{\text{спутника}} \cdot \frac{\sqrt{1-(\frac{V_{\text{круг}}}{c})^2}}{1-\frac{V_{\text{круг}}}{c} \cdot cos(\beta)} \approx \frac{v_{\text{спутника}}}{1-\frac{V_{\text{круг}}}{c} \cdot cos(\beta)} = \frac{v_{\text{спутника}}}{1-\frac{V_{\text{круг}}}{c} \cdot \frac{R_{\text{зем}}}{H+R_{\text{зем}}} \cdot cos(\beta)} =$$

$$= \frac{145}{1-\frac{7613{,}28}{3 \cdot 10^8} \cdot \frac{6370}{6870} \cdot cos(10^0)} = \frac{145}{1-2{,}31 \cdot 10^{-5}} = 145{,}0034 \text{ МГц}$$

Тогда разность частот:

$$v_{\text{зем}} - v_{\text{спутника}} = v_{\text{спутника}} \cdot (\frac{1}{1-\frac{V_{\text{круг}}}{c} \cdot cos(\beta)} - 1) =$$

$$= v_{\text{спутника}} \cdot (\frac{1}{1-\frac{V_{\text{круг}}}{c} \cdot \frac{R_{\text{зем}}}{H+R_{\text{зем}}} \cdot cos(\beta)} - 1) =$$

$$= 145 \cdot 10^6 \cdot (\frac{1}{1-\frac{7613{,}3}{3 \cdot 10^8} \cdot \frac{6370}{6870} \cdot cos(10^0)} - 1) = 3360 \text{ Гц}$$

Ответ: 3360 Гц.

Система оценки

1. Верно составлено уравнение для угла между вектором скорости спутника и направлением на наземную антенну — 3 балла.
2. Верно написана формула, связывающая частоты источника, приемника, скорость спутника и угол наведения антенны — 4 балла.
3. Верно написана формула для разности частот — 3 балла.

4. Верный численный ответ — 2 балла.

1.2. (12 баллов) Средняя мощность шумовых сигналов, принимаемых наземной станцией, составляет $_{\text{шум}} = 1$ Вт для рабочего диапазона частот приемника. Какую мощность сигнала должен иметь передатчик, установленный на спутнике, чтобы обеспечить уверенный прием данных на наземной станции в течение всего сеанса связи. Длительность сеанса связи ограничена временем наблюдения спутника под углом более 10 градусов к горизонту. Трасса полета проходит точно над антенной станцией. Уверенный прием и обработка радиосигнала обеспечивается при соотношении сигнал/шум $\phi >= 30$ дБ. Принять, что атмосфера является плоским слоем толщиной $a = 30$ км с однородным поглощением. При прохождении атмосферной толщи 30 км поглощается $k = 0,2$ энергии радиоволн. Высота орбиты 500 км. В данной задаче Землю можно принять плоской, расходимостью радиоволн пренебречь (антенна узконаправленная). Солнечная постоянная $L = 1400\,\text{Вт}/\text{м}^2$.

Справка: в радиотехнике соотношение сигнал/шум (SNR) принято измерять в децибеллах. При мощностях сигнала $P_{\text{сигнал}}$ и шума $_{\text{шум}}$:

$$SNR = 10 \cdot (\frac{P_{\text{сигнал}}}{P_{\text{шум}}})[\text{дБ}]$$

Решение

Переведем заданное соотношение сигнал шум [децибеллы] в соотношение мощностей Ψ:

$$\Psi = \frac{P_{\text{сигнал}}}{P_{\text{шум}}} = 10^{\frac{\varphi}{10}} = 10^{\frac{30}{10}} = 1000$$

Найдем отношение наклонной дальности атмосферного хода луча к толщине атмосферы:

$$\frac{L_{\text{атм}}}{a} = \frac{1}{cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{1}{sin(\alpha)} = \frac{1}{sin(10^\circ)} = 5,76$$

Пусть наклонная дальность вдвое больше толщины атмосферы. Тогда $\frac{L_{\text{атм}}}{a} = 2$ и через наклонную толщу атмосферы пройдет $0,8^2 = 0,64$ энергии первоначального излучения: дальность хода возросла вдвое, следовательно, на каждом из двух отрезков длиной a поглощается 20% излучения, вошедшего в начальную точку отрезка. Через первый отрезок атмосферы длиной a прошло $(1 - k) = 0,8 = 80\%$ излучения. Тогда на входе во вторую половину наклонной трассы (также имеет длину a) попало 80% первоначальной энергии. Через второй отрезок a прошло также 80% вошедшего в него излучения. Но вошло во вторую половину не 100% исходного потока, а только 80% (20% поглощено еще на первой половине пути). Тогда на выходе из наклонной трассы имеем $0,8 \cdot 0,8 = 0,8^2 = 0,64$ исходной мощности.

Аналогично $0,8^3$ для $\frac{L_{\text{атм}}}{a} = 3$: разбиваем наклонную дальность на три отрезка длиной a, на каждом из которых проходит 80% вошедшего в отрезок излучения. Тогда в наклонном случае доля энергии, прошедшей через атмосферу:

$$\tau = (1 - k)^{\frac{L_{\text{атм}}}{a}} = (1 - 0,2)^{5,76} = 0,2766$$

Тогда условие уверенного приема сигнала наземной станцией можно сформулировать как:

$$\frac{P_{\text{спутник}} \cdot \tau}{P_{\text{шум}}} \geqslant \Psi$$

Перепишем его:

$$\frac{P_{\text{спутник}}}{P_{\text{шум}}} \cdot (1-k)^{\frac{L_{\text{атм}}}{a}} \geqslant \Psi$$

Тогда для минимально необходимой мощности сигнала передатчика имеем:

$$P_{\text{спутник}} = \frac{P_{\text{шум}} \cdot \Psi}{(1-k)^{\frac{L_{\text{атм}}}{a}}} = \frac{1 \cdot 1000}{0,2766} = 3,6 \text{ кВт}$$

Ответ: 3,6 кВт.

Система оценки

1. Правильно составлено уравнение для перехода от децибеллов к мощностям сигналов — 2 балла.
2. Правильно написана формула для наклонной дальности хода луча — 2 балла.
3. Показано, что через атмосферу пройдет доля энергии $\tau = (1-k)^{\frac{L_{\text{атм}}}{a}} = (1-0,2)^{\frac{L_{\text{атм}}}{a}}$ — 3 балла.
4. Верно составлено уравнение, связывающее мощности сигналов, ослабление атмосферой и требуемое соотношение сигнал/шум- 2 балла.
5. Верная формула для требуемой мощности сигнала спутника — 2 балла.
6. Верный численный ответ — 1 балл.

1.3. (11 баллов) Межпланетные исследовательские станции, направляемые в дальнюю часть Солнечной системы, оснащают радиоизотопными источниками энергии (РИТЭГ). Брусок, сделанный из изотопа с достаточно малым периодом полураспада, нагревается за счет собственного радиоактивного распада. Получаемое тепло преобразуется в электроэнергию термопарой. Естественно, КПД такой системы очень мал, но солнечные батареи крайне неэффективны в дальней части Солнечной системы вследствие их малой освещенности.

Скорость радиоактивного распада вещества описывается периодом полураспада. За это время распадется половина атомов исходного образца вещества. Тогда зависимость количества нераспавшихся атомов от времени при периоде полураспада τ имеет вид:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{-t}{\tau}}$$

В частности, изотоп плутоний-238 испытывает альфа-распад, при котором образуется уран-234 и ядро атома гелия (альфа-частица). За время $\tau = 88$ лет от исходного количества атомов N_0 останется только половина.

Автоматическая межпланетная станция оснащена комплексом приборов со средней потребляемой мощностью = 200 Вт. Какую массу должен иметь образец из чистого плутония-238, установленный в РИТЭГ, чтобы обеспечить полноценное функционирование станции в течение $T = 10$ лет. КПД термопреобразователя $\eta = 4\%$, период полураспада изотопа составляет $\tau = 88$ лет. Плутоний-238 претерпевает альфа-распад и превращается в уран-234. Один грамм чистого плутония-238 создает тепловую мощность $q = 0,54$ Вт/грамм.

Решение

Требуемая тепловая мощность РИТЭГ падает со временем вследствие уменьшения количества распадающихся ядер. В момент окончания работы станции связана с мощностью приборов как:

$$W_{\text{конец}} = \frac{P}{\eta}$$

Тогда начальные и конечные тепловые мощности РИТЭГ пропорциональны скоростям распада ядер в соответствующие моменты и соотносятся как:

$$\frac{W_{\text{конец}}}{W_0} = 2^{-\frac{T}{\tau}}$$

Значит, для начальной мощности:

$$W_0 = \frac{W_{\text{конец}}}{2^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{P}{\eta} \cdot 2^{-\frac{T}{\tau}}$$

Тогда для начальной массы

$$m_0 \cdot q = \frac{P}{\eta} \cdot 2^{-\frac{T}{\tau}}$$

Окончательно, получаем требуемую массу образца:

$$m_0 = \frac{P}{\eta \cdot q} \cdot 2^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{200}{0,54 \cdot 1000 \cdot 0,04} \cdot 2^{\frac{10}{88}} = 10 \text{ кг}$$

Ответ: 10 кг.

Система оценки

1. Верно написано уравнение, связывающее начальную, конечную тепловые мощности
2. РИТЭГ, период полураспада изотопа и требуемый срок работы приборов — 4 балла.
3. Верно написана формула для массы образца — 4 балла.
4. Верный численный ответ — 3 балла.

Задача III.1.3.3. Орбитальная динамика (40 баллов)

1.1. (12 баллов) Для некоторых спутников связи лучше подходит не круговая, а высокоэллиптическая орбита. Она является не круговой, а нарочито вытянутой. Центр Земли, соответственно, находится в одном из фокусов этого эллипса. Высокоэллиптическая орбита хорошо подходит для внутригосударственной связи и телевещания. Таким образом, спутник быстро пролетает по «низкой» части орбиты и долго находится над страной-пользователем системы связи, двигаясь по «высокой» части орбиты. Естественно, длительное нахождение над обслуживаемой страной получается ценой очень большого расстояния от Земли до апогея орбиты, и, соответственно, необходимостью обеспечить высокую мощность передатчика. Для наземного наблюдателя спутник при прохождении апогея кажется двигающимся в небе с очень маленькой скоростью, что удобно для наземных приемных станций: на протяжении

нескольких часов пролета по «высокой» части орбиты не требуется значительный поворот антенн, осуществляющих обмен информацией со спутником. Часто параметры орбиты подбираются так, чтобы период обращения спутника составлял ровно 24 часа. Тогда апогей орбиты всегда находится над одной и той же точкой Земли.

Спутник связи летает по высокоэллиптической орбите, имеющей высоту перигея $h = 500$ км, находящейся в экваториальной плоскости и периодом обращения ровно 24 часа. Спутник обеспечивает передачу данных между устройствами на Земле. На какой угол от вертикали должны отклоняться наземные антенны связи, если связь со спутником должна осуществляться все время между прохождением половины пути от перигея к апогею и половины пути от апогея к перигею. Орбита спутника построена так, что в момент прохождения апогея наземная станция находится точно под ним на экваторе. Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли 6370 км, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2 / кг^2 . Радиус круговой орбиты, имеющей период обращения 24 часа, составляет $R_{\text{гсо}} = 42168$ км (геостационарная орбита).

Справка о законах Кеплера:

Математик Кеплер установил, что если тело движется по эллиптической орбите, то центр Земли находится в одном из фокусов этого эллипса (первый закон Кеплера). Частным случаем эллипса является окружность, в этом случае оба фокуса эллипса находятся в одной и той же точке. Также для тела, движущегося по эллиптической орбите, справедливо равенство (второй закон Кеплера):

$$V(t_1) \cdot r(t_1) \cdot sinsin\Theta_1 = V(t_2) \cdot r(t_2) \cdot sinsin\Theta_2$$

Где t_1 и t_2 — произвольные моменты времени,

Θ — угол между вектором скорости тела и направлением на центр Земли,

r — расстояние от тела до центра Земли,

V — орбитальная скорость тела.

частности, для точек апогея и перигея вектор скорости перпендикулярен направлению на Землю, тогда $\Theta = 90°$:

$$V_{\text{апогей}} \cdot r_{\text{апогей}} = V_{\text{перигей}} \cdot r_{\text{перигей}}$$

Таким образом, для данной орбиты радиус-вектор спутника всегда заметает одну и ту же площадь в единицу времени

Третий закон Кеплера позволяет связать периоды обращения $_1$ и $_2$ по любым двум околоземным эллиптическим орбитам с бОльшими полуосями эллипсов орбит $_1$ и $_2$. В частном случае окружности полуосью эллипса является ее радиус.

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{a_2}{a_1})^{\frac{3}{2}}$$

Эллипс с большим диаметром $2 \cdot a$ и малым диаметром $2 \cdot b$ описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

При этом начало координат находится в центре эллипса. Обычно $a > b$, то есть большой диаметр эллипса расположен вдоль оси X. Тогда фокусы эллипса находятся на оси и имеют координаты $(e \cdot a; 0)$ и $(-e \cdot a; 0)$, где e — эксцентриситет эллипса,

$0 \leqslant e < 1$. Эксцентриситет описывает «вытянутость» эллипса. У окружности $e = 0$, так как большой и малый диаметры совпадают. С вытягиванием эллипса е стремится к 1.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Решение

Найдем сначала размеры орбиты. По третьему закону Кеплера, радиусы геостационарной орбиты и большая полуось эллиптической орбиты одинаковы:

$$R_{\text{ГСО}} = a$$

Тогда для высоты спутника в апогее H и перигее h:

$$2 \cdot R_{\text{ГСО}} = H + h + 2 \cdot R_{\text{зем}} = r_{\text{ап}} + r_{\text{пер}}$$

Отсюда находим высоту H спутника в апогее:

$$H = 2 \cdot R_{\text{ГСО}} - 2 \cdot R_{\text{зем}} - h = 2 \cdot 42168 - 2 \cdot 6370 - 500 = 71096 \text{ км}$$

Эллипс орбиты является сильно вытянутым, его эксцентриситет почти равен 1:

$$e = \frac{R_{\text{ГСО}} - r_{\text{пер}}}{R_{\text{ГСО}}} = \frac{42168 - (500 + 6370)}{42168} = 0,837$$

Тогда определим расстояние от центра Земли до спутника в нужный нам момент прохождения половины пути $r_{0,5}$:

$$r_{0,5} = \sqrt{b^2 - (R_{\text{ГСО}} - r_{\text{пер}})^2} = \sqrt{R_{\text{ГСО}}^2 \cdot (1 - e^1) + (R_{\text{ГСО}} - r_{\text{пер}})^2} =$$

$$= \sqrt{41268^2 \cdot (1 - 0,837^2) + (42168 - 6370 - 500)^2} = 42170,8 \text{ км}$$

Определим угол $\Theta_{0,5}$ между скоростью $V_{0,5}$ в момент прохождения половины пути и направлением на центр Земли $r_{0,5}$:

$$cos\Theta_{0,5} = \frac{R_{\text{ГСО}} - r_{\text{пер}}}{r_{0,5}} = \frac{42168 - 6370 - 500}{42170,8} = 0,837$$

Отсюда находим искомый угол:

$$\Theta_{0,5} = arccos(0,837) = 33 \text{ градуса}$$

Ответ: 33 градуса.

Система оценки

1. Показано, что большая полуось эллиптической орбиты равна радиусу геостационарной орбиты — 1 балл.
2. Верно написана формула для высоты спутника в апогее — 2 балла.

3. Верно написана формула для расстояния до спутника в момент прохождения половины пути — 4 балла.
4. Верно написана формула для угла $\Theta_{0,5}$ или его косинуса — 3 балла.
5. Правильный численный ответ — 2 балла.

1.2. (12 баллов) Геостационарный спутник представляет собой зеркальный куб размером $b \cdot b \cdot b = 2 \cdot 2 \cdot 2$ метра с солнечными батареями площадью 20 м^2. Оценить, какое приращение скорости получит спутник 22 марта за период с 16:00 по 20:00 по солнечному времени своей точки стояния. Принять, что солнечные батареи всегда ориентированы на Солнце.

Решение

Один фотон при отражении совершает упругий удар и меняет свой импульс на противоположный по знаку. Импульс одиночного фотона, соответствующего свету с длиной волны λ, составляет $P_{\text{фотон}} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{c} = \frac{h}{\lambda}$.

Тогда при отражении изменение импульса составит $2 \cdot \frac{h}{\lambda}$

При плотности потока света Φ [Вт/м^2] имеем, что на единицу площади в единицу времени приходится поток фотонов n [штук/с]:

$$n = \frac{\Phi}{\frac{hc}{\lambda}}$$

Тогда сила, действующая на спутник вследствие давления света, не зависит от его длины волны и составит:

$$F_{\text{свет}} = \Delta P_{\text{фотон}} \cdot n = 2 \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\Phi}{\frac{hc}{\lambda}} = 2 \cdot \frac{\Phi}{c} \cdot S \cdot cos\Theta$$

Заданный времненной интервал (закат ± 2 часа) позволяет сделать вывод, что Солнце освещает грань спутника почти по нормали. За 4 часа спутник пройдет по орбите дугу длиной 60 градусов, так как скорость вращения Земли составляет 15 градусов/час. Тогда угол Θ не превысит 30 градусов. За время прохождения дуги косинус угла почти не изменится, примем его за 1. Пренебрежем изменением высоты спутника, тогда вся работа силы давления света пойдет на увеличение кинетической энергии спутника:

$$\frac{m \cdot (V_{\text{орб}} + \Delta V)^2}{2} - \frac{m \cdot V_{\text{орб}}^2}{2} = 2 \cdot \frac{\Phi}{c} \cdot S_{\text{общ}} \cdot L$$

Так как прибавка скорости очень мала, то:

$$\frac{m \cdot 2 \cdot V_{\text{орб}} \cdot \Delta V}{2} = 2 \cdot \frac{\Phi}{c} \cdot S_{\text{общ}} \cdot L$$

В свою очередь, длина дуги орбиты составляет:

$$L = R_{\text{ГСО}} \cdot \frac{60}{\frac{180}{\pi}} = R_{\text{ГСО}} \cdot \frac{\pi}{3}$$

Тогда:

$$\Delta V = \frac{\Phi \cdot S_{\text{общ}} \cdot L}{c \cdot m \cdot V_{\text{орб}}} = \frac{\Phi \cdot S_{\text{общ}} \cdot R_{\text{ГСО}} \cdot \frac{\pi}{3}}{c \cdot m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{\text{ГСО}}}{T_{\text{ГСО}}}} =$$

$$= \frac{\Phi \cdot (b^2 + S_{\text{батарей}}) \cdot T_{\text{ГСО}}}{2 \cdot c \cdot m} = \frac{2 \cdot 1400 \cdot 24 \cdot 86400}{3 \cdot 10^8 \cdot 1000} = 0,02 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,02 м/с.

Система оценки

1. Правильно записана формула для импульса фотона — 1 балл.
2. Показано, что при отражении изменение импульса фотона равно его двойному импульсу — 1 балл.
3. Верно написана формула для силы, действующей на спутник — 2 балла.
4. Показано, что косинусом угла Θ можно пренебречь — 3 балла.
5. Верно записано уравнение на закон сохранения энергии с учетом работы силы
6. давления света — 2 балла.
7. Верно записана формула для искомого приращения скорости — 2 балла.
8. Правильный численный ответ — 1 балл.

1.3. (16 баллов) Орбитальная станция массой 22 тонны вращается вокруг Земли на высоте орбиты $h = 500$ км. Наземные станции слежения за космическим пространством обнаружили фрагмент космического мусора размером 10 см, представляющий опасность для орбитальной станции. Обнаружение произошло заблаговременно. Оценить, сколько топлива нужно потратить станции, чтобы уклониться от опасности. Уклонением считается переход на эллиптическую орбиту без требования к возврату на исходную круговую. Безопасной принять орбиту, при которой минимальное расстояние между осколком и станцией составит не менее $a = 100$ метров. Двигатель станции позволяет ей получать разгонный импульс, его сопло направлено строго назад. Удельный импульс двигателя составляет 2500 м/с, изменением массы станции вследствие расхода топлива пренебречь.

Справка: Удельный импульс двигателей спутника $P_{\text{уд}}$ описывает импульс, который они способны дать спутнику при сгорании 1 кг топлива.

Решение

Минимальные затраты топлива будут, если расхождение с мусором произойдет в апогее новой эллиптической орбиты. Тогда высота апогея:

$$H_{\text{апогей}} = h + a$$

Пусть разгон произошел мгновенно. Точка разгона стала перицентром новой орбиты. Тогда для апоцентра и перицентра:

$$(V_{\text{круг}} + \Delta V) \cdot (R_{\text{зем}} + h) = V_{\text{апогей}} \cdot (R_{\text{зем}} + h + a)$$

В то же время выполняется и закон сохранения энергии для движения по новой, эллиптической орбите (с учетом сокращения на массу спутника):

$$\frac{(V_{\text{круг}} + \Delta V)^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + h} = \frac{V_{\text{апогей}}^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}} + h + a}$$

Получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными: V – апогей и ΔV

$$\begin{cases} (V_{\text{круг}} + \Delta V) \cdot (R_{\text{зем}} + h) = V_{\text{апогей}} \cdot (R_{\text{зем}} + h + a) \\ \frac{(V_{\text{круг}}+\Delta V)^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+h} = \frac{V_{\text{апогей}}^2}{2} - \frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{R_{\text{зем}}+h+a} \end{cases}$$

Учтем, что $a << h$ и $V_{\text{круг}} >> \Delta V$, перепишем систему в упрощенном виде с учетом того, что $g(R_{\text{зем}} + h) = \frac{G \cdot M_{\text{зем}}}{(R_{\text{зем}}+h)^2}$

$$\begin{cases} (V_{\text{круг}}\Delta V) \cdot (R_{\text{зем}} + h) = V_{\text{апогей}} \cdot (R_{\text{зем}} + h + a) \\ \frac{(V_{\text{круг}})^2+2 \cdot \Delta V \cdot V_{\text{круг}}}{2} + g(R_{\text{зем}} + h) \cdot (R_{\text{зем}} + h) = \frac{V_{\text{апогей}}^2}{2} + g(R_{\text{зем}} + h) \cdot (R_{\text{зем}} + h + a) \end{cases}$$

Нужно найти приращение скорости ΔV. Для этого исключим вторую переменную $V_{\text{апогей}}$:

$$V_{\text{апогей}} \approx V_{\text{круг}} \cdot \frac{R_{\text{зем}} + h}{R_{\text{зем}} + h + a} = V_{\text{круг}} \cdot (1 - \frac{a}{R_{\text{зем}} + h + a}) \approx V_{\text{круг}} \cdot (1 - \frac{a}{R_{\text{зем}} + h})$$

Тогда:

$$V_{\text{круг}} \cdot (\frac{1}{2} \cdot V_{\text{круг}} + \Delta V) = \frac{1}{2}(V_{\text{круг}} \cdot (1 - \frac{a}{R_{\text{зем}} + h}))^2 + g(R_{\text{зем}} + h) \cdot a$$

Окончательно:

$$\Delta V = \frac{\frac{1}{2}(V_{\text{круг}} \cdot (1 - \frac{a}{R_{\text{зем}}+h}))^2 + g(R_{\text{зем}} + h) \cdot a}{V_{\text{круг}}} - \frac{V_{\text{круг}}}{2} =$$

$$= \frac{V_{\text{круг}} \cdot (1 - \frac{a}{R_{\text{зем}}+h})^2}{2} + \frac{g(R_{\text{зем}} + h) \cdot a}{V_{\text{круг}}} - \frac{V_{\text{круг}}}{2} \approx$$

$$\approx V_{\text{круг}} \cdot \frac{a}{R_{\text{зем}} + h} + \frac{g(R_{\text{зем}} + h) \cdot a}{V_{\text{круг}}} = 7613,3 \cdot \frac{0,1}{6870} + \frac{9,81 \cdot (\frac{6370}{6870})^2 \cdot 0,1}{7613,3} = 0,11 \text{ м/с}$$

Тогда общее приращение импульса орбитальной станции в пренебрежении изменением его массы при расходе топлива составит:

$$\Delta P = m \cdot \Delta V$$

Расход топлива, необходимого для уклонения, с учетом удельного импульса $P_{\text{уд}}$

$$m_T = \frac{\Delta P}{P_{\text{уд}}} = \frac{m \cdot \Delta V}{P_{\text{уд}}} = \frac{22000 \cdot 0,11}{2500} = 0,97 \text{ кг} = 1 \text{ кг}$$

Ответ: 1 кг.

Система оценки

1. Показано, что минимальные затраты топлива будут, если расхождение с объектом произойдет в апогее новой орбиты — 2 балла.
2. Правильно составлена система из двух уравнений на приращение скорости и скорость в апогее — 6 баллов.

3. Правильно составлена формула на приращение скорости — 4 балла.
4. Верно получена формула на искомые затраты топлива — 2 балла.
5. Правильный численный ответ — 2 балла.