

9 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $2x^2 + 4x + 1 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два вещественных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}/2$. Однако, если произвести перестановку первого и второго коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $4x^2 + 2x + 1 = 0$, которое уже не имеет ни одного вещественного корня.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для любой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{100} ?

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В некоем городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из двух партий A и B (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A и B соответственно 55% и 45%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 10 баллов

В некоей стране действует прогрессивный подоходный налог (по ставкам, представленным в таблице ниже). Работник получает зарплату S и хочет попросить прибавки зарплаты на 10%. При какой зарплате S это стоит делать (то есть приведёт к увеличению реального дохода работника)? (Замечание: зарплата исчисляется в целых числах)

Ежемесячный доход	Ставка налога
до 10000	5%
от 10001 до 20000	10%
от 20001 до 30000	15%
от 30001 до 40000	20%
от 40001 до 50000	25%
более 50001	30%

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий остроугольный треугольник является равносторонним.

Доказательство:

Возьмем произвольный остроугольный треугольник $\triangle ABC$ и проведем биссектрису BD угла $\angle ABC$ (см. рис. 1). Построим серединный перпендикуляр EO к стороне AC , где O – точка пересечения с биссектрисой BD (см. рис. 2). Опустим из O перпендикуляры на стороны AB и BC ; соединим O с вершинами A и C (см. рис. 3). По построению $|OA| = |OC|$. Имеем: $\triangle OFB = \triangle OGB$ по стороне OB и двум углам; следовательно, $|BF| = |BG|$ и $|OF| = |OG|$. Также имеем: $\triangle OFA = \triangle OGC$, так как эти треугольники прямоугольные и $|OF| = |OG|$, $|OA| = |OC|$; следовательно, $|FA| = |GC|$. Поэтому $|BA| = |BF| + |FA| = |BG| + |GC| = |BC|$, то есть $\triangle ABC$ является равнобедренным. Утверждение теоремы, является следствием из приведённого доказательства: вместо вершины B можно было выбрать вершину A и показать, что $|AB| = |AC|$. Поэтому $|AB| = |BC| = |CA|$, что и требовалось доказать.

