§3 Заключительный этап: индивидуальная часть

Заключительный этап олимпиады состоит из двух частей: индивидуальное решение задач по предметам (математика, физика) и командное решение инженерных задач

Для каждого из параллелей (8-9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор теоретических задач по физике и по математике. Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля — суммарно от 0 до 200 баллов.

3.1 Задачи по математике (10-11 класс)

Задача 3.1.1 (16 баллов)

Условие:

Саша и Рустам захотели попить кофе. Саша сделал полный стакан кофе (200 мл), а Рустам налил половину стакана молока (100 мл), и тут выяснилось, что в аппарате закончился кофе. Тогда Саша решил поделиться с другом. Он перелил кофе в стакан Рустама из своего, пока тот не заполнился, при этом тщательно перемешивал. Потом это действие повторил в отношении к своему стакану. Эту процедуру Саша повторил несколько раз. В итоге у них в стаканах оказалось столько же жидкости, что в начале, но концентрация кофе отличалась менее чем на 1%. Какое наименьшее количество переливаний сделал Саша?

Решение:

Пусть в некоторый момент времени доля молока в стакане у Саши была равна α_i (при этом у него в стакане 200 мл), а у Рустама доля молока равна β_i (в стакане 100 мл). Тогда после одной операции переливания в стакане Рустама окажется

$100 \cdot (1 - \beta_i) + 100 \cdot (1 - \alpha_i)$ мл кофе и $100 \cdot (\alpha_i + \beta_i)$ мл молока.

Доли молока и кофе в первом стакане не изменилась (то есть $\alpha_{i+1} = \alpha_i$), изменился только общий объем. А вот во втором стакане доля молока теперь равна

$$\beta_{i+1} = \frac{100 \cdot (\alpha_i + \beta i)}{200} = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}.$$

После обратного переливания в стакане Саши окажется

$$100 \cdot (1 - \alpha_{i+1}) + 100 \cdot (1 - \beta_{i+1}) = 100 \cdot \left(2 - \frac{3\alpha_i}{2} - \frac{\beta_i}{2}\right)$$ мл кофе

и

$$100 \cdot \alpha_{i+1} + 100 \cdot \beta_{i+1} = 100 \cdot \left(\frac{3\alpha_i}{2} + \frac{\beta_i}{2}\right)$$ мл молока.

Следовательно, доля молока равна

$$\alpha_{i+2} = \frac{100 \cdot \left(\frac{3\alpha_i}{2} + \frac{\beta_i}{2}\right)}{200} = \frac{3\alpha_i + \beta_i}{4},$$

а в стакане у Рустама не изменилась

$$\beta_{i+2} = \beta_{i+1} = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}.$$

Теперь посмотрим, как изменялся модуль разности концентрации молока: изначально он был равен

$\gamma_i = |\alpha_i - \beta_i|,$

а после двух переливаний стал равен

$$\gamma_{i+2} = |\alpha_{i+2} - \beta_{i+2}| = \left|\frac{3\alpha_i + \beta_i}{4} - \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}\right| = \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{4} = \frac{\gamma_i}{4}.$$

В итоге мы получили, что после двух переливании модуль разности концентрации уменьшается ровно в 4 раза. Изначально он равен $\gamma_0 = 1$, а после k пар переливаний впервые стал менее чем $\gamma_{2k} < \frac{1}{100}$. Следовательно, нужно найти такое наименьшее k, что $\frac{1}{4^k} < \frac{1}{100}$ (если разность концентрации кофе меньше 1, то и разность концентрации молока тоже меньше 1 и наоборот). Получаем, что k = 4. Поэтому всего переливаний было 8.

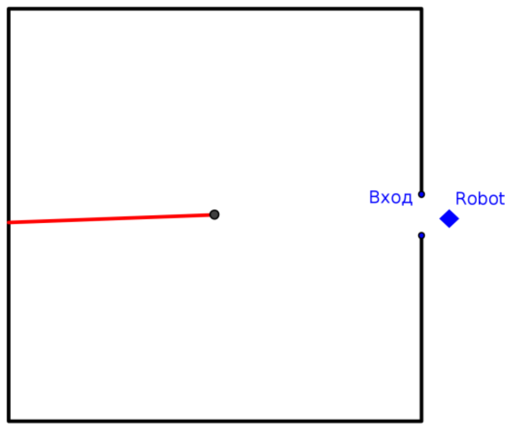
Критерии оценки:

- За полный и правильный расчет всех значений концентрации - 16 баллов;
- Если имелась вычислительная ошибка при расчет концентрации - не более 8 баллов;
- Если в какой-то момент времени происходило округление значений - не 14 баллов.

Задача 3.1.2 (34 балла)

Условие:

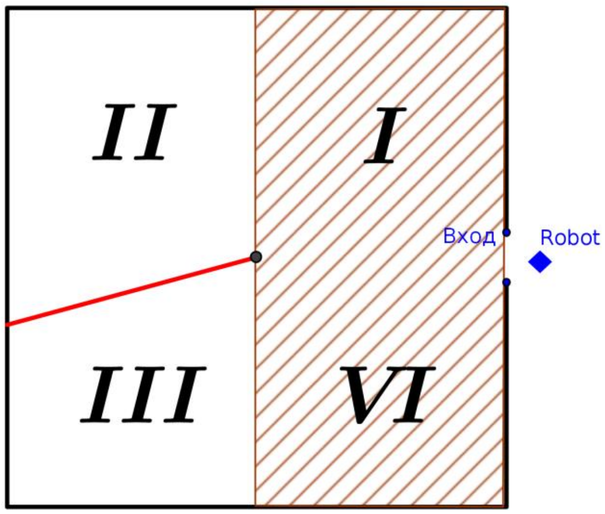
В центре квадратной комнаты со стороной 20 метров находится лазерный радар, который вращается со скоростью один оборот в минуту. Робот должен незаметно пробраться до центра, не попав под луч радара.



a. **(14 баллов)** Докажите, что робот не сможет достичь цели, если его скорость меньше 8 м/мин.
b. **(20 баллов)** Сможет ли робот достичь цели, если его скорость меньше 10 м/мин.

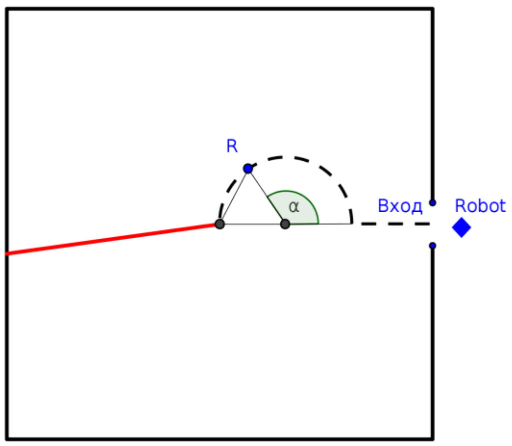
Решение:

a. Не умаляя общности будем считать, что радар вращается против часовой стрелки. Если радар в начальный момент времени (момент начала движения робота) в VI четверти, то он за половину минуты дойдет до конца I четверти и пересечет робота.



А если в I, II или III четверти, то за 1.25 минут он точно покроет заштрихованную область (непрерывно, начиная с начала IV и заканчивая концом I четверти). Так как скорость робота меньше 8 м/мин, то за 1.25 минут он удалится менее чем на 1.25·8 = 10 м от начальной точки, а значит будет в заштрихованной области. Следовательно, робот попадет под луч радара.

b. Пусть робот выехал ровно в тот момент, когда радар начинал движение в I четверти. Также будем считать, что робот двигался по траектории обозначенной пунктиром. Причем, весь путь он двигался с постоянной скоростью v = 9.5 м/мин, t = 0.75 мин двигался прямолинейно, а остаток пути по полуокружности. Докажем, что робот не попадет под радар. На прямолинейном участке пути радар не найдет робота, так как за 0.75 мин он не дойдет до конца IV четверти. Рассмотрим теперь произвольную точку R на полуокружности. Пусть центральный угол равен α, тогда точка R видна под углом $\frac{\alpha}{2}$ с центра поля (отсчет начинается с начала I четверти).



Радар не засечет робота в точке R если

$$t + \frac{(10 - vt)\pi}{2v} \cdot \frac{\alpha}{\pi} < 1 + \frac{\alpha}{4\pi}$$

Подставим значения

$$0.75 + \frac{23}{152} \cdot \alpha < 1 + 0.25 \cdot \frac{\alpha}{\pi} \iff \left(\frac{23\pi}{152} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{\alpha}{\pi} < 0.25$$

Последнее неравенство очевидно верно для $\alpha \in [0, \pi]$. Следовательно, на полуокружности радар не засечет робота.

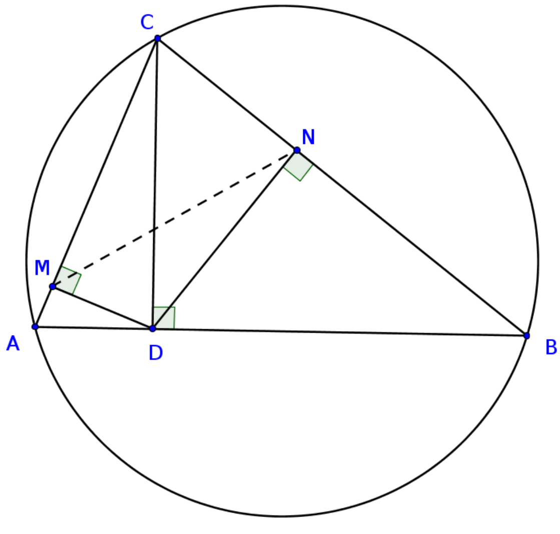
Дополнительные критерии оценки:

- Если в задаче (a) есть только утверждение о том, в какой момент времени должен поехать робот - 2 балла;
- Если в задаче (a) рассмотрена только окрестность расположения робота через некоторое время - 5 баллов;
- Если в задаче (b) указана только траектория движения робота без доказательства корректности - не более 10 баллов.

Задача 3.1.3 (50 баллов)

Условие:

a. **(14 баллов)** Точки A(a) и B(b) лежат на единичной окружности $z \cdot \overline{z} = 1$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Докажите, что координата ортогональной проекции точки M(m) на прямую AB задается уравнением
$$z = \frac{1}{2}(a + b + m - ab\overline{m})$$



b. **(16 баллов)** Пусть дан треугольник ABC (см. рисунок), вершины которого соответствуют комплексным числам a, b и c, причём описанная около него окружность имеет уравнение $z \cdot \overline{z} = 1$. Из основания высоты CD треугольника опущены перпендикуляры DM и DN на две стороны. Докажите, что
$$m - n = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab},$$
где m и n - комплексные координаты точек M и N.

c. **(20 баллов)** Докажите, что длина MN не зависит от выбора высоты треугольника.

Решение:

a. Найдём координату ортогональной проекции точки M(m) на прямую, заданную точками A(a) и B(b). Если Z(z) -- искомая точка, то имеем
$$\begin{cases} z(\overline{a} - \overline{b}) + a(\overline{b} - \overline{z}) + b(\overline{z} - \overline{a}) = 0 \; (1) \\ (a-b)(\overline{m} - \overline{z}) + (\overline{a} - \overline{b})(m - z) = 0 \; (2) \end{cases}$$
где (1) - условие коллинеарности трех точек A, B, Z; (2) - условие ортогональности $AB \perp MZ$.
Откуда выражаем z и получаем

$$z = \frac{a(\overline{m}-\overline{b}) - b(\overline{m}-\overline{a})}{2(\overline{a}-\overline{b})} + \frac{m}{2}$$

В случае, когда точки A(a) и B(b) принадлежат единичной окружности с центром в начале координат $a\overline{a} = b\overline{b} = 1$. Поэтому

$$z = \frac{a(\overline{m}-\overline{b}) - b(\overline{m}-\overline{a})}{2(\overline{a}-\overline{b})} + \frac{m}{2} = \frac{\overline{a}b - a\overline{b}}{2(\overline{a}-\overline{b})} + \overline{m}\cdot\frac{a-b}{2(\overline{a}-\overline{b})} + \frac{m}{2} =$$
$$= \frac{a+b}{2} - \overline{m}\cdot\frac{ab}{2} + \frac{m}{2} = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\overline{m})$$

b. Так как $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, то воспользуемся три раза предыдущим пунктом для точки D с отрезками AC, BC и для точки C с отрезком AB

$$\begin{cases} m = \frac{1}{2}(a+c+d-ac\overline{d}) \\ n = \frac{1}{2}(b+c+d-bc\overline{d}) \\ d = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c}) \end{cases} \implies$$

$$\implies m-n = \frac{1}{2}(a+c+d-ac\overline{d}) - \frac{1}{2}(b+c+d-bc\overline{d}) = \frac{1}{2}(a-b)(1-c\overline{d}) =$$
$$= \frac{(a-b)}{4}(2 - c(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) + \overline{a}\overline{b}cc) = \frac{(a-b)}{4}\frac{(ab - cab(\overline{a}+\overline{b}) + cc)}{ab} = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{4ab}$$

c. Так как $|a| = |b| = 1$, то

$$|m-n| = \frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{4|a|\cdot|b|} = \frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{4}$$

Это выражение симметрично относительно a, b и c, поэтому длина MN не зависит от выбора высоты треугольника.

Дополнительные критерии оценки:

- Отсутствуют.

3.2 Задачи по математике (9 класс)

Задача 3.2.1 (33 балла)

Условие:

На складе детали упакованы в ящики по 17 или 20 штук.

a. **(3 балла)** Может ли робот-погрузчик загрузить 299 деталей, не вскрывая ящики?
b. **(10 баллов)** Может ли робот-погрузчик загрузить 263 детали, не вскрывая ящики?
c. **(20 баллов)** Какое наибольшее количество деталей робот-погрузчик не сможет загрузить, не вскрывая ящики?

Решение:

a. Да, может. 9·20+7·17=299. Сперва заметим, что 6·20-7·17=1 и 15·20=300. В последнем равенстве 6 ящиков по 20 деталей заменим на 7 ящиков по 17 деталей и общее количество деталей уменьшится на 1. (Если пример получен, то необязательно объяснять как именно.)
b. Нет. Пусть робот-погрузчик загрузит x ящиков по 20 деталей и y ящиков по 17. Тогда общее количество загруженных деталей c удовлетворяет равенству
$$20x + 17y = c.(*)$$
Представим c в виде $20 \cdot (6c) + 17 \cdot (-7c)$ и подставим в уравнение
$$20x + 17y = 20 \cdot (6c) + 17 \cdot (-7c);$$
$$20 \cdot (x - 6c) + 17 \cdot (y + 7c) = 0;$$
$$\begin{cases} x - 6c = -17n, \\ y + 7c = 20n, \ n \in; \end{cases}$$
откуда получим все решения (*) в целых числах
$$\begin{cases} x = 6c - 17n, \\ y = 20n - 7c, \ n \in; \end{cases}$$
Но по определению переменные x и y принимают только неотрицательные значения. Поэтому $6c - 17n \geq 0$ и $20n - 7c \geq 0$, что равносильно в свою очередь $\frac{7c}{20} \leq n \leq \frac{6c}{17}$. При c=263 в промежутке
$$92 < \frac{7 \cdot 263}{20} \leq n \leq \frac{6 \cdot 263}{17} < 93$$
целых значений n нет.
c. 303 детали получить нельзя, т.к. в промежутке
$$106 < \frac{7 \cdot 303}{20} \leq n \leq \frac{6 \cdot 303}{17} < 107$$
целых значений n нет. При $c \geq 340$ длина указанного промежутка
$$\frac{6c}{17} - \frac{7c}{20} = \frac{c}{340} \geq 1,$$
поэтому промежуток содержит целое число и найдется решение уравнения (*) в неотрицательных числах. 304=20·5+17·12, меняя ящик с 17-ю деталями на ящик с 20-ю деталями 12 раз получаем распределение по ящикам для 307, 310, 313, 316, 319, 322, 325, 328, 331, 334, 337, 340 деталей. 305=20·11+17·5, из которого легко получаем 308, 311, 314, 317, 320 деталей заменой меньшего ящика большим. 323=17·19, из которого получаем 326, 329, 332, 335, 338 деталей. 306=17·18, откуда получаем кратные трем количество деталей до 20·18=360.

Следовательно, любое количество деталей, большее 303, можно загрузить ящиками по 17 и 20 деталей.

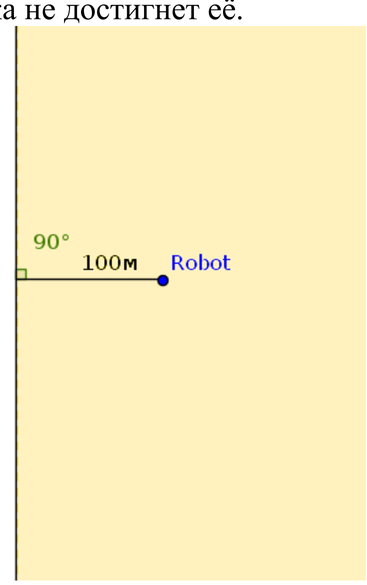
Дополнительные критерии оценки:

- За задачу (b) может быть начислено 10 баллов, если обоснование ответа построено только на базе последней цифры числа 263.

Задача 3.2.2 (33 балла)

Условие:

Робот находится в поле пшеницы. В памяти сохранилось, что расстояние до границы 100 метров, но направление потеряно. Считать, что поле представляет собой полуплоскость, т.е. ресурса батареи не хватит выйти из поля в другом направлении, и робот не "увидит" границу поля, пока не достигнет её.

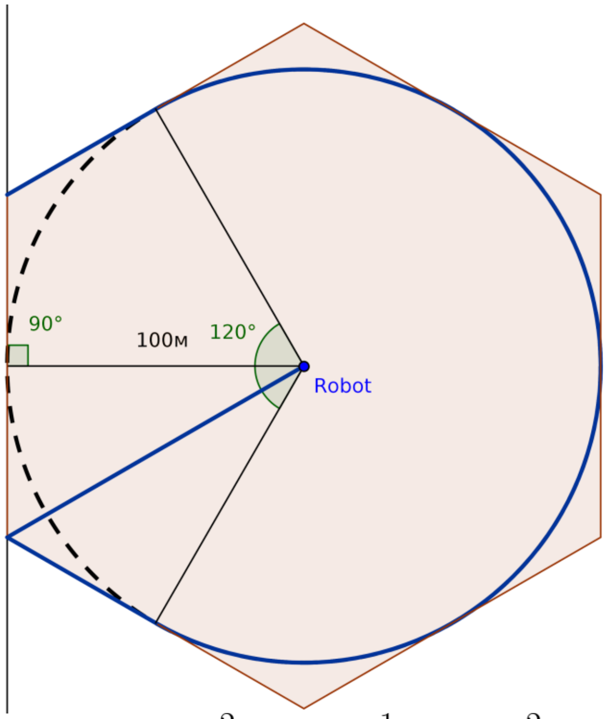


a. **(3 балла)** Существует ли траектория движения робота, которая позволяет выйти из поля, пройдя не более 800 метров;
b. **(13 баллов)** Существует ли траектория движения робота, которая позволяет выйти из поля, пройдя не более 700 метров;
c. **(17 баллов)** Существует ли траектория движения робота, которая позволяет выйти из поля, пройдя не более 650 метров.

Решение:

Граница поля является касательной к окружности с центром в точке нахождения робота и радиусом 100 метров. Поэтому достаточно придумать траекторию, которая пересекает все касательные к этой окружности. Достаточно двигаться по периметру многоугольника, описанного вокруг окружности. Меняя количество сторон, можем оптимизировать траекторию.

Во всех пунктах ответ утвердительный. Причем решение пункта в) подходит и для первых двух. Поэтому приведем путь короче 650 метров, которая обязательно выведет робота к границе поля.



Длина синей траектории равна $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 100 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 100 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 100,$ что меньше 650.

Дополнительные критерии оценки

- За задачу (а) может быть начислен 1 баллов, если приведен пример траектории без обоснования.

Задача 3.2.3 (34 балла)

Условие:

a. **(6 баллов)** Какое преобразование будет результатом последовательного применения трех осевых симметрий относительно биссектрис треугольника ABC?

b. **(12 баллов)** Через центр O окружности проведены три прямые. При помощи циркуля и линейки построить описанный около окружности треугольник, вершины которого лежат на этих прямых.

c. **(16 баллов)** Через центр O окружности проведены 2017 прямых. Как построить описанный около окружности 2017-угольник, вершины которого лежат на этих прямых?

Решение:

a. Пусть O - центр вписанной окружности треугольника ABC, OD - высота, опущенная на AC. Рассмотрим композицию $F=S_{CO}\circ S_{BO}\circ S_{AO}$ трех осевых симметрий относительно биссектрис углов A, B, C в указанном порядке. Это преобразование является движением, меняет ориентацию треугольника ABC, оставляет на месте точки O и D, переводит в себя вписанную окружность и прямую AC. Нетрудно проверить, что F является осевой симметрией относительно прямой OD. Действительно, движение задается тремя точками, и если две из них переходят в себя (O и D), то третья перейдет в себя или в симметричную точку (относительно OD), т.к. расстояния сохраняются. В первом случае сохраняется ориентация (тождественное преобразование), во втором меняется (осевая симметрия).

b. Прямые AO, BO и CO нам известны, необходимо выяснить местоположение самих точек A, B и C. Применяя преобразование F к некоторой точке X получим точку Y, серединный перпендикуляр отрезка XY есть прямая OD в обозначениях предыдущего пункта. Касательная к окружности, перпендикулярная OD, пересекает прямые AO и CO в точках A и C соответственно. Вершина B восстанавливается элементарно. Задача имеет два решения, так как существуют две касательные к окружности, перпендикулярные OD.

c. Композиция нечетного количества осевых симметрий относительно прямых с общей точкой является осевой симметрией относительно прямой, проходящей через ту же точку. Доказательство по индукции.
Обозначим $A_1A_2...A_{2017}$ искомый 2017-угольник. Композиция 2017 осевых симметрий относительно прямых A_1O, A_2O, ..., $A_{2017}O$ переведет прямую A_1A_{2017} в себя, следовательно, ось симметрии соответствующей этой композиции перпендикулярна прямой A_1A_{2017}, её можно восстановить по образу и прообразу некоторой точки. Берем произвольную точку X_0, применяем симметрии

$$S_{A_kO}(X_{k-1} = X_k,\ 1 \leq k \leq 2017,$$

строим серединный перпендикуляр к X_0X_{2017}, в точке пересечения этой прямой с окружностью строим касательную, она и есть прямая A_1A_{2017}. Остальные стороны 2017-угольника получаем последовательно отражая симметрично предыдущую сторону относительно биссектрисы угла при этой стороне. Задача имеет два решения.

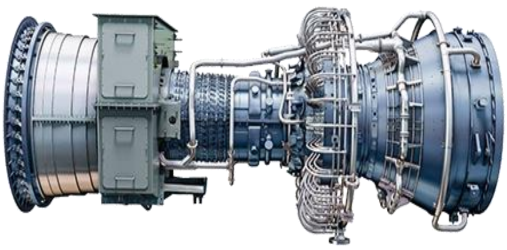
Дополнительные критерии оценки:

- Отсутствуют.

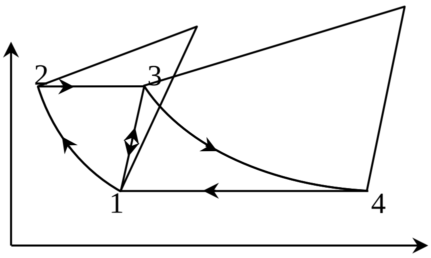
3.3 Задачи по физике (10-11 класс)

Задача 3.3.1. (30 баллов)

Условие:



Для превращения выделяющейся в ядерном реакторе тепловой энергии в электрическую в ряде конструкций АЭС используют газотурбинные двигатели, работающие по циклу Брайтона, который состоит из двух адиабат (1-2 и 3-4) и двух изобар (2-3 и 4-1) (см. рисунок). Найдите термодинамический КПД η цикла Брайтона 1-2-3-4-1, если известно, что давление газа в течение цикла меняется в n раз, а объем – в m раз. Найдите также термодинамический КПД η_1 цикла 1-2-3-1, если КПД цикла 1-3-4-1 равен η_2. Рабочее тело цикла – одноатомный идеальный газ.



Указание. В адиабатическом процессе давление и объем одноатомного идеального газа связаны соотношением: $pV^k = const$, где показатель степени k (показатель адиабаты) для одноатомного идеального газа равен: $k = 5/3$.

Решение:

Найдем КПД цикла Брайтона по заданным изменениям давления и объема газа. Пусть объем газа в состоянии 1 равен V_1, в состоянии 4 - V_4, давление в состояниях 1 и 4 - p, в состояниях 2 и 3 - np (n - изменение давления в течение цикла). Тогда объемы газа в состояниях 2 и 3 можно найти из уравнений адиабаты

$$npV_2^k = pV_1^k \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \frac{V_1}{n^{1/k}},$$

$$npV_3^k = pV_4^k \qquad \Rightarrow \qquad V_3 = \frac{V_4}{n^{1/k}}$$

Отсюда находим количества теплоты, полученное в процессе 2-3 (Q_{2-3}) и отданное в процессе 4-1 (Q_{4-1}):

$$Q_{2-3} = \frac{5}{2}np\left(V_3 - V_2\right) = \frac{5}{2}n^{\frac{k-1}{k}}p\left(V_4 - V_1\right), \quad Q_{4-1} = \frac{5}{2}p\left(V_4 - V_1\right)$$

А поскольку процессы 1-2 и 3-4 адиабатические, в цикле 1-2-3-4-1 газ получал теплоту только в процессе 2-3 и отдавал – в процессе 4-1: $Q_н = Q_{2-3}$, $Q_х = Q_{4-1}$. Поэтому

$$\eta = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = 1 - \frac{1}{n^{0,4}}$$

Из этой формулы следует, что КПД цикла Брайтона не зависит от изменения объема в цикле, а определяется только изменением давления и показателем адиабаты газа, который для одноатомного газа равен 5/3.

Рассмотрим теперь второй вопрос задачи и установим связь между КПД циклов 1-2-3-4-1, 1-2-3-1 и 1-3-4-1. Пусть в процессе 1-3 газ получает количество теплоты Q_0. Очевидно, в процессе 3-1 газ отдает такое же количество теплоты. А поскольку процесс 1-2 – адиабатический, в цикле 1-2-3-1 газ получает от нагревателя количество теплоты $Q_н = Q_{2-3}$, а отдает холодильнику - $Q_x = Q_0$. Поэтому

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_0}{Q_{2-3}} \qquad (*)$$

Аналогично

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{4-1}}{Q_0} \qquad (**)$$

Выражая из формулы (*) количество теплоты Q_{2-3}, а из формулы (**) - Q_{4-1}, получим для КПД цикла 1-2-3-4-1

$$\eta = 1 - \frac{Q_{4-1}}{Q_{2-3}} = 1 - \left(1-\eta_1\right)\left(1-\eta_2\right)$$

Отсюда

$$\eta_1 = 1 - \frac{1-\eta}{1-\eta_2} = 1 - \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}\left(1-\eta_2\right)} = 1 - \frac{1}{n^{0,4}\left(1-\eta_2\right)}$$

Критерии оценки:

5 баллов – Верно произведена оценка количества теплоты, полученное в процессе 2-3 и отданное в процессе;

10 баллов – Определен КПД цикла Брайтона;

10 баллов – Получено выражение для КПД цикла 1-2-3-4-1 через η_1 и η_2;

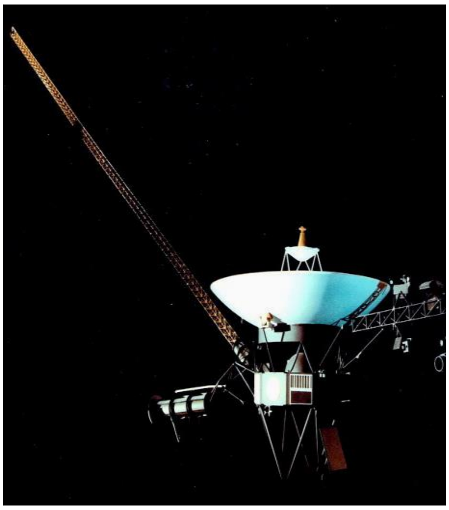
5 баллов – Получено выражение для η_1.

За выполнение всех пунктов - 30 баллов

Задача 3.3.2 (30 баллов)

Условие:

Космический спутник использует в качестве источника энергии тепло, получаемое в результате α-распада изотопа плутония-238 (период полураспада $T_{1/2}$ =87,7 лет). Коэффициент полезного действия преобразования тепловой энергии в электрическую η=8%. На борту такого спутника установлена аппаратура, потребляющая $W_{эл}$=230 Вт электрической мощности. Определите в течение какого времени источник энергии сможет обеспечивать аппаратуру электричеством, если известно, что на момент запуска спутника в нем содержалось m=5,14 кг плутония-238. За один акт распада топлива выделяется E_α = 5,6 МэВ энергии.



Космический аппарат «Вояджер» с радиоизотопными термоэлектрическими генераторами (топливо – плутоний 238)

Указание

Выделяемая в результате ядерной реакции тепловая мощность в момент времени *t* определяется выражением:

$W_{тепл}(t) = \lambda \cdot N(t) \cdot E_\alpha$, где $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ - постоянная распада, $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ - число атомов делящегося изотопа в момент времени *t*, N_0 - начальное число атомов.

Справочные данные: 1 эВ = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж, число Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

Решение:

Время работы спутника *t* определяется равенством выделяемой электроэнергии от источника и затрачиваемой аппаратурой:

$$W_{тепл}(t) \cdot \eta = W_{эл}$$

$$W_{эл} = \lambda \cdot N(t) \cdot E_\alpha \cdot \eta = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot E_\alpha \cdot \eta$$

Откуда:

$$e^{\lambda t} = \frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{эл}}$$

$$\lambda t = \ln\left(\frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{эл}}\right)$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda \cdot N_0 \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{эл}}\right)$$

Начальное число атомов:

$$N_0 = \frac{m \cdot N_A}{M}$$

В итоге:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln 2 \cdot m \cdot N_A \cdot E_\alpha \cdot \eta}{W_{эл} \cdot T_{1/2} \cdot M}\right) =$$

$$= \frac{87,7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln 2 \cdot 5.14 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 5,6 \cdot 10^{6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,08}{230 \cdot 87,7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 6 \cdot 238 \cdot 10^{-3}}\right) =$$

$$= 62624197 сек \approx 2 года$$

Критерии оценки:

5 баллов – Верно описана связь между тепловой мощность в момент *t* и потребляемой электрической;
15 баллов – Получено выражение для времени работы спутника от начального числа атомов;
5 баллов – Указана формула связи начальной массы топлива и числа атомов;
5 баллов – Верно произведен численный расчет времени работы спутника.
За выполнение всех пунктов - 30 баллов

Задача 3.3.3 (20 баллов)

Условие:

Коэффициент полезного действия термодинамического цикла АЭС может существенно меняться в течение календарного года. Отвод тепла осуществляется с помощью охладительных башен – градирен, процесс охлаждения воды в которых происходит за счёт испарения при стекании её тонкой плёнкой или каплями по специальному оросителю, вдоль которого в противоположном движению воды направлении подаётся поток воздуха. Чем выше температура воздуха в окружающей среде, тем при более высокой температуре отводится тепло в термодинамическом цикле АЭС.

Градирни Нововоронежской АЭС - 2 – самые высокие градирни среди всех АЭС и ТЭС в стране (171 м).

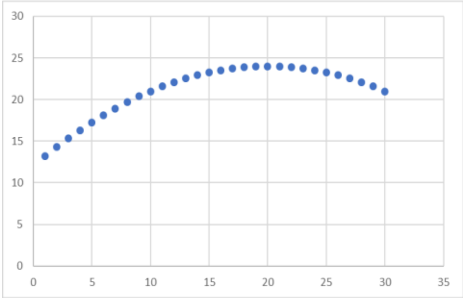
Известно, что температура воздуха (в градусах Цельсия) в течение месяца менялась по закону $T_{возд} = -0,03t^2 + 1,2t$, где $t \in [1,30]$ - число прошедших дней. Предполагая, что температура рабочего тела на «холодном» участке термодинамического цикла всегда больше температуры воздуха на 12 градусов, а горячая температура в цикле постоянна и равна 280°С, определите в какие по счету дни месяца к.п.д. АЭС было максимальным и минимальным. Проведите расчет максимального и минимального к.п.д., исходя из предположения, что термодинамический цикл АЭС – идеальный цикл Карно.

Решение:

Формулу для к.п.д цикла Карно, используя температуры на горячем и холодном участке цикла, можно записать следующим образом:

$$\eta = 1 - \frac{T_x}{T_г}$$

Температура на холодном участки меняется во времени по закону:



$T_x = T_{возд} + 12 = -0,03t^2 + 1,2t + 12$ (*)

График изменения температуры на холодном участке – парабола с ветвями, направленными вниз.

Координата вершины параболы (день с максимальной температурой и минимальным к.п.д)

$t_{\min} = \frac{-1,2}{2\cdot(-0,03)} = 20$ день.

$T_{x,\max} = -0,03t_{\min}^2 + 1,2t_{\min} + 12 = 24^o C = 297K$

$\eta_{\min} = 1 - \frac{T_{x,\max}}{T_г} = 1 - \frac{297K}{653K} \approx 0,545 = 54,5\%$

Вершина параболы располагается на отрезке [1,30], следовательно, минимальное значение температуры на холодном участке будет на одном из концов отрезка:

$T_{x,\mathrm{t=1}} \approx 13^o C$

$T_{x,\mathrm{t=30}} \approx 21^o C$

Минимальное значение достигается на левой ветви параболы:

$t_{\max} = 1$ день, $T_{x,\min} \approx 13^o C = 286K$

$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{x,\min}}{T_г} = 1 - \frac{286K}{653K} \approx 0,562 = 56,2\%$

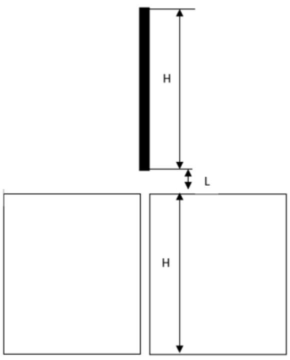
Критерии оценки:

3.5 баллов – Записана формула к.п.д. цикла Карно;
5 баллов – Определено, что зависимость температуры от времени – парабола;
5 баллов – Верно определена максимальная температура и минимальный к.п.д.;
5 баллов – Верно определена минимальная температура и максимальный к.п.д.
За выполнение всех пунктов - 20 баллов

Задача 3.3.4 (20 баллов)

Условие:

В случае аварийной ситуации в ядерном реакторе цепная реакция деления останавливается путем сброса в активную зону реактора аварийного стержня, способного поглощать нейтроны. Рассчитайте время падения стержня массой m = 10 кг и длиной H = 7м, изображенного на рисунке, если известно, что он находится на расстоянии L = 5см над емкостью высотой H, заполненной водой. Окончание падения считать полное погружение стержня в емкость. Силой сопротивления воздуха пренебречь, сила сопротивления воды постоянна и равна F=95Н



Решение:

Разобьем весь путь на два участка: первый - длиной L и второй - длиной H

Рассмотрим время движения на участке длиной L.

$L = \frac{gt_1^2}{2} \to t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$

Начальная скорость движения стержня на втором участке:

$$v_{02} = gt_1 = \sqrt{2gL}$$

Рассмотрим силы, действующие на стержень при погружении в воду:

$$ma_2 = mg - F \rightarrow a_2 = \frac{mg - F}{m}$$

Рассмотрим движение на втором участке:

$$H = v_{02}t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}$$

$$H = \sqrt{2gL} \cdot t_2 + \frac{mg - F}{2m} \cdot t_2^2$$

Откуда:

$$\frac{mg - F}{2m} \cdot t_2^2 + \sqrt{2gL} \cdot t_2 - H = 0$$

$$D = 2gl + 4H\frac{mg - F}{2m} > 0$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{2gL} \pm \sqrt{2gl + 2H\frac{mg - F}{m}}}{\frac{mg - F}{m}}$$

$$t_2 = \frac{m(\sqrt{2gl + 2H\frac{mg - F}{m}} - \sqrt{2gL})}{mg - F}$$

Общее время движения:

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \frac{m(\sqrt{2gL + 2H\frac{mg - F}{m}} - \sqrt{2gL})}{mg - F} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05}{9,81}} + \frac{10(\sqrt{2 \cdot 0,05 \cdot 9,81 + 2 \cdot 7 \cdot \frac{10 \cdot 9,81 - 95}{10}} - \sqrt{2 \cdot 0,05 \cdot 9,81})}{10 \cdot 9,81 - 95} \approx 5,24c$$

Критерии оценки:

5 баллов – Произведен расчет времени движения на первом участке t_1;
5 баллов – Получено выражение для ускорения стержня на втором участке;
5 баллов – Получено выражение для времени движения на втором участке t_2;
5 баллов – Верно произведен численный расчет времени падения стержня t.
За выполнение всех пунктов - 20 баллов

3.4 Задачи по физике (9 класс)

Задача 3.4.1 (20 баллов)

Условие:

В большинстве электрических станций для получения электричества требуется превратить тепловую энергию топлива (получаемую при сгорании угля, газа или при распаде ядерного материала) в механическую энергию вращения электрогенератора, вырабатывающего ток. В качестве промежуточного звена такой последовательности передачи энергии используется такой элемент оборудования, как парогенератор – устройство для передачи тепла воде с ее последующим испарением.

Известно, что в парогенератор АЭС за t секунд поступает m килограмм воды при давлении P и температуре T_0, которая полностью превращается в пар перед выходом из устройства. Определите мощность парогенератора Q, если известно, что значение температуры T_0 ниже температуры кипения воды при заданном давлении на 5%. Теплоемкость воды C и постоянную парообразования r считать заданными и не зависящими от температуры.

Решение:

Разделим процесс передачи энергии к воде на два участка: 1 – подогрев воды от температуры T_0 до температуры кипения $T_{кип} = \dfrac{T_0}{0,95}$; 2 – участок испарения воды.

Мощность, затрачиваемая на подогрев воды на первом участке, описывается формулой:

$$Q_1 = \frac{m}{t} \cdot C \cdot (T_{кип} - T_0) = \frac{m}{t} \cdot C \cdot (\frac{T_0}{0,95} - T_0) = \frac{1}{19} \cdot \frac{m}{t} \cdot C \cdot T_0$$

Мощность, затрачиваемая на полное испарение воды массой m:

$$Q_2 = \frac{m}{t} \cdot r$$

Мощность парогенератора:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{m}{t}(\frac{1}{19} C T_0 + r)$$

Электрическая мощность лампочки:

$$Q = UI$$

Приравнивая получившееся выражения для мощности к выражению для закона Стефана-Больцмана, получим:

$$UI = \varepsilon S \sigma T^4 \qquad (*)$$

Площадь поверхности нити:

$$S = \pi d l \qquad (**)$$

Подставим (**) в (*):

$UI = \varepsilon\pi dl\sigma T^4$

Откуда:

$$T^4 = \frac{UI}{\varepsilon\pi dl\sigma}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\varepsilon\pi dl\sigma}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{220\cdot 0,25}{0,3\cdot\pi\cdot 0,2\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 5,67\cdot 10^{-8}}} = \sqrt[4]{102,9\cdot 10^{12}} = 3185 \quad = 2912^o$$

Критерии оценки:

5 баллов – Получена формула для расчета температуры кипения;
10 баллов – Получено выражение для расчета мощности на первом участке;
5 баллов – Получено выражение для расчета полной мощности парогенератора.
За выполнение всех пунктов - 20 баллов

Задача 3.4.2 (20 баллов)

Условие:

Электрическая лампочка подключена к сети с напряжением 220 В и током 0,25 А. Диаметр вольфрамовой спирали лампочки 0,2 мм, длина спирали – 5 см. Найти температуру спирали, считая, что все выделяемое тепло передается излучением.

Указание. Количество энергии, передаваемой излучением в единицу времени, описывается уравнением Стефана-Больцмана: $Q = \varepsilon S\sigma T^4$, где ε - степень черноты поверхности тела (для вольфрамовой нити $\varepsilon = 0,3$), S – площадь поверхности тела, $\sigma = 5,67\cdot 10^{-8}\,\frac{Вт}{м^2K^4}$ - постоянная Стефана-Больцмана.

Решение:

Электрическая мощность лампочки:

$Q = UI$

Приравнивая получившееся выражения для мощности к выражению для закона Стефана-Больцмана, получим:

$UI = \varepsilon S\sigma T^4$ (*)

Площадь поверхности нити:

$S = \pi dl$ (**)

Подставим (**) в (*):

$UI = \varepsilon\pi dl\sigma T^4$

Откуда:

$$T^4 = \frac{UI}{\varepsilon\pi dl\sigma}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\varepsilon\pi dl\sigma}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{220\cdot 0,25}{0,3\cdot \pi \cdot 0,2\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 5,67\cdot 10^{-8}}} = \sqrt[4]{102,9\cdot 10^{12}} = 3185 \quad = 2912^{o}$$

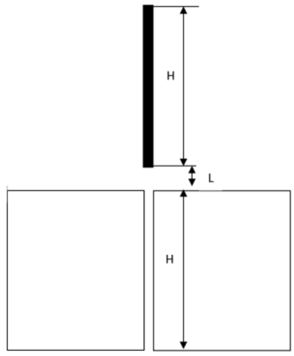
Критерии оценки:

5 баллов – Записано выражение для электрической мощности лампочки;
5 баллов – Записано выражение для площади поверхности нити;
5 баллов – Получена формула для расчета температуры;
5 баллов – Произведен численный расчет температуры.

Задача 3.4.3 (30 баллов)

Условие:

В случае аварийной ситуации в ядерном реакторе цепная реакция деления останавливается путем сброса в активную зону реактора аварийного стержня, способного поглощать нейтроны.
Рассчитайте время падения стержня массой m = 10 кг и длиной H = 7м, изображенного на рисунке, если известно, что он находится на расстоянии L = 5см над емкостью высотой H, заполненной водой. Окончание падения считать полное погружение стержня в емкость. Силой сопротивления воздуха пренебречь, сила сопротивления воды постоянна и равна F=95Н



Решение:

Разобьем весь путь на два участка: первый - длиной L и второй - длиной H
Рассмотрим время движения на участке длиной L.

$$L = \frac{gt_1^2}{2} \to t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Начальная скорость движения стержня на втором участке:

$$v_{02} = gt_1 = \sqrt{2gL}$$

Рассмотрим силы, действующие на стержень при погружении в воду:

$$ma_2 = mg - F \to a_2 = \frac{mg - F}{m}$$

Рассмотрим движение на втором участке:

$$H = v_{02}t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}$$

$$H = \sqrt{2gL}\cdot t_2 + \frac{mg - F}{2m}\cdot t_2^2$$

Откуда:

$$\frac{mg-F}{2m}\cdot t_2^2+\sqrt{2gL}\cdot t_2-H=0$$

$$D=2gl+4H\,\frac{mg-F}{2m}>0$$

$$t_2=\frac{-\sqrt{2gL}\pm\sqrt{2gl+2H\,\dfrac{mg-F}{m}}}{\dfrac{mg-F}{m}}$$

$$t_2=\frac{m(\sqrt{2gl+2H\,\dfrac{mg-F}{m}}-\sqrt{2gL})}{mg-F}$$

Общее время движения:

$$t=t_1+t_2=\sqrt{\frac{2L}{g}}+\frac{m(\sqrt{2gL+2H\,\dfrac{mg-F}{m}}-\sqrt{2gL})}{mg-F}=$$

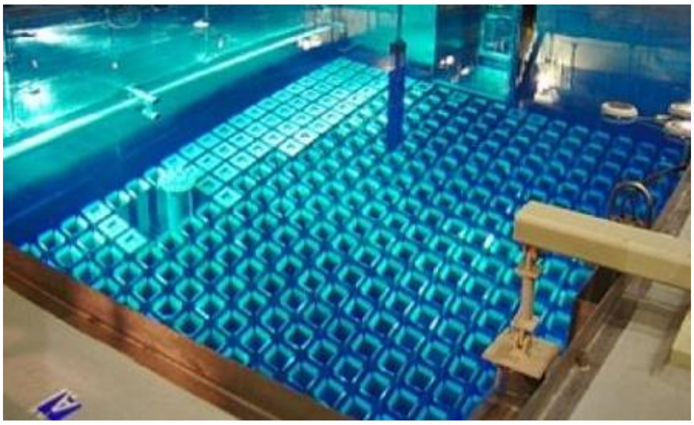
$$=\sqrt{\frac{2\cdot 0,05}{9,81}}+\frac{10(\sqrt{2\cdot 0,05\cdot 9,81+2\cdot 7\cdot\dfrac{10\cdot 9,81-95}{10}}-\sqrt{2\cdot 0,05\cdot 9,81})}{10\cdot 9,81-95}\approx 5,24c$$

Критерии оценки:

5 баллов – Произведен расчет времени движения на первом участке t_1;
10 баллов – Получено выражение для ускорения стержня на втором участке;
10 баллов – Получено выражение для времени движения на втором участке t_2;
5 баллов – Верно произведен численный расчет времени падения стержня t.
За выполнение всех пунктов - 30 баллов

Задача №4. (30 баллов)

Условие:



В ядерном реакторе разогрев теплоносителя происходит за счет передачи тепла от ядерного топлива, помещенного в специальные тепловыделяющие сборки (ТВС). Каждая такая сборка помещается в реактор на несколько лет. После завершения своего срока работы ядерное топливо все еще способно выделять большое количества теплоты. До окончательного остывания топливо хранят в специальном бассейне, заполненном m = 1000 тонн воды при атмосферном давлении и температуре T_0, которую поддерживают постоянной с помощью насосов. В случае аварийной ситуации отказа насоса одна сборка с топливом способна разогреть весь объем воды в таком бассейне на ΔT = 4 градуса за t=72 часа. За то же время 10 сборок нагрели бы весь объем воды до T_2 = 70,1 градусов Цельсия. Определите:

А) Какая начальная температура T_0 поддерживалась в бассейне?

Б) Какова мощность одной тепловыделяющей сборки?

В) За какое время 100 тепловыделяющих сборок способны довести воду в бассейне до кипения?

Указание

Теплоемкость воды считать независящей от температуры и равной 4200 Дж/(кг·К).
Мощность тепловыделяющих сборок считать неизменной во времени.

Решение:

А) Уравнение баланса для 10 ТВС

$$10Pt = Cm(T_2 - T_0)$$

$$T_0 = T_2 - \frac{10Pt}{Cm} = 30^o C$$

Б) Уравнение теплового баланса для 1 ТВС

$$Pt = Cm\Delta T$$

$$P = \frac{Cm\Delta T}{t} = 64,8$$

В) Уравнение баланса для 100 ТВС

$$100Pt_2 = Cm(T_{кип} - T_0), \mathrm{T}_{кип} = 100^o$$

$$t_2 = \frac{Cm(T_{кип} - T_0)}{100P} = 12,6$$

Критерии оценки:

10 баллов – Получено выражение для мощности ТВС;
10 баллов – Получено выражение для начальной температуры;
10 баллов – Произведен расчет времени до закипания.
За выполнение всех пунктов - 30 баллов