ПРОФИЛЬ «ЯДЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

В рамках профиля «Ядерные технологии» участникам предлагается решение задач, связанных с атомной физикой и ядерными технологиями, а также работа с макетом атомной установки, релевантно отображающей принципы превращениями энергии на АЭС.

В рамках первого отборочного этапа участники будут решать задачи по математике и физике, имеющие отношение к ядерным технологиям и процессам преобразования энергии в ядерных энергетических установках. Испытание по каждому предмету занимает двое суток.

На втором отборочном этапе предполагается решить ряд задач повышенной сложности, а также пройти обширный курс подготовки, разработанный авторами задач профиля.

§1 Первый отборочный этап

Первый отборочный этап проводится индивидуально в сети Интернет, работы оценивались автоматически средствами системы онлайн-тестирования. Для каждой параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагались свои наборы задач по физике и математике с инженерным уклоном. Участники получали оценку за решение задач в двух любых вариантах заданий — суммарно от 0 до 20 баллов.

1.1 Первая попытка Физика/Математика 10-11 класс

Задача 1.1.1 (1 балл)

Условие:

Имеется сосуд объемом л с жесткими стенками, и пластиковая бутылка объемом л, соединенные жесткой трубкой (см. рисунок). В сосуде и бутылке находится неизменное количество горячего газа. Газ в сосудах медленно охлаждают и измеряют его давление. Результаты эксперимента оказались следующими. До температуры, равной С, давление в сосуде и бутылке убывало, а начиная с этой температуры перестало изменяться. Температуру газа продолжили уменьшать, и, начиная с некоторой температуры, давление газа в сосуде и бутылке снова стало убывать. Найти эту температуру. Считать, что абсолютный нуль температуры - С. Искомую температуру в градусах Цельсия округлить до трех значащих цифр и записать в предложенное поле.

Решение:

Для объяснения этого опыта нужно предположить, что первоначальное давление в сосудах превосходило атмосферное. Тогда при охлаждении воздуха с ним происходит изохорический процесс – объем бутылки и сосуда не меняется, а с уменьшением температуры уменьшается давление воздуха в сосудах. Когда давление перестало меняться при уменьшении температуры, стал меняться объем сосудов. Это значит, что начиная с температуры С должен уменьшаться объем. Это возможно, если допустить, что давление газа в сосудах достигло атмосферного, и бутылка начинает сминаться под действием атмосферного давления. Давление снова начнет уменьшаться, когда не сможет уменьшаться объем. Это значит, что при той температуре, которую нужно найти бутылка полностью смялась, т.е. суммарный объем сосудов стал равен 5 л. Напишем формулы, отвечающие этой схеме охлаждения.

От температуры до неизвестной температуры с газом происходит изобарический процесс (при атмосферном давлении). Поэтому

$$\frac{V_1 + V_2}{T_0} = \frac{V_1}{T_1}$$

где $T_0 = 273 + 50$ К и T_1 – абсолютные температуры, отвечающие началу и концу изобарического процесса. Отсюда находим

$$T_1 = \frac{V_1}{V_1 + V_2} T_0 = 302,4$$ К

или

$$t_1 = 29,4°$$ С.

Ответ:
29,4.

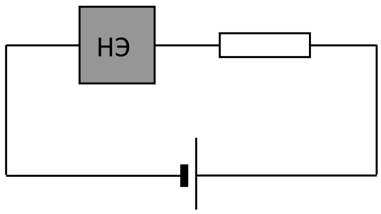
Задача 1.1.2 (2 балла)

Условие:

Имеется источник электрического напряжения с ЭДС В и внутренним сопротивлением Ом, нелинейный элемент с вольтамперной характеристикой (В/А2 - постоянная) и резистор с сопротивлением Ом. Нелинейный элемент и резистор соединяют последовательно и подключают к источнику. Найти ток через источник. Ток в амперах округлить до трех значащих цифр и записать в предложенное поле.

Решение:

Пусть ток в цепи, схема которой показана на рисунке, равен I. Тогда напряжение на источнике будет равно $U = \varepsilon - Ir$. С другой стороны, на нелинейном элементе и резисторе будет напряжение $\alpha I^2 + IR$. Приравнивая эти напряжения, получаем квадратное уравнение



$$\alpha I^2 + I\left(R + r\right) - \varepsilon = 0$$

Отсюда

$$I = \frac{\sqrt{\left(R + r\right)^2 + 4\alpha\varepsilon} - \left(R + r\right)}{2\alpha} = 0,591$$ А

(второй корень является отрицательным).

Ответ:
0,591

Задача 1.1.3 (2 балла)

Условие:

Для любых положительных чисел x и y определим два числа: $a = y + \frac{1}{x}$ и $b = \frac{1}{y}$. Пусть число c равно минимальному из чисел $x,\ a,\ b$. Какое наибольшее значение может принимать число c^2? Ответ ввести в предложенное поле.

Решение:

По условию $c \le x,\ c \le y + \frac{1}{x},\ c \le \frac{1}{y}$. Тогда $y \le \frac{1}{c}$ и $\frac{1}{x} \le \frac{1}{c} \to c \le a = y + \frac{1}{x} \le \frac{2}{c} \Rightarrow c^2 \le 2$. Равенство достигается при $a = b = x \to x = \sqrt{2},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому максимальное значение $c^2 = 2$ достижимо.

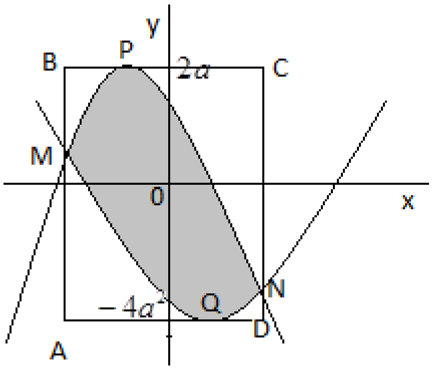
Ответ:
2

Задача 1.1.4 (2 балла)
Условие:

Прямоугольник ABCD на координатной плоскости $(x; y)$ имеет стороны, параллельные осям координат, и содержит все точки, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенствам $x^2 + 2x + y + 1 - 2a \le 0$ и $x^2 - 2x - y + 1 - 4a^2 \le 0$ (где a - параметр). Найти наименьшую площадь прямоугольника ABCD при $2 \le a \le 3$. Наименьшую площадь прямоугольника ABCD вписать в поле ответа

Решение:

На рисунке показано множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенствам
$y \le -(x+1)^2 + 2a$ и $y \ge (x-1)^2 - 4a^2$
для некоторого положительного a (нам надо будет рассматривать значения параметра a в интервале $2 \le a \le 3$, т.е. заведомо положительные). Минимальная высота прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осями, и содержащего вершины обеих парабол, равна $2a + 4a^2$.



Чтобы найти размер основания этого прямоугольника, найдем абсциссы точек M и N пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = -(x+1)^2 + 2a \\ y = (x-1)^2 - 4a^2 \end{cases}$$

Отсюда

$$x^2 = 2a^2 + a - 1$$

причем для $a \in [2;3]$ выражение в правой части положительно. Поэтому минимальное основание прямоугольника, содержащего все точки, удовлетворяющие неравенствам, данным в условии, равно

$$AD = 2\sqrt{2a^2 + a - 1}$$

Отсюда находим площадь прямоугольника

$$S(a) = 2\sqrt{2a^2 + a - 1} \cdot \left(2a + 4a^2\right) = 4a(2a+1) \cdot \sqrt{2a^2 + a - 1}.$$

Все сомножители, входящие в $S(a)$, возрастают на отрезке $[2;3]$, поэтому минимальное значение его площади достигается при $a = 2$:

$$S(2) = 120.$$

Ответ:
120

Задача 1.1.5 (2 балла)

Условие:

Для диагностики определенных заболеваний используется короткоживущий изотоп йода с атомной массой 123 а.е.м - $^{123}\mathrm{I}$. Для его получения используют ядерную реакцию $^{122}\mathrm{Te} + d \to n + {}^{123}\mathrm{I}$. Мишень из теллура (пластина толщиной $d = 6$ мм) облучается с одной стороны потоком дейтронов – частиц, состоящих из нейтрона и протона – с плотностью $j = 10^{14}$ частиц/(м с)$^{2}\cdot$ и с энергией $\varepsilon = 4 \cdot 10^8$ эВ (электрон-вольт – единица энергии, используемая в ядерной физике). Облучение происходит с одной стороны пластины. С другой ее стороны происходит охлаждение пластины. Для соблюдения технологии производства препарата недопустимо повышение его температуры выше $t_0 = 30°$ С. Определите, какое максимальное значение температуры должно поддерживаться на обратной стороне пластины. Считать, что вся энергия дейтронов идет на нагрев образца. Теплопроводность теллура $\lambda = 14$ Вт/(м К), 1 эВ= $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Ответ в градусах Цельсия округлить до трех значащих цифр и ввести в предложенное поле.

Указание. Количество энергии q, переносимое в единицу времени между двумя слоями с температурой t_0 и t_1, находящимися на расстоянии d друг от друга, определяется законом Био-Фурье

$$q = \lambda \frac{S\left(t_0 - t_1\right)}{d}$$

где S - площадь поперечного сечения слоев, λ - теплопроводность материала. Плотность потока частиц – количество частиц, переносимое через единицу площади в единицу времени.

Решение:

На площадку площади S в единицу времени попадает энергия пучка дейтронов

$$q = j\varepsilon S$$

В стационарном режиме (когда препарат не греется) вся эта энергия уходит со второй стороны пластины при ее охлаждении. Поэтому

$$j\varepsilon S = \lambda \frac{S\left(t_0 - t_1\right)}{d}$$

Отсюда находим

$$t_1 = t_0 - \frac{j\varepsilon d}{\lambda} = 27{,}3^\circ \text{ C}$$

Ответ:
27,3

Задача 1.1.6 (1 балл)

Условие:

В цилиндрический сосуд с соленой водой опускают льдинку из пресной воды объемом $V = 20$ см^3. Насколько понизится или повысится уровень воды в сосуде при таянии льдинки? Площадь сечения сосуда $S = 100$ см^2, плотность соленой воды $\rho = 1100$ кг/м^3, плотность льда $\rho_0 = 900$ кг/м^3, плотность пресной воды $\rho_1 = 1000$ кг/м^3. Считать, что при растворении соли в воде объем воды не меняется. Ответ в миллиметрах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Условие равновесия льдинки дает

$$m = \rho V_{п.ч.} \qquad \Rightarrow \qquad V_{п.ч.} = \frac{m}{\rho} \qquad (*)$$

где $m = \rho_0 V$ - масса льдинки, $V_{п.ч.}$ - объем части льдинки, погруженной в соленую воду. При таянии льдинки образуется вода (естественно, пресная) объемом

$$V = \frac{m}{\rho_1} \qquad (**)$$

Очевидно, что если объем воды, получившейся при таянии льда, больше объема погруженной в воду части льдинки, уровень воды в сосуде при таянии льда увеличится, если меньше - уменьшится. Поэтому сравним объемы (*) и (**). Имеем

$$V_{п.ч.} \quad \vee \quad V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{\rho} \quad \vee \quad \frac{m}{\rho_1}$$

Поскольку $\rho > \rho_1$, $V_{п.ч.} < V$. Следовательно, уровень воды в сосуде поднимется. Величина повышения, очевидно, есть разность объемов (**) и (*), деленная на площадь сечения сосуда. Поэтому уровень поднимется на

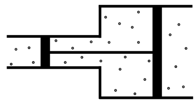
$$\Delta h = \frac{m\left(\rho - \rho_1\right)}{S\rho\rho_1} = \frac{\rho_0 V\left(\rho - \rho_1\right)}{S\rho\rho_1} = 0{,}163 \text{ мм}$$

Ответ:
0,164

Задача 1.1.7 (2 балла)

Условие:

Две открытые с обоих концов в атмосферу трубы, площади сечений которых относятся как $5/3$, состыкованы между собой. В них вставлены соединенные жестким стержнем поршни, которые при абсолютной температуре T_0 находятся на одинаковых расстояниях от стыка труб. Между поршнями находится идеальный газ. Газ охлаждают до температуры $T_0/2$. Найти давление газа между поршнями в конечном состоянии. Считать, что газ при всех рассматриваемых температурах является идеальным. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Ответ в паскалях разделить на 100 и вписать в поле ответа.



Решение:

Рассмотрим условие равновесия поршней. Внешними силами по отношению к системе двух поршней, соединенных стержнем являются силы, действующие на них со стороны атмосферного воздуха, и воздуха между поршнями. Условие равновесия этой системы дает:

$$p_0(5S/3) + pS = p(5S/3) + p_0 S \qquad (1)$$

где S и $5S/3$ - площади сечений труб, p_0 и p - атмосферное давление и давление газа в трубах. Из формулы (1) имеем

$$(p_0 - p)(5S/3) = (p_0 - p)S \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что поршни в такой трубе (из соединенных труб разных поперечных сечений) находятся в равновесии только в том случае, когда давление газа в трубах равно атмосферному давлению. Это значит, что при охлаждении газа с ним происходит изобарический процесс с уменьшением объема. Для этого поршни должны перемещаться влево до стыка труб. При этом новый объем газа составит

$$\frac{Sl}{S(l/2) + (5S/3)(l/2)} = \frac{3}{4}$$

от старого (где l - длина стержня, связывающего поршни). Температура газа составит в этот момент $3T_0/4$. После этого поршни уже не могут перемещаться, поэтому при дальнейшем охлаждении до температуры $T_0/2$ объем газа не меняется, т.е. с ним происходит изохорический процесс с уменьшением давления. Для этого процесса имеем

$$\frac{p_0}{(3T_0/4)} = \frac{p_x}{(T_0/2)}$$

где p_x - искомое давление. Отсюда

$$p_x = \frac{2p_0}{3} = 6{,}67 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Ответ:
667

Задача 1.1.8 (3 балла)

Условие:

Числа a и b таковы, что неравенство $a\cos x + b cos 3x \le 0$ выполняется при любых x. Найти наибольшее число b, при котором это возможно. Ответ вписать в предложенное поле.

Решение:

Сделаем замену $t = \cos x \in [-1;1]$. Тогда

$at + b(4t^3 - 3t) \le 1 \to 4bt^3 + (a - 3b)t \le 1$ для всех $t \in [-1;1]$.

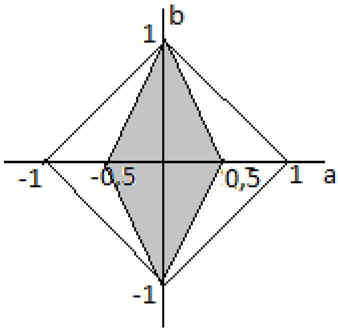
Для $t = 1$. $4b + (a - 3b) \le 1 \to a + b \le 1$.

Для $t = -1$. $-4b - (a - 3b) \le 1 \to -a - b \le 1 \to a + b \ge -1$, т.е. $|a + b| \le 1$.

Для $t = \frac{1}{2}$. $\frac{b}{2} + \frac{a - 3b}{2} \le 1 \to a - 2b \le 2$.

Для $t = -\frac{1}{2}$. $-\frac{b}{2} + \frac{3b - a}{2} \le 1 \ \to a - 2b \ge -2 \ \to |a - 2b| \le 2$.

На рисунке изображена область значений a и b , при которых неравенство выполняется при четырех значениях $t = \pm 1, \ \pm\frac{1}{2}$.



Допустимые значения $b \le 1$. Число $b = 1$ допустимо, поскольку для пары $a = 0, \ b = 1$ неравенство $\cos 3x \le 1$ выполняется при любых x .

Ответ:

1

Задача 1.1.9 (3 балла)

Условие:

Дан раствор кислоты с процентным содержанием (концентрацией) кислоты $\rho = 20\%$. Одну половину раствора выпарили до двукратного увеличения концентрации кислоты. После этого выпаренный раствор соединили со второй половиной кислоты (с которой ничего не делали). Найти процентное содержание кислоты в полученном растворе. Концентрацию полученного раствора кислоты в процентах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа. **Указание.** Процентным содержанием некоторого вещества в растворе (концентрацией) называется отношение

$$\rho = \frac{m}{(m + M)} \cdot 100\%$$

где m - масса вещества, M - масса воды.

Решение:

Пусть масса чистой кислоты в растворе - m, масса воды - M. Тогда для концентрации кислоты в первоначальном растворе имеем

$$\rho = \frac{m}{(m + M)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M}{m} = \frac{1 - \rho}{\rho}$$

Концентрация кислоты в половине раствора после выпаривания удвоилась, поэтому

$$2\rho = \frac{m/2}{(m/2 + M_1)}$$

где M_1 - масса воды, оставшаяся после выпаривания половины раствора до двукратного возрастания концентрации. Отсюда

$$M_1 = \frac{m(1-2\rho)}{4\rho}$$

Поэтому новое количество воды в растворе равно

$$M_2 = M_1 + \frac{M}{2} = \frac{m(1-2\rho)}{4\rho} + \frac{M}{2} = \frac{m(1-2\rho)}{4\rho} + \frac{m(1-\rho)}{2\rho} = \frac{m(3-4\rho)}{4\rho}$$

Теперь можно найти и новую концентрации. Кислоты в растворе

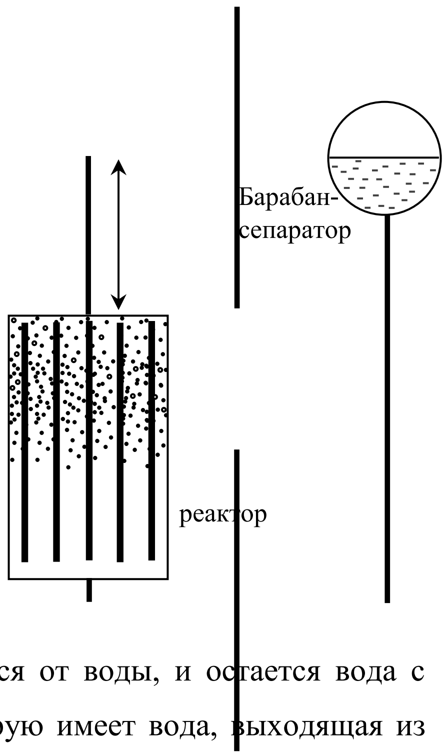
$$\rho_1 = \frac{m}{(m + M_2)} = \frac{4\rho}{3} = 26,7\%$$

.

Ответ:
26,7

Задача 1.1.10 (2 балла)

Условие:



Одной из существенных проблем работы АЭС является остаточное тепловыделение – после остановки реактора тепло в нем продолжает выделяться, и может разрушить реактор (такого рода процессы привели к повреждению реактора на АЭС Фукусима). Поэтому насосы, прокачивающие через реактор теплоноситель – воду – должны работать даже через несколько лет после остановки реактора. Чтобы не зависеть от питания этих насосов в реакторах предусматривают системы естественной циркуляции воды, которые заставляет воду протекать через реактор даже в случае отказа насосов. В реакторе типа РБМК основным элементом этой системы является барабан-сепаратор – резервуар, в который поступает имеющая низкую плотность $\rho_2 = 35$ кг/м^3 за счет пузырьков пара кипящая вода из реактора. В сепараторе пар отделяется от воды, и остается вода с плотностью $\rho_1 = 775$ кг/м^3 (при той температуре, которую имеет вода, выходящая из реактора). И далее эта вода под собственным весом осуществляет естественную циркуляцию в реакторе. Считая, что вода в реактор входит с плотностью ρ_1, начинает кипеть посередине реактора, высота реактора $l = 15$ м, а потери давления на трение и местное сопротивление составляют $\Delta p = 120 \cdot 10^3$ Па, определить, на какой высоте h должен находится уровень воды в сепараторе, чтобы обеспечить естественную циркуляцию теплоносителя. $g = 10$ м/с^2. Ответ в метрах округлить до трех значащих цифр и записать в поле ответа.

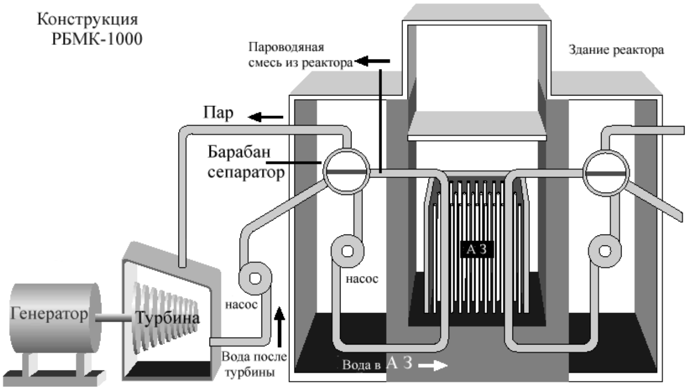
Решение:

Чтобы осуществлялась естественная циркуляция, давление в левом колене сосуда должно быть больше давления в правом колене (см. рисунок в условии задачи) на величину потерь давления. Или

$$\rho_1 g\left(h+\frac{l}{2}\right)-\rho_2 g\left(h+\frac{l}{2}\right)=\Delta p$$

Отсюда

$$h=\frac{\Delta p}{g\left(\rho_1-\rho_2\right)}-\frac{l}{2}=8,72$$ м



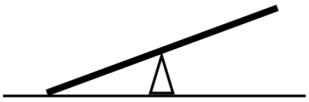
Ответ:
8,72

1.2 Вторая попытка Физика/Математика 10-11 класс

Задача 1.2.1 (1 балл)

Условие:

На концах однородной доски длиной $L=4$ м стоят мальчики, массы которых равны m и $1,2m$. Посередине доски находится опора.



Мальчики начинают аккуратно двигаться к середине доски со скоростями v и $1,8v$ соответственно ($v=0,2$ м/с). Через какое время доска окажется в горизонтальном положении? Время в секундах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Очевидно качели окажутся в равновесии, когда центр тяжести мальчиков окажется посередине. Или

$$m\left(l-vt\right)=1,2m\left(l-1,8vt\right)$$

где $l=L/2$ длина плеч весов). Отсюда находим

$$t=\frac{0,15L}{1,16v}=2,59$$ с

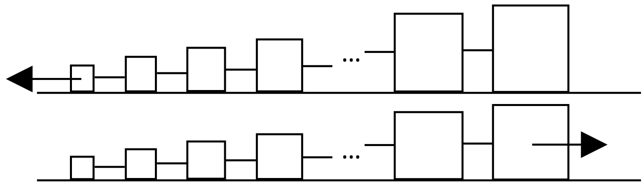
Ответ:
2,59

Задача 1.2.2 (3 балла)

Условие:

Пятьдесят тел с массами m, $3m$, $5m$, … $99m$ связаны невесомыми нерастяжимыми нитями и расположены на гладком горизонтальном столе. Сначала на тело массой m действуют горизонтальной силой F (верхний рисунок), потом такой же силой, но направленной противоположно, действуют на тело массой $99m$ (нижний рисунок). Найти отношение сил натяжения нити, связывающей тела с массами $47m$ и

$49m$ в первом и во втором случае. Отношение силы натяжения в первом случае к силе натяжения во втором случае округлить до трех значащих цифр и записать в предложенное поле.



Решение:

Найдем массу M всей системы. Очевидно

$$M = m\sum_{k=1}^{50}\left(2k-1\right) = 50^2 m = 2500m$$

Масса части системы, содержащей тела m, $3m$, … $47m$, равна

$$M_{m-3m-...-47m} = m\sum_{k=1}^{24}\left(2k-1\right) = 24^2 m = 576m$$

А масса оставшейся части системы

$$M_{49m-51m-...-99m} = M - M_{m-3m-...-47m} = 50^2 m - 24^2 m = 1924m$$

Ускорение тел и в том, и в другом случае будет одинаковым и равным

$$a = \frac{F}{M} = \frac{F}{2500m}$$

В первом случае сила натяжения нити, связывающей грузы массами $47m$ и $49m$, сообщает это ускорение участку цепочки грузов $49m$, $51m$, $53m$, …, $99m$. Поэтому она равна

$$T_{47-49}^{(1)} = M_{49m-51m-...-99m}a = \frac{1924F}{2500m}$$

Во втором случае сила натяжения этой нити сообщает такое же ускорение участку цепочки с грузами m, $3m$, $5m$, …, $47m$. Поэтому

$$T_{47-49}^{(2)} = M_{m-3m-...-47m}a = \frac{576F}{2500m}$$

Отсюда

$$\frac{T_{47-49}^{(1)}}{T_{47-49}^{(2)}} = \frac{1924}{576} = 3,34$$

Ответ:

3,34

Задача 1.2.3 (2 балла)

Условие:

Найти сумму пятнадцати членов последовательности

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}, \quad n = 1,2,...15$$

.

Решение:

Сделаем преобразования

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

.

Тогда $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. При $n = 15$ $S_{15} = 1 - \dfrac{1}{4} = 0,75$

Ответ:
0,75

Задача 1.2.4 (3 балла)
Условие:

Десятичная запись целого числа $P = \underbrace{aa...a}_{n}6\underbrace{bb...b}_{n}4$ использует цифры $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Известно, что $\sqrt{P}$ целое число при любых $n \geq 1$. Найти $a + b$. Целый ответ вписать в поле ответа.

Решение:
Для $n = 1$ число $P = a6b4$ четырехзначное, поэтому целое число $Q = \sqrt{P} \in \left(\sqrt{1614}; \sqrt{9694}\right)$, т.е. $41 \leq Q \leq 98$. Число Q может оканчиваться либо на 2, либо на 8. Ни одно из чисел
$42^2 = 1764,\ 52^2 = 2704,\ 62^2 = 3844, 72^2 = 5184,\ 82^2 = 6724,\ 92^2 = 8464$
не содержит 6 в разряде сотен, и число Q оканчивается на 8.
$48^2 = 2304,\ 58^2 = 3364,\ 68^2 = 4624, 78^2 = 6084,\ 88^2 = 7774,\ 98^2 = 9604$.
Только одно число $68^2 = 4624 \to a = 4, b = 2$ удовлетворяют условию задачи при $n = 1$ (второй вариант $98^2 = 9604 \to a = 9,\ b = 0$ не удовлетворяет условию). Заметим, что для любого $n > 1$ число $Q = \underbrace{66...}_{n}68$ в квадрате равно $P = \underbrace{44...}_{n}46\underbrace{22...}_{n}24$. Тогда $a + b = 6$

Ответ:
6

Задача 1.2.5 (1 балл)
Условие:

Ядро атома урана с атомной массой 235 а.е.м. ($^{235}\mathrm{U}$) обладает следующим свойством: при попадании в него нейтрона это ядро делится с выделением энергии на два сравнимых по массе ядра и два-три нейтрона, которые могут вызвать деление других ядер. Это свойство позволило осуществить цепную реакцию деления, в которой реакция деления макроскопического количества урана может быть вызвана всего одним начальным нейтроном. Считая, что при делении одного ядра выделяется энергия $E_U = 2 \cdot 10^8$ эВ, найти массу урана, делящегося в ядерном реакторе за 1 секунду, если тепловая мощность реактора $P = 6 \cdot 10^9$ Вт. 1эВ=1,6 10^{-19} Дж, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль. Массу делящегося урана в граммах округлить до трех значащих цифр и ввести в поле ответа.

Решение:

Пусть масса урана, делящегося в секунду, равна m. Тогда количество ядер урана, делящихся в секунду, равно

$$n = \frac{m}{\mu} \cdot N_A$$

(μ - молярная масса урана), и, следовательно, тепловая мощность реактора определяется соотношением

$$P = \frac{m}{\mu} N_A E_U$$

Отсюда

$$m = \frac{P\mu}{N_A E_U} = 0,0732$$ г.

Ответ:

0,0732

Задача 1.2.6 (2 балла)

Условие:

На часах 16:00. Через какое минимальное время после этого конец минутной стрелки удаляется от конца часовой с максимальной скоростью? Время в минутах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Очевидно, скорость конца минутной стрелки относительно конца часовой максимальна, когда они движутся в противоположные стороны. После Это значит, что минутная стрелка должна к этому моменту «обогнать» часовую стрелку на угол π. А поскольку в начальный момент между ними был угол $2\pi/3$, то для искомого момента времени t справедливо соотношение

$$\omega_{мин} t - \omega_{час} t = \frac{5\pi}{3} \qquad (*)$$

где $\omega_{мин}$ и $\omega_{час}$ - угловые скорости минутной и часовой стрелок. Поскольку

$$\omega_{мин} = \frac{2\pi}{60}\left(мин^{-1}\right), \qquad \omega_{час} = \frac{2\pi}{720}\left(мин^{-1}\right)$$

из формулы (*) получаем

$$t = \frac{5\pi}{3\left(\omega_{мин} - \omega_{час}\right)} = \frac{600}{11} = 54,5\,(мин)$$

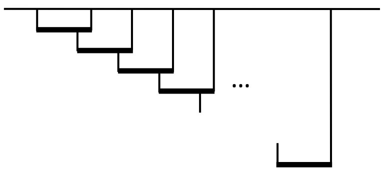
Ответ:

54,5

Задача 1.2.7 (3 балла)

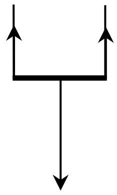
Условие:

Имеется 2017 одинаковых стержней массой $m = 1$ кг, каждый из которых подвешен на двух нитях, прикрепленных к его концам. Второй конец одной из нитей прикреплен к горизонтальному потолку, второй нити – к точке «предыдущего» стержня, отстоящей на одну четверть его длины от правого конца (см. рисунок). Найти силу натяжения самой левой нити. Считать, что $g = 10$ м/с^2 . Ответ в ньютонах округлить до трех значащих цифр и записать в предложенное поле.



Решение:

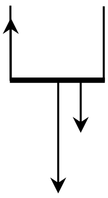
На самый правый стержень действует сила тяжести и две силы натяжения. Поскольку последние одинаковы, то



Первый стержень

$$T_1 = \frac{mg}{2}$$

Из условия равенства нулю моментов сил, действующих на второй стержень относительно правой нити, получим (чтобы не загромождать рисунок сила натяжения правой нити на рисунке не показана)



Второй стержень

$$T_2 l = mg\frac{l}{2} + \frac{mg}{2}\frac{l}{4} = \frac{mgl}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

Отсюда находим

$$T_2 = \frac{mg}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

Теперь ясна и дальнейшая структура формул. Сила натяжения левой нити, привязанной к n -ому стержню, будет определяться суммой конечной геометрической прогрессии

$$T_n = \frac{mg}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Используя формулу суммы прогрессии и учитывая, что $(1/4)^{2017}$ - чудовищно малое число, получим

$$T_{2017} = \frac{mg}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{2017}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2mg}{3} = 6,67$$

Н

Ответ:

6,67

Задача 1.2.8 (2 балла)

Условие:

Найти наибольшее значение выражения $x^2 y^2 z^2 u$, если x, y, z и u положительные числа ,для которых $2x + xy + z + yzu = 4$. Наибольшее значение указанного выражения умножить на 10 и полученное число ввести в поле ответа.

Решение:

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом четырех чисел a , b , c и d дает:

$$\sqrt[4]{abcd} \le \frac{a + b + c + d}{4}.$$

Полагаем $a = 2x, b = xy, c = z, d = yzu$. Тогда по условию, $a+b+c+d=4$, а $abcd = 2x^2y^2z^2u \le 1$, т.е. $x^2y^2z^2u \le 0,5$. Равенство достигается при $a=b=c=d=1$, т.е. $x = 0,5,\ y = 2, z = 1$ и $u = 0,5$.

Ответ:
5

Задача 1.2.9 (2 балла)
Условие:

Сколько пар целых чисел $(x; y)$ являются решениями уравнения $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$? Число различных пар целых решений данного уравнения ввести в поле ответа.

Решение:

Преобразование данного уравнения дает: $x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy$ или $(x+y)^2 = xy(xy+1)$. Однако произведение двух соседних ненулевых целых чисел (xy и $xy+1$), не может быть квадратом целого числа. Действительно, если $a(a+1) = b^2$ или $(b-a)(b+a) = a$. Равенство невозможно, поскольку модуль одного из чисел $a-b$ или $a+b$ больше $|a|$. Поэтому данное в условии уравнение удовлетворяется, если одно из чисел xy или $xy+1$ равно нулю. Поэтому данное в условии уравнение удовлетворяется, если либо $xy = 0$, либо $xy = -1$, а $x + y = 0$. Этим условиям, удовлетворяют три пары целых чисел: 1) $x = 0, y = 0$ 2) $x = 1, y = -1$ 3) $x = -1, y = 1$. Т.е. уравнению удовлетворяют три пары целых решений.

Ответ:
3

Задача 1.2.10 (1 балл)
Условие:

Одним из способов получения ядерной энергии является термоядерная реакция слияния изотопов водорода дейтерия ${}^2D$ и трития ${}^3T$ с образованием ядра гелия-4 и нейтрона и выделением энергии ${}^2D + {}^3T \to {}^4He + {}^1n + Q$ (в управляемом режиме эта реакция будет реализована на строящейся во Франции международной термоядерной установке ITER, во взрывном режиме реализуется в водородной бомбе). Энерговыделение в данной реакции составляет $Q = 17,61$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями соединяющихся ядер, найти кинетическую энергию ядра ${}^4He$ (в МэВ – Мегаэлектронвольтах). Считать, что масса ядра ${}^4He$ равна 4 а.е.м., а масса нейтрона равна 1 а.е.м. (а.е.м. – атомная единица массы). Кинетическую энергию ядра ${}^4He$ в МэВ округлить до трех значащих цифр и ввести в поле ответа.

Решение:

В пренебрежении кинетической энергией дейтерия и трития до слияния суммарный импульс системы частиц равен нулю, а сумма кинетических энергий гелия и нейтрона равна энерговыделению реакции:

$$4mv_{He} = mv_n$$

$$\frac{4mv_{He}^2}{2} + \frac{mv_n^2}{2} = Q$$

Исключая из второго уравнения энергию нейтрона, получим

$$E_{He} = \frac{4mv_{He}^2}{2} = \frac{Q}{5} = 3,52 \text{ МэВ}$$

Ответ:

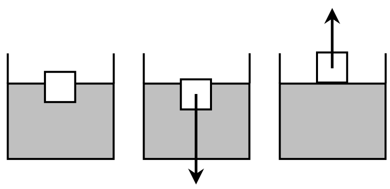
3,52

1.3 Первая попытка Физика /Математика (9 класс)

Задача 1.3.1 (1 балл)

Условие:

В сосуде плавает кубик, погрузившись в жидкость на k-ую часть своего объема ($k = 3/4$). Чтобы погрузить кубик в жидкость на n-ую часть объема ($n = 5/6$) к нему нужно приложить минимальную вертикальную силу $F_1 = 10$ Н. Какую минимальную вертикальную силу F_2 нужно приложить к кубику, чтобы полностью вытащить его из жидкости? Значение силы F_2 в ньютонах записать в предложенное поле.



Решение:

Условие равновесия кубика а первом положении дает

$$m = \rho V_{п.ч.} = \frac{3}{4}\rho V \qquad (*)$$

где m - масса кубика, ρ - плотность воды, V и $V_{п.ч.}$ - объем кубика и объем его части, погруженной в воду в первом случае. Во втором случае

$$m + \frac{F_1}{g} = \rho V'_{п.ч.} = \frac{5}{6}\rho V \qquad (**)$$

где $V'_{п.ч.}$ - объем части кубика, погруженной в воду во втором случае. Вычитая формулу (*) из формулы (**), получим

$$\rho g V = 12 F_1 \qquad (***)$$

Чтобы полностью вытащить кубик из воды к нему нужно приложить силу, равную его силе тяжести. Поэтому из формул (*), (***) получаем для искомой силы F_2

$F_2 = mg = 9F_1 = 90$ Н

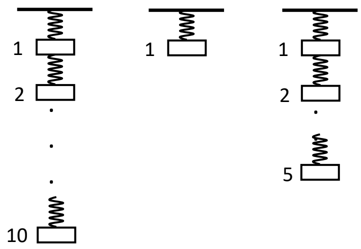
Ответ:

90

Задача 1.3.2 (3 балла)

Условие:

К горизонтальному потолку прикрепили не имеющую массу пружину, а к ней подвесили некоторое тело. Затем к этому телу прикрепили такую же пружину, а к ней подвесили еще одно такое же тело. Затем еще одну пружину, еще одно тело, снова пружину, снова тело и так 10 раз (левый рисунок). Известно, что расстояние от нижнего тела до потолка в этом случае будет равно $L_1 = 180$ см. Если к потолку подвесить одно такое же тело на такой же пружине (средний рисунок), то расстояние от тела до потолка будет равно $L_2 = 12$ см. Каким будет расстояние от нижнего тела до потолка, если к потолку привязать пять таких же тел, скрепленных пятью такими же пружинами (правый рисунок)? Считать, что для любых деформаций пружин справедлив закон Гука (силу упругости пропорциональна деформации), тела считать точечными. Ответ в сантиметрах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.



Решение:

Расстояние от нижнего груза до потолка (при условии, что грузы точечные) будет равно сумме длин всех пружин, которое, в свою очередь, равно сумме длин недеформированных пружин и их деформаций. Очевидно, деформации всех пружин будут разными, причем, чем ближе пружина к потолку, тем больше ее деформация. Действительно, самая нижняя пружина держит только один груз, вторая – два таких груза, третья – три, … последняя – десять. Поэтому, если деформация Самой нижней пружины Δl, второй снизу - $2\Delta l$, третьей - $3\Delta l$, … последней - $10\Delta l$. Поэтому из первого условия задачи получаем

$$L_1 = 10l_0 + \Delta l + 2\Delta l + ... + 10\Delta l = 10l_0 + 55\Delta l \qquad (*)$$

где l_0 - длина пружины в недеформированном состоянии.

Для второго положения (один груз, одна пружина) имеем аналогично

$$L_2 = l_0 + \Delta l \qquad (**)$$

Решая систему уравнений (*), (**), получим

$$l_0 = \frac{55L_2 - L_1}{45}; \qquad \Delta l = \frac{L_1 - 10L_2}{45}$$

Когда к потолку подвешено пять грузов на пяти пружинах, расстояние от нижнего груза до потолка определяется следующим соотношением

$$x = 5l_0 + 15\Delta l = \frac{25L_2 + 2L_1}{9} = 73,3$$ см

Ответ:

73,3

Задача 1.3.3 (2 балла)

Условие:

Натуральные числа x и y связаны соотношением $x^3 - y^3 = 2xy + 40$. Найти $x + y$. Целый ответ ввести в предложенное поле.

Решение:

Введем обозначение $c = x - y$. По условию, $x > y \to c \ge 1$ (т.к. правая часть данного в условии равенства больше нуля: $2xy + 40 > 0$). Подставим, $x = y + c$ в уравнение:

$$\left(y + c\right)^3 - y^3 = 2(y + c)y + 40 \to c((y + c)^2 + (y + c)y + y^2) = 2y^2 + 2yc + 40$$

Или

$$(3c - 2)y^2 + (3c^2 - 2c)y = 40 - c^3$$

При $c \ge 1$ левая часть равенства положительная, поэтому $c^3 < 40 \to 1 \le c \le 3$. Дальше действуем перебором:

$c = 1 \to y^2 + y + 1 = 40 \to y^2 + y - 39 = 0$ натуральных решений не имеет.

$c=2 \to 4y^2+8y+8=40 \to y^2+2y-8=0$ - единственное натуральное решение
$y=2 \to x=4$
$c=3 \to 7y^2+21y+27=40 \to 7y^2+21y-13=0$ - натуральных решений не имеет.
Отсюда

$$x+y=6.$$

Ответ:
6

Задача 1.3.4 (2балла)
Условие:

Решите уравнение $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$ Сумму всех корней введите в предложенное поле ответа.

Решение:
Дополним левую часть данного уравнения до полного квадрата разности $x^2+\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)^2-\dfrac{2\cdot 2x^2}{x+2}+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$, $\left(x-\dfrac{2x}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$, $\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^2+\dfrac{4x^2}{x+2}=5$. Сделаем замену $\dfrac{x^2}{x+2}=y$ и рассмотрим уравнение $y^2+4y-5=0$, $y_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3=\left[\begin{array}{l}-5,\\ 1.\end{array}\right.$ Возвращаясь к замене, получаем $\dfrac{x^2}{x+2}=-5$, $x^2+5x+10=0$ – решений нет; $\dfrac{x^2}{x+2}=1$, $x^2-x-2=0$, откуда следует $x=-1$ или $x=2$.

Ответ:
1

Задача 1.3.5 (2балла)
Условие:

При прохождении потока нейтронов через пластинку из кадмия толщиной 1 мм плотность потока нейтронов уменьшается на 15 %, а их скорость не меняется. Какая часть потока нейтронов проходит через пластинку из кадмия толщиной 1 см?

Прошедшую часть потока (в долях единицы) округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

После прохождения каждого миллиметрового слоя кадмия остается 0,85 падающего потока. Другими словами, если падает поток нейтронов плотностью j, то после прохождения такого слоя его плотность будет равна

$$j_1 = 0,85j$$

После второго слоя – 0,85 от того потока, который падает на второй слой, т.е.

$$j_2 = 0,85j_1 = (0,85)^2 j$$

И т.д. А поскольку сантиметровый слой состоит из десяти миллиметровых слоев, то пройдет следующая часть потока нейтронов

$$j_{10} = 0,85j_9 = (0,85)^2 j_8 = ... = (0,85)^{10} j = 0,197j$$

Ответ:

0,197

Задача 1.3.6 (2 балла)

Условие:

Тело начинает двигаться из состояния покоя с постоянным ускорением. Через время $t_1 = 10$ с модуль ускорения тела уменьшается в два раза, а его направление меняется на противоположное. Через какое время после этого тело вернется в исходную точку? Время возвращения в секундах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Уравнения движения для начального этапа (до смены ускорения) дают

$$x(t) = \frac{at^2}{2}$$

$$v_x(t) = at$$

ось x направлена вдоль движения тела (параллельно вектору $\vec{a}$). В момент времени t_1 находим

$$x_1 = \frac{at_1^2}{2}$$

$$v_{x,1}(t) = at_1 \qquad (*)$$

После этого тело также будет двигаться равноускоренно, но с другим ускорением, причем начальной координатой и скоростью для движения на втором этапе будут величины (*). Поэтому при $t > t_1$ имеем

$$x(t) = x_1 + v_1 t - \frac{at^2}{4}$$

$$v_x(t) = \frac{at}{2} \qquad (**)$$

Тело вернется в начальную точку в такой момент времени, когда его координата станет равной нулю. Поэтому для времени возврата t_2 получаем из (**)

$$\frac{at_2^2}{4} - v_1 t_2 - x_1 = 0$$

Откуда находим время возвращения (отсчитанное от момента смены ускорения)

$t_2 = t_1\left(2+\sqrt{6}\right) = 44,5$ с

Ответ:
44,5

Задача 1.3.7 (2 балла)
Условие:
Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали две машины. Через некоторое время они встретились и продолжили свое движение. Первая машина пришла в пункт назначения через $t_1 = 4$ часа после встречи, вторая - через $t_2 = 2$ час. Через какое время после начала движения машины встретились? Время в часах, прошедшее от выхода машин из «своих» городов до встречи с другой машиной, округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:
Применение формулы, связывающей расстояние, время и скорость к каждой машине от момента выезда до встречи дает

$l_1 = v_1 t \qquad l_2 = v_2 t \qquad (*)$

где t - время встречи, l_1 и l_2 - пути, пройденные первой и второй машиной от выхода до встречи, v_1 и v_2 - скорости первой и второй машины. Применение этого же соотношения к этапам движения машин от встречи до пункта назначения с учетом того, что расстояние, пройденное на этом этапе первой машиной, равно расстоянию, пройденному на первом этапе второй машиной, и наоборот, получим

$l_2 = v_1 t_1 \qquad l_1 = v_2 t_2 \qquad (**)$

Деля первое из уравнений (*) на первое из уравнений (**) и второе из уравнений (**) на первое из (*), получим

$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{v_1 t}{v_1 t_1} = \dfrac{t}{t_1}$ и $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{v_2 t_2}{v_2 t} = \dfrac{t_2}{t}$

Отсюда получаем окончательно

$t = \sqrt{t_1 t_2} = 2,83$ час

Ответ:
2,83

Задача 1.3.8 (2 балла)
Условие:
Найти наибольшее целое x, для которого $4^{18} + 4^{507} + 4^{x-5}$ является квадратом целого числа. Целый ответ вписать в предложенное поле.

Решение:
Сначала преобразуем данное выражение так, чтобы оно стало максимально «похожим» на квадрат суммы. Делаем следующее преобразование:

$4^{18} + 4^{507} + 4^{x-5} = 2^{36} + 2^{1014} + 2^{2x-10} = 2^{36}\left(1 + 2\cdot 2^{977} + 2^{2x-46}\right)$.

Очевидно, что выражение будет полным квадратом, если $2x - 46 = 2\cdot 977 \to x = 1000$.

Докажем, что при $x>1000$ оно не является квадратом целого числа. Если $x>1000$, то $2^{x-23}>2^{977}$ и $2^{2(x-23)}<1+2\cdot 2^{977}+2^{2(x-23)}<1+2\cdot 2^{x-23}+2^{2(x-23)}=(1+2^{x-23})^2$. Таким образом, число $a=\left(1+2\cdot 2^{977}+2^{2x-46}\right)$ находится между b^2 и $(b+1)^2$, где $b=2^{x-23}$ и поэтому не является квадратом целого числа.

Ответ:
$x=1000$

Задача 1.3.9 (2 балла)

Условие:

Решите систему уравнений $\begin{cases}1-(x-3)^2=\sqrt{x-y},\\ y^2-4=\sqrt{x-y-1}.\end{cases}$. Произведение xy вписать в поле ответа.

Решение:

Так как $\sqrt{x-y}\geq 0$, то из первого уравнения системы имеем $1-(x-3)^2\geq 0$, т.е. $(x-3)^2\leq 1$. Кроме того, $x-y=\left(1-(x-3)^2\right)^2=1-2(x-3)^2+(x-3)^4$. Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$y^2-4=\sqrt{1-2(x-3)^2+(x-3)^4-1}$, $y^2-4=\sqrt{(x-3)^2\left((x-3)^2-2\right)}$.

Поскольку $(x-3)^2-2<0$, то $(x-3)^2=0$, т.е. $x=3$. Подставляя найденное x в первое уравнение, получаем $1=\sqrt{3-y}$ или $y=2$.

Ответ:
$xy=6$

Задача 1.3.10 (3 балла)

Условие:

Атомы ряда элементов (которые называются радиоактивными) могут распадаться, превращаясь в атомы других элементов. Процесс такого превращения (радиоактивного распада) подчиняется следующему закону (закон радиоактивного распада) – количество распадающихся атомов пропорционально количеству имеющихся. Поэтому для характеристики радиоактивного распада вводят величину, которая называется периодом полураспада – это время, в течение которого распадается половина имеющихся в начале атомов вещества. Пусть период полураспада некоторого радиоактивного элемента равен $T=1,25$ часа. В начальный момент имеется N_0 атомов этого вещества. Через какое время после начала наблюдения распадется $0,7N_0$ первоначального количества атомов? Ответ в часах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Очевидно, что закон, описанный в условии задачи, будет выполняться, если зависимость числа оставшихся атомов от времени $N(t)$ имеет вид

$$N(t)=N_0 2^{-\left(\frac{t}{T}\right)} \qquad (*)$$

Нам нужно найти такое время t_1, что $N(t)=0,3N_0$. Поэтому зависимость (*) дает для $t=t_1$

$$0,3=2^{-\left(\frac{t_2}{T}\right)} \qquad (**)$$

Уравнение (**) можно решить подбором

$t_2=1,735T=2,17$ час

Ответ:

2,17

1.4 Вторая попытка Физика/Математика 9 класс

Задача 1.4.1 (1 балл)

Условие:

На концах невесомой доски длиной $L=4$ м стоят мальчики, массы которых равны m и $1,2m$. Посередине доски находится опора. Мальчики начинают аккуратно двигаться к середине доски со скоростями v и $1,8v$ соответственно ($v=0,2$ м/с). Через какое время доска окажется в горизонтальном положении? Время в секундах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Очевидно качели окажутся в равновесии, когда центр тяжести мальчиков окажется посередине. Или

$$m(l-vt)=1,2m(l-1,8vt)$$

где $l=L/2$ длина плеч весов). Отсюда находим

$$t=\frac{0,15L}{1,16v}=2,59$$ с

Ответ:

2,59

Задача 1.4.2 (3 балла)

Условие:

Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, прошло расстояние $S=1$ м за время $\tau=1$ с. Какую скорость имело тело, в тот момент, когда оно прошло в 2 раза меньшее расстояние? Ответ в м/с округлить до трех значащих цифр по правилам округления и записать в предложенное поле.

Решение:

Применение законов движения к первому этапу (когда тело прошло расстояние S позволяет найти ускорение тела

$$a = \frac{2S}{t^2}$$

Применяя затем закон движения к половинному пути, получим

$$v^2 = 2a\left(\frac{S}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{\sqrt{2}S}{t} = 1,41$$ м/с

Ответ:

1,41

Задача 1.4.3 (2 балла)

Условие:

В семье три ребенка. Старший, Костя, ест конфет больше, чем его брат Даня, который меньше 6 конфет никогда не ест. Их младшая сестра Саша съедает конфет всегда больше, чем оба брата вместе. В новогоднюю ночь дети нашли под елкой 27 конфет. Сколько конфет съела Саша, если ни одной конфеты не осталось. Ответ ввести в предложенное поле.

Решение:

Пусть Костя съел $n_К$ конфет, Даня - $n_Д$, Саша - $n_С$. Для этих количеств справедливы соотношения

$$n_Д \geq 6$$

$$n_К > n_Д$$

$$n_К > n_Д + n$$

$$n_К + n_Д + n \quad = 27$$

Дальше действуем перебором. Если $n_Д = 6$ - минимально возможное количество, минимальное количество конфет, съеденное Костей - $n_К = 7$, съеденное Сашей - $n_С = 14$, что в сумме дает 27. Поэтому никаких других целых решений наша система не имеет, и количество конфет, съеденное Сашей равно 14.

Ответ:

14

Задача 1.4.4 (2 балла)

Условие:

Найти сумму пятнадцати членов последовательности

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots 15$$

.

Решение:

Сделаем преобразования

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

.

Тогда $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. При $n = 15$ $S_{15} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$

Ответ:
0,75

Задача 1.4.5 (2 балла)

Условие:

Атомы ряда элементов (которые называются радиоактивными) могут распадаться, превращаясь в атомы других элементов. Процесс такого превращения (радиоактивного распада) подчиняется следующему закону (закон радиоактивного распада) – количество распадающихся атомов пропорционально количеству имеющихся. Поэтому для характеристики радиоактивного распада вводят величину, которая называется периодом полураспада – это время, в течение которого распадается половина имеющихся в начале атомов вещества.

Пусть имеется образец, в котором находятся два радиоактивных вещества А и В. Известно, что процентное содержание вещества А в образце составляет 30 %, вещества В – 70 %. Пусть период полураспада вещества А равен 4 года, период полураспада вещества В – 3 года. Определить процентное содержание вещества А в образце, содержащем только вещества А и В, через 12 лет после начала наблюдений. Содержание вещества А в процентах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа. Указание. Процентным содержанием компоненты в смеси называется отношение

$$\eta = \frac{m_1}{m} \cdot 100\%$$

где m_1 - масса компоненты, m - масса смеси.

Решение:

Пусть масса образца до начала наблюдений равна m. Тогда массы веществ А и В - $m_A = 0,3m$, $m_B = 0,7m$. Найдем массы веществ А и В через 12 лет после начала наблюдений. Поскольку 12 лет составляет 2 периода полураспада вещества А, то через 12 лет останется следующая масса вещества А

$$m'_A \xrightarrow{[4\,года]} 0,15m \xrightarrow{[4\,года]} 0,075m \xrightarrow{[4\,года]} 0,0375m, \quad m'_A = 0,0375m$$

Аналогично для вещества В имеем (поскольку 12 лет – четыре периода полураспада вещества В):

$$m'_B \xrightarrow{[3\,года]} 0,35m \xrightarrow{[3\,года]} 0,175m \xrightarrow{[3\,года]} 0,0875m \xrightarrow{[3\,года]} 0,04375m,$$

$$m'_B = 0,04375m$$

Поэтому масса образца, содержащего только вещества А и В после 12 лет равна

$$m' = m'_A + m'_B = 0,0375m + 0,04375m = 0,08125m$$

Следовательно, новое процентное содержание вещества А в образце равно

$$\eta' = \frac{m'_1}{m'} \cdot 100\% = \frac{0,0375m}{0,08125m} \cdot 100\% = 46,2\%$$

Ответ:
46,2

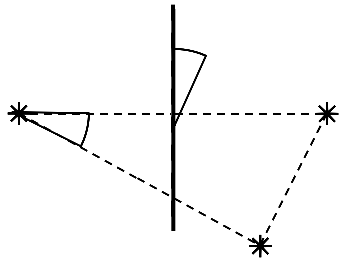
Задача 1.4.6 (1 балл)

Условие:

Точечный источник света находится на расстоянии $d = 10$ см от зеркала. Зеркало повернули на угол $\alpha = 20°$ вокруг оси, перпендикулярной чертежу и проходящей через точку О – основание перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало (повернутое зеркало показано пунктиром). Найти перемещение изображения. Ответ в сантиметрах округлить до трех значащих цифр и записать в поле ответа.

Решение:

Построение старого (S') и нового (S'') изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны



$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол $SO'O$ - прямой, то прямым является и угол $SS''S'$. Поэтому перемещение изображения $S'S''$ при повороте зеркала представляет собой катет прямоугольного треугольника $SS''S'$, гипотенуза которого равна $2d$. Отсюда находим

$SS'' = 2d \sin\alpha = 6,84$ см

Ответ:

6,84

Задача 1.4.7 (2 балла)

Условие:

Имеется изготовленный из металлической проволоки правильный n-угольник. Источник напряжения с нулевым внутренним сопротивлением сначала присоединяют к двум соседним вершинам n-угольника, а затем к вершинам, расположенным через одну. При этом ток через источник уменьшается в полтора раза. Найти число сторон n-угольника. Целый ответ записать в предложенное поле.

Решение:

Сопротивление n-угольника в первом и во втором случаях находятся из формул

$$R_1 = \frac{(n-1)r}{n}, \quad R_2 = \frac{2(n-2)r}{n}$$

А поскольку его сопротивление во втором случае в 3/2 раза больше сопротивления в первом, получаем

$$\frac{2(n-2)}{n-1} = \frac{3}{2}$$

Решая это уравнение находим

$n = 5$

Ответ:

5

Задача 1.4.8 (2 балла)

Условие:

В книге некоторое число страниц. Для нумерации всех страниц наборщик использовал 1893 цифры, начиная с 1. Сколько в книге страниц? Целый ответ записать в предложенное поле.

Решение:

Переберем и посчитаем все цифры, использованные для нумерации страниц. Для нумерации первых 9 страниц использовано 9 цифр. Для нумерации 90 страниц с 10 по 99 использовано 180 цифр. Итого – 189 цифр, что меньше данного числа. Для нумерации 900 трехзначных номеров страниц (от 100 до 999) нужны 2700 цифр, что больше данного числа. Значит, в книге трехзначное число страниц. Пусть число страниц в книге x. Тогда

$$3(x-99)+189=1893$$

Откуда $x=667$.

Ответ:

667

Задача 1.4.9 (1 балл)

Условие:

В классе 24 человека, все они учатся без двоек. Отличников в классе в два раза больше, чем троечников, а число отличников относится к числу хорошистов, как 2:3. На сколько троечников меньше, чем хорошистов? Ответ ввести в предложенное поле.

Решение:

Пусть число отличников - n_1, хорошистов - n_2, троечников - n_3. Тогда

$$n_1+n_2+n_3=24$$

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{n_1}{n_3}=2$$

Решая эту систему уравнений, получим $n_1=8$, $n_2=12$, $n_3=4$. Поэтому число хорошистов больше числа троечников на

$$n_2-n_3=8$$

Ответ:

8

Задача 1.4.10 (3 балла)

Условие:

Атомы ряда элементов (которые называются радиоактивными) могут распадаться, превращаясь в атомы других элементов. Процесс такого превращения (радиоактивного распада) подчиняется следующему закону (закон радиоактивного распада) – количество распадающихся атомов пропорционально количеству имеющихся. Для характеристики радиоактивного распада вводят величину, которая называется периодом полураспада – это время, в течение которого распадается половина имеющихся в начале атомов вещества.

Пусть имеется образец массой $m = 1$ г, в котором содержатся три радиоактивных вещества A, B и C, причем отношение их масс в образце - $m_A : m_B : m_C = 1:3:6$, а отношение периодов полураспада $T_A : T_B : T_C = 3:2:1$. Найти суммарную массу веществ A, B и C через время $6T_C$ после начала наблюдения. Массу образца в миллиграммах округлить до трех значащих цифр и вписать в поле ответа.

Решение:

Так как масса образца до начала наблюдений равна m, то массы компонент равны: $m_A = m/10$, $m_B = 3m/10$, $m_C = 6m/10$. Время наблюдений составляет $6T_C$, или $3T_B$, или $2T_A$. Поэтому массы компонент в конце интервала наблюдений будут равны:

$$m_A = \frac{m}{10} \xrightarrow{[T_A]} \frac{m}{20} \xrightarrow{[T_A]} \frac{m}{40}, \quad m'_A = \frac{m}{40}$$

$$m_B = \frac{3m}{10} \xrightarrow{[T_B]} \frac{3m}{20} \xrightarrow{[T_B]} \frac{3m}{40} \xrightarrow{[T_B]} \frac{3m}{80}, \quad m'_B = \frac{3m}{80}$$

$$m_C = \frac{3m}{5} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{10} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{20} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{40} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{80} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{160} \xrightarrow{[T_C]} \frac{3m}{320}, \quad m'_B = \frac{3m}{320}$$

Поэтому масса веществ A, B и C после указанного времени наблюдения равна

$$m' = m'_A + m'_B + m'_C = \frac{m}{40} + \frac{3m}{80} + \frac{3m}{320} = \frac{3m}{64} = 0,0469(\ ) = 46,9(\ )$$

Ответ:

46,9