§3 Заключительный этап: индивидуальная часть

Заключительный этап олимпиады состоит из двух частей: индивидуальное решение задач по предметам (математика, физика) и командное решение инженерное задачи. Для каждого из параллелей (9 класс или 10-11 класс) предлагается свой набор задач по физике, задачи по математике общие для всех участников. На индивидуальное решение задач дается по 2 часа на один предмет. Решение каждой задачи дает от 0 до указанного количества баллов (см. критерии оценки). Участники получают оценку за решение задач в совокупности по всем предметам данного профиля (математика и физика) — суммарно от 0 до 24 баллов.

3.1. Задачи по математике (9 класс и 10-11 класс)

Задача 3.1.1 (4 балла)

Мощность всех буровых установок на арктическом месторождении составляет 8 МВт. Для энергоснабжения буровых установок можно использовать газовые контейнерные мини-ТЭЦ с регулируемой мощностью. Максимальная мощность, которую может развить одна мини-ТЭЦ, составляет 8 МВт. Зависимость расхода топлива за час работы Y ($м^3$/ч) от мощности X (МВт) одной мини-ТЭЦ определяется по формуле

$$Y=0,4X^3-4,5X^2+15X$$

Если используется несколько мини-ТЭЦ, их мощности могут быть только равными для всех мини-ТЭЦ. Все мини-ТЭЦ работают на постоянной мощности в течение года без перерывов. Цена топлива для мини-ТЭЦ составляет 30 рублей за 1 $м^3$, стоимость одной мини-ТЭЦ составляет 1 миллион рублей.

Считая, что в году 365 дней, определите, сколько мини-ТЭЦ нужно использовать для энергоснабжения буровых установок и на какой мощности X они должны работать, чтобы затраты в течение года на энергоснабжение (т.е. на покупку мини-ТЭЦ и закупку топлива) были минимальными.

РЕШЕНИЕ:

Общие затраты F (руб.) в течение года составляют:

$$F=1000000\cdot m+30\cdot 24\cdot 365\cdot mY$$

где m – количество мини-ТЭЦ. Эти затраты зависят от двух переменных – расхода топлива, который зависит от выбранной мощности, и количества мини-ТЭЦ. Но очевидно, что общие затраты очень быстро растут с увеличением количества мини-ТЭЦ, и этот рост не будет компенсироваться снижением затрат на топливо за счет снижения его расхода при работе на мощности, меньше максимальной.

По этой причине достаточно рассмотреть отдельно несколько вариантов: с одной мини-ТЭЦ, с двумя мини-ТЭЦ, с тремя мини-ТЭЦ. После рассмотрения этих вариантов решить, нужно ли рассматривать дальнейшие варианты.

Вариант с одной мини-ТЭЦ в силу того, что ее мощность равна мощности потребителей, предполагает работу на максимальной мощности.

Другие варианты позволяют регулировать мощность мини-ТЭЦ, тем самым снижая расход топлива.

Определим для рассмотрения вариантов, при какой мощности достигается минимальный расход топлива на мини-ТЭЦ.

Найдем первую производную функции Y(X):

$$Y' = 1{,}2X^2 - 9X + 15$$

приравняем ее к нулю, решим полученное квадратное уравнение. В результате получим значения X = 2,5 МВт и X = 5 МВт, при которых производная равна нулю. Методом интервалов определим, что функция Y(X) возрастает на промежутке $(-\infty; 2{,}5] \cup [5; +\infty)$ и убывает на промежутке [2,5; 5]. Таким образом, точка минимума – X = 5 МВт, при этой мощности расход топлива Y (2,5 МВт) = 15,625 м^3/ч. Расход топлива при максимальной мощности мини-ТЭЦ Y (8 МВт) = 36,8 м^3/ч.

Теперь рассчитаем общие затраты за год в каждом из вариантов:

1. При использовании одной мини-ТЭЦ и работе на максимальной мощности затраты составят 10 671 040 рублей.
2. При использовании двух мини-ТЭЦ и работе на мощности 5 МВт каждая затраты составят 8 570 000 рублей.
3. При использовании трех мини-ТЭЦ и работе на мощности 5 МВт каждая затраты составят 15 318 750 рублей.

Ответ: Для энергоснабжения нужно использовать две мини-ТЭЦ, мощность установить в 5 МВт.

Примечание: есть еще один вариант решения: две мини-ТЭЦ с мощностью по 4 МВт. Это решение в предположении, что условие равенства общей мощности всех мини-ТЭЦ и мощности потребителей должно соблюдаться. В этом варианте все равно нужно, чтобы в решении был найден минимум функции расхода топлива, но тогда стоимость всего энергоснабжения составит 9 148 160 рублей.

Критерии оценки:

- полностью решенная задача - 4 балла
- задача решена в условиях постоянного расхода мощности - 4 балла
- задача верно решена, минимальность не доказана - 3 балла
- верно найдена оптимальная мощность, далее задача не решена - 2 балла

Задача 3.1.2 (4 балла)

Вдоль дороги стоит 10 фонарей. Если перегорел один из них, а соседние светят, то дорожная служба не беспокоится. Но если перегорают два фонаря, стоящих подряд, то дорожная служба сразу меняет все перегоревшие фонари. Каждый фонарь перегорает независимо от других.

Найдите вероятность того, что при очередной замене придется поменять ровно 5 фонарей.

РЕШЕНИЕ:

Решать задачу будем в общем случае. Заменим горящий фонарь единицей, а перегоревший – нулём. Тогда сначала мы имеем ряд из n единиц, которые последовательно и в случайном порядке превращаются в нули.

а) После первого превращения два нуля подряд получиться не могут. Найдём вероятность того, что после k превращений ряд не имеет двух нулей подряд. Такой ряд назовём *правильным*. Количество правильных рядов длины n с ровно k нулями равно C_{n-k+1}^{k}.

Заметим, что в ходе превращений k нулей могут возникнуть в любом порядке, и всего таких порядков $k!$. Значит, всего существует $C_{n-k+1}^{k} \cdot k!$ способов получить из начального ряда единиц какой-нибудь правильный ряд с k нулями. С другой стороны, общее число рядов длины n с k нулями равно C_n^k, и, значит, всего существует $C_n^k k!$ способов получить какой-нибудь ряд с k нулями последовательными превращениями единиц в нули.

Все эти способы равновозможны, поэтому вероятность p_k того, что после k превращений получившийся ряд будет правильным, равна $\frac{C_{n-k+1}^{k}}{C_n^k}$. Теперь найдём вероятность p_k того, что два нуля подряд появятся ровно после k превращений. Для этого нужно вычесть из вероятности получить правильный ряд с $k-1$ нулём вероятность получить правильный ряд с k нулями. Таким образом,

$$p_k = r_{k-1} - r_k = \frac{C_{n-k+2}^{k-1}}{C_n^{k-1}} - \frac{C_{n-k+1}^{k}}{C_n^{k}}.$$

Для n = 10, k = 5 получаем: p=1/7

Ответ: 1/7

Критерии оценки:

- верно подсчитана вероятность - 4 балла
- общих ход решения верный, но допущены арифметические ошибки - 3 балла

Задача 3.1.3 (4 балла)

Найдите все значения параметра *a*, при которых решением неравенства

$x^2-(a^2+1)x+2a^2-2\le 0$

является отрезок, принадлежащий множеству решений неравенства

$x^2-(a+6)x+5a+5\ge 0$

РЕШЕНИЕ:

Решим неравенство $x^2-(a^2+1)x+2a^2-2\le 0$

При $a^2<3$ решением будет $[a^2-1;2]$, при $a^2>3$ решением будет $[2;a^2-1]$, при $a^2=3$ решением будет 2 (что не является отрезком).

Теперь решим неравенство $x^2-(a+6)x+5a+5\ge 0$

При $a<4$ решением будет $(-\infty;a+1]\cup[5;+\infty)$, при $a>4$ решением будет $(-\infty;5]\cup[a+1;+\infty)$, при $a=4$ решением будет любое действительное число.

Теперь посмотрим, при каких значениях параметра отрезок решений первого неравенства принадлежит множеству решений второго.

1) $a<-\sqrt{3}$ Должно быть выполнено неравенство $a^2-1\le a+1$, то есть $-1\le a\le 2$. Значит в этом случае система несовместна
2) $-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$ Должно быть выполнено неравенство $a+1\ge 2$. Решая систему получаем $1\le a<\sqrt{3}$.
3) $\sqrt{3}<a<4$ Должно быть выполнено неравенство $a^2-1\le a+1$, то есть $-1\le a\le 2$. Решая систему получаем $\sqrt{3}<a\le 2$
4) $a=4$ Подходит под условие задачи
5) $a>4$ Должно быть выполнено неравенство $a^2-1\le 5$. В этом случае система несовместна.

Ответ: $[1;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};2]\cup\{4\}$

Критерии оценки:

- полное решение - 4 балла
- в ответе не выколоты две точки - 4 балла
- верно решены неравенства - 2 балла
- верно решены уравнения - 1 балл
- верная идея решения, но ошибки - 1 балл

3.2. Задачи по физике (9 класс)

Задача 3.2.1 (3 балла)

От электростанции требуется передать в город по двухпроводной линии мощность в 100кВт. Напряжение высоковольтной линии должно быть 10кВ, а потери напряжения в проводах не должны превышать 1%. Какую минимальную массу медного провода нужно взять, если расстояние от электростанции до города 10 км? Удельное сопротивление меди равно $1{,}72\cdot10^{-8}$ Ом·м, плотность меди равна 8,92г/см^3.

РЕШЕНИЕ:

Высоковольтные линии нужны для того, чтобы снизить потери при передаче электроэнергии.

Пусть коэффициент потери $\alpha = \frac{I^2R}{N_0}$, т.е. отношению мощности теряемой на проводах к полезной мощности. При этом $I = \frac{N_0}{U_0}$, т.е. отношению номинальной мощности к номинальному напряжению. Тогда $\alpha = \frac{N_0R}{U_0^2}$.

Вычислим сопротивление провода $R = \frac{\alpha U^2}{N_0} = 10$ Ом. С другой стороны $R = \frac{\rho 2L}{S}$, отсюда сечение провода $S = \frac{\rho 2L}{R} = 34.4$ мм^2. Тогда масса меди равна $m = 2\phi SL$, где ϕ - плотность меди, а сечение переведено в м^2. Масса меди оказывается равна 6137кг.

Критерии оценки:

- Получено выражение для электрической мощности - 1 балл

- Получено выражение для сопротивления - 1 балл.
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Задача 3.2.2 (3 балла)

Тепловая мощность, выделяющаяся на проводе линейно зависит от разности температур между спиралью и воздухом с коэффициентом пропорциональности $\varkappa$ = 2Вт/˚С, сопротивление провода тоже зависит от разности температур по закону вида $R = R_0(1+\alpha(T-T_0))$, где R_0 - сопротивление при комнатной температуре T_0 = 20˚С. До какой температуры нагреется провод с сопротивлением при комнатной температуре R_0 = 1,5 Ом, при пропускании через него тока I = 20А, если его коэффициент теплового расширения равен α = 4,3 ·10^{-3}1/˚С.

РЕШЕНИЕ:

Электрическая мощность $W = I^2 R_0(1+\alpha(T-T_0))$, тепловая мощность $N = \chi(T-T_0)$

Если провод нагревается постепенно, то W = N. Отсюда:

$$(T-T_0) = \frac{I^2 R_0}{\chi - \alpha I^2 R_0}$$

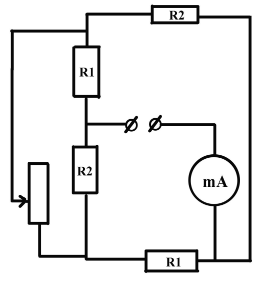
Однако, оказывается, что эта величина равна $(T-T_0) = -1034$ К.

Так получается из-за того, что $\chi - \alpha I^2 R_0$ = - 0,58 < 0, это означает, что у тепловыделения провода не хватает и он будет нагреваться до разрушения.

Критерии оценки:

- Получено выражение для электрической мощности - 1 балл
- Получено выражение для температуры или разности температур - 1 балл.
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Задача 3.2.3 (3 балла)



В цепи, показанной на рисунке сопротивление реостата может меняться от 0 (нижнее положение ручки) до 100кОм (верхнее положение). Когда ручка находится в верхнем положении, амперметр показывает I_1 = 0,16 А , а когда в нижнем - I_2 = 0,25 А. Напряжение на клеммах U = 1,6 В. Найдите величины R_1 и R_2. Сопротивление миллиамперметра пренебрежимо мало.

РЕШЕНИЕ:

Можно увидеть, что эта схема представляет собой мост с реостатом посередине.

Когда реостат не имеет сопротивления, такая схема представляет собой последовательно соединенные параллельные группы. Общее сопротивление такой цепи $R_0 = \dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$. Когда же реостат имеет сопротивление в 100кОм ток через него практически не течет и цепь представляет собой две параллельные группы последовательно соединенных сопротивлений. Общее сопротивление такой цепи $R_{100k} = \dfrac{R_1 + R_2}{2}$

Тогда:

$I_1 = \dfrac{2U}{R_1 + R_2}$, а $I_2 = \dfrac{U(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}$. Из этих уравнений, исключив например R_2, выразив из первого уравнения, получим:

$$I_1I_2R_1^2 - 2UI_2R_1 + U^2 = 0$$

Решив данное квадратное уравнение получим:

$$R_1 = \frac{U}{I_1I_2}\left(I_2 \pm \sqrt{I_2(I_2 - I_1)}\right),\ R_2 = \frac{U}{I_1I_2}\left(I_2 \mp \sqrt{I_2(I_2 - I_1)}\right)$$

В силу симметрии схемы пара знаков может быть выбрана любым образом.

Значение сопротивлений равны: 16Ом и 4Ома.

Критерии оценки:

- Замечено, что схема представляет собой мост - 0,5 балла
- Выражены токи через закон Ома- 0,5 балла.
- Получено квадратное уравнение - 1 балл
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Задача 3.2.4 (3 балла)

В вакуумной лампе используется вольфрамовая нить диаметром d_1 = 2 мм и длиной l = 16,7 см. К лампе подводят напряжение и медленно его повышают. При напряжении U_1 = 625В нить перегорает. Какова температура горения вольфрама? Считайте, что сопротивление вольфрама прямо пропорционально абсолютной температуре *T*. Мощность теплового излучения с единицы площади поверхности нити можно считать равной σT^4 (здесь $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) – постоянная Стефана–Больцмана). Удельное сопротивление вольфрама 0,055Ом*мм^2/м при 20°C.

РЕШЕНИЕ:

Поскольку изменения происходят медленно можно считать, что система находится в тепловом равновесии. Тогда тепло выделяющееся на нити равно энергии излучения выделяющейся с поверхности нити.

Выделяющаяся тепловая мощность равна $Q = \dfrac{U^2}{R}$, где $R = \dfrac{\rho L}{S}\cdot\dfrac{T}{T_0} = \dfrac{4\rho L T}{\pi d_1^{\,2} T_0}$.

Мощность излучения $W = \sigma T^4 \pi d_1 l$

Приравнивая и выражая *T* получим:

$$T = \left(\frac{U^2 d_1 T_0}{4\rho\sigma l^2}\right)^{\frac{1}{5}} = 3719\,\text{K}.$$

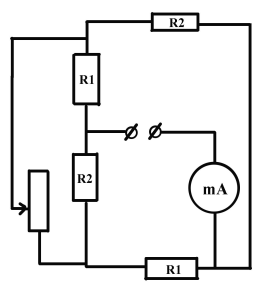
Реальная температура плавления вольфрама 3695К

Критерии оценки:

- Записано выражение для выделившейся энергии - 0,5 балла
- Записано выражение для лучистой энергии - 0,5 балла.
- Получен ответ - 2 балла
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

3.3. Задачи по физике (10-11 класс)

Задача 3.2.1 (3 балла)



В цепи, показанной на рисунке сопротивление реостата может меняться от 0 (нижнее положение ручки) до 100кОм (верхнее положение). Когда ручка находится в верхнем положении, амперметр показывает $I_1 = 0{,}16$ А , а когда в нижнем - $I_2 = 0{,}25$ А. Напряжение на клеммах U = 1,6 В. Найдите величины R_1 и R_2. Сопротивление миллиамперметра пренебрежимо мало.

РЕШЕНИЕ:

Можно увидеть, что эта схема представляет собой мост с реостатом посередине.

Когда реостат не имеет сопротивления, такая схема представляет собой последовательно соединенные параллельные группы. Общее сопротивление такой цепи $R_0 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$. Когда же реостат имеет сопротивление в 100кОм ток через него практически не течет и цепь представляет собой две параллельные группы последовательно соединенных сопротивлений. Общее сопротивление такой цепи $R_{100k} = \frac{R_1 + R_2}{2}$

Тогда:

$I_1 = \frac{2U}{R_1 + R_2}$, а $I_2 = \frac{U(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}$. Из этих уравнений, исключив например R_2, выразив из первого уравнения, получим:

$$I_1I_2R_1^2 - 2UI_2R_1 + U^2 = 0$$

Решив данное квадратное уравнение получим:

$$R_1 = \frac{U}{I_1I_2}\left(I_2 \pm \sqrt{I_2(I_2 - I_1)}\right),\ R_2 = \frac{U}{I_1I_2}\left(I_2 \mp \sqrt{I_2(I_2 - I_1)}\right)$$

В силу симметрии схемы пара знаков может быть выбрана любым образом.

Значение сопротивлений равны: 16Ом и 4Ома.

Критерии оценки:

- Замечено, что схема представляет собой мост - 0,5 балла
- Выражены токи через закон Ома- 0,5 балла.
- Получено квадратное уравнение - 1 балл
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Задача 3.3.2 (3 балла)

Юный исследователь Майкл последовательно подключил к электрической сети школьного кабинета физики аккумулятор и измерил получившееся напряжение вольтметром. Вольтметр, рассчитанный на измерение как постоянного, так и переменного тока показал 44.9В. После этого Майкл измерил тем же вольтметром напряжение отдельно в сети школьного кабинета и на аккумуляторе. В школьной сети вольтметр показал 42В. Что показал вольтметр при подключении к аккумулятору?

РЕШЕНИЕ:

Такой вольтметр показывает среднее эффективное значение. $U_{эфф} = \sqrt{\langle U^2 \rangle}$.

Т.к. при последовательном соединении напряжения переменного источника и постоянного аккумулятора сложатся: $U = U_A \cos \omega t + U_{акк}$. При этом надо иметь в виду, что напряжение на аккумуляторе $U_{акк}$ вольтметр показывает правильно, а вот в переменной цепи гармонического тока вольтметр показывает действующее значение, отличающееся от амплитудного в $\sqrt{2}$ раз. $U_A = \sqrt{2} U_{пер} = \sqrt{2} \cdot 44.9$ В.

Тогда $U^2 = 2U_{пер}^2 \cos^2 \omega t + U_{акк}^2 + 2U_{пер} U_{акк} \cos \omega t$. При усреднении $\cos^2$ дает за период $\frac{1}{2}$, в то время как среднее значение cos равно нулю.

$$\langle U^2 \rangle = 2U_{пер}^2 \cdot \frac{1}{2} + U_{акк}^2 + 2U_{пер} U_{акк} \cdot 0 = U_{пер}^2 + U_{акк}^2, \text{ тогда}$$

$$U_{акк} = \sqrt{\langle U^2 \rangle - U_{пер}^2} = 16 \text{ В}$$

Критерии оценки:

- Записано, что при последовательном соединении напряжения складываются - 0,5 балла
- Записано выражение для общего напряжения - 0,5 балла.
- Учтено, что вольтметр измеряет эффективное напряжение - 1 балл
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Задача 3.3.3 (3 балла)

Гидроэлектростанция построена на плотине высотой 50м. Известно, что потери на тепло при передачи мощности со станции в город на двухпроводной линии не превышают 2%, если напряжение в линии 10кВ. Расстояние до города 10км, а сечение использованного медного провода 60 мм^2 . Определите расход воды этой гидроэлектростанцией, если КПД генераторов 95%. Удельное сопротивление меди равно $1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м,

РЕШЕНИЕ:

Высоковольтные линии нужны для того, чтобы снизить потери при передаче электроэнергии.

Пусть коэффициент потери $\alpha = \frac{I^2 R}{N_0}$, т.е. отношению мощности теряемой на проводах к полезной мощности. При этом $I = \dfrac{N_0}{U_0}$, т.е. отношению номинальной мощности к номинальному напряжению. Тогда $\alpha = \dfrac{N_0 R}{U_0^2}$.

Вычислим сопротивление провода $R = \dfrac{\rho 2L}{S}$, т.к. два провода, тогда электрическая мощность нашей электростанции должна быть: $W = \dfrac{\alpha U_0^2}{R}$, а механическая в свою очередь $N = \dfrac{W}{\eta} = \dfrac{\alpha U_0^2}{\eta R}$, а механическая мощность как раз и определяет расход воды:

$N = \dfrac{mgH}{t}$, откуда $\dfrac{m}{t} = \dfrac{N}{gH} = 737$ кг/с или 0,737м^3/с.

Критерии оценки:

- Получено выражение для электрической мощности - 1 балл
- Получено выражение для механической мощности - 1 балл.
- Получен ответ - 1 балл
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла

Решение 3.3.4 (3 балла)

Использованный в юным техником Николой в своей схеме провод имеет диаметр d_1 = 0.4 мм. длиной L = 1 м с оплеткой ПВХ толщиной d_1 = 0.15 мм. В процессе использования установки напряжение на проводе постепенно повышалось. При напряжении 14В Николай измерил температуру оплетки провода и обнаружил, что она равна 62˚С. Можно ли продолжать повышать напряжение? Удельное сопротивление меди равно 1,72·10^{-8} Ом·м, температура плавления меди 1084˚С, температура возгорания оплетки 454˚С, коэффициент теплопроводности материала оплетки 0,19Вт/м·˚С. Считайте, что сопротивление меди зависит линейно от абсолютной температуры.

РЕШЕНИЕ:

Выделяющаяся тепловая мощность равна $Q = \dfrac{U^2}{R}$, где $R = \dfrac{\rho L}{S} \cdot \dfrac{T}{T_0} = \dfrac{4\rho LT}{\pi d_1{}^2 T_0}$. С другой стороны, тепловой поток обеспечивающий теплоотвод равен

$$\Phi = \eta \frac{S_{пов}}{d_2}\left(T - T_1\right) = \eta \frac{\pi d_1 L}{d_2}\left(T - T_1\right).$$

Приравняв эти два значения получим

$T^2 + TT_1 + \frac{U^2 d_1 d_2 T_0}{4\rho L^2 \eta} = 0$, откуда T= 707,5 = 434.5˚C

Видно, что некоторый запас для повышения напряжения еще есть

Критерии оценки:

- Получено выражение для выделяющегося тепла - 0,5 балла
- Получено выражение для теплового потока- 0,5 балла.
- Записано квадратное уравнение - 1 балл
- Получена температура внутри оплетки - 0,5 баллов
- Сделан правильный вывод - 0,5 баллов.
- Если решения нет, но приведены разумные рассуждения в направлении решения - 0,5 балла