Innopolis Open

Олимпиада по математике Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

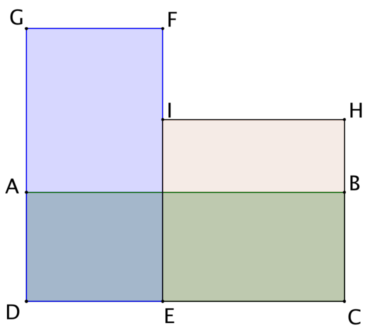
$$\delta=\arccos \left(\left(\sin 2537^{\circ}+\sin 2538^{\circ}+\cdots+\sin 6137^{\circ}\right)^{\cos 2520^{\circ}+\cos 2521^{\circ}+\cdots+\cos 6120^{\circ}}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 5 нулями и имеют ровно по 42 делителя. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 15, $\sin \alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 40 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 40 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=53$.

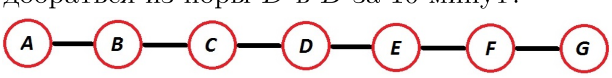


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{2}+xy+y^{2}=75, \\
y^{2}+yz+z^{2}=16, \\
z^{2}+xz+x^{2}=91.
\end{array}\right.$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 10 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2018}+(x-y-z)^{2018}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-5)^2+(y-6)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 2.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

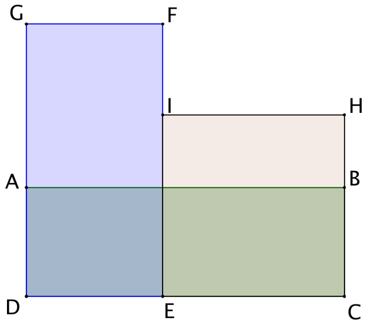
$$\delta = \arccos\left(\left(\sin\ 2539^\circ + \sin\ 2540^\circ + \cdots + \sin\ 6139^\circ\right)^{\cos\ 2520^\circ + \cos\ 2521^\circ + \cdots + \cos\ 6120^\circ}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 7 нулями и имеют ровно по 72 делителя. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 38 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 38 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 47$.

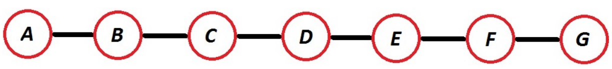


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 108, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 124. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 12 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2020}+(x-y-z)^{2020}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-6)^2+(y-7)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 3.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

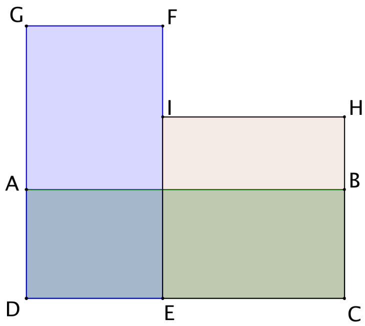
$$\delta=\arccos\left(\left(\sin 2541^{\circ}+\sin 2542^{\circ}+\cdots+\sin 6141^{\circ}\right)^{\cos 2520^{\circ}+\cos 2521^{\circ}+\cdots+\cos 6120^{\circ}}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 9 нулями и имеют ровно по 110 делителей. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 37 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 37 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=43$.

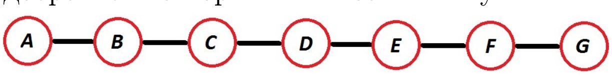


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases}x^{2}+xy+y^{2}=147,\\ y^{2}+yz+z^{2}=16,\\ z^{2}+xz+x^{2}=163.\end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 14 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2022}+(x-y-z)^{2022}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-7)^2+(y-8)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open

Олимпиада по математике

Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 4.

1. (**5 баллов**) Найдите градусную меру угла

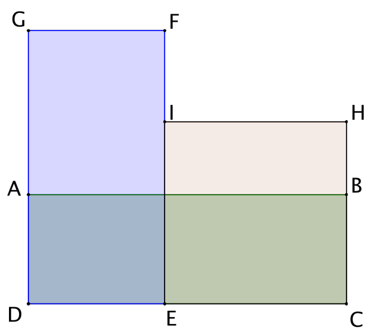
$$\delta = \arccos\left(\left(\sin\ 2903^\circ + \sin\ 2904^\circ + \cdots + \sin\ 6503^\circ\right)^{\cos\ 2880^\circ + \cos\ 2881^\circ + \cdots + \cos\ 6480^\circ}\right)$$

2. (**5 баллов**) Два различных натуральных числа заканчиваются 8 нулями и имеют ровно по 90 делителей. Найдите их сумму.

3. (**7 баллов**) На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$?

4. (**7 баллов**) На доске записано 39 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 39 минут?

5. (**8 баллов**) Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 37$.

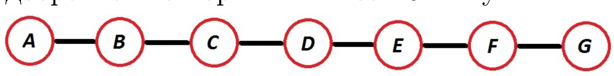


6. (**8 баллов**) Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 36, \\ z^2 + xz + x^2 = 111. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

7. (**10 баллов**) Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 16 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2024}+(x-y-z)^{2024}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-8)^2+(y-9)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 5.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

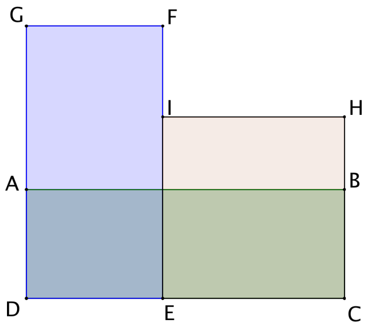
$$\delta = \arccos\left((\sin\ 2905^\circ + \sin\ 2906^\circ + \cdots + \sin\ 6505^\circ)^{\cos\ 2880^\circ + \cos\ 2881^\circ + \cdots + \cos\ 6480^\circ}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 6 нулями и имеют ровно по 56 делителей. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 45 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 45 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 31$.

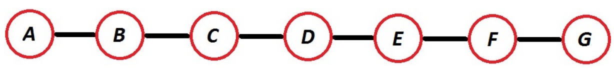


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 49, \\ z^2 + xz + x^2 = 124. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 18 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2026}+(x-y-z)^{2026}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-9)^2+(y-10)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 6.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

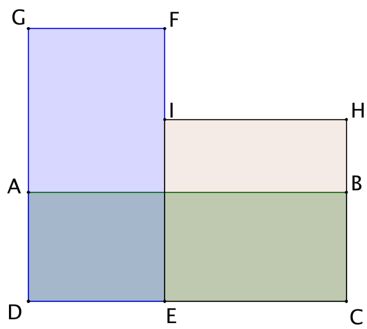
$$\delta=\arccos \left(\left(\sin 2907^{\circ}+\sin 2908^{\circ}+\cdots+\sin 6507^{\circ}\right)^{\cos 2880^{\circ}+\cos 2881^{\circ}+\cdots+\cos 6480^{\circ}}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 5 нулями и имеют ровно по 42 делителя. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 28, $\sin \alpha=\frac{\sqrt{45}}{7}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 46 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 46 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=29$.

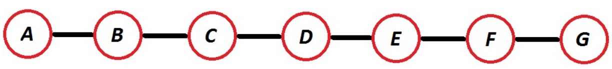


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{2}+xy+y^{2}=75, \\
y^{2}+yz+z^{2}=64, \\
z^{2}+xz+x^{2}=139.
\end{array}\right.$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 20 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2028}+(x-y-z)^{2028}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-10)^2+(y-11)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 7.

1. (**5 баллов**) Найдите градусную меру угла

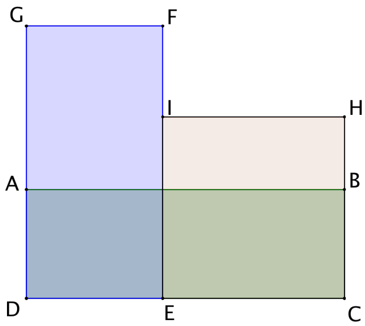
$$\delta=\arccos\left(\left(\sin 3269^{\circ}+\sin 3270^{\circ}+\cdots+\sin 6869^{\circ}\right)^{\cos 3240^{\circ}+\cos 3241^{\circ}+\cdots+\cos 6840^{\circ}}\right)$$

2. (**5 баллов**) Два различных натуральных числа заканчиваются 7 нулями и имеют ровно по 72 делителя. Найдите их сумму.

3. (**7 баллов**) На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 21, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{40}}{7}$?

4. (**7 баллов**) На доске записано 47 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 47 минут?

5. (**8 баллов**) Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=23$.

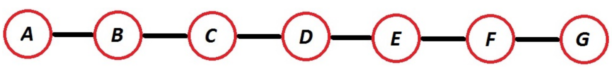


6. (**8 баллов**) Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^{2}+xy+y^{2}=108, \\ y^{2}+yz+z^{2}=64, \\ z^{2}+xz+x^{2}=172. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

7. (**10 баллов**) Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 22 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2030}+(x-y-z)^{2030}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-11)^2+(y-12)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open

Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 8.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

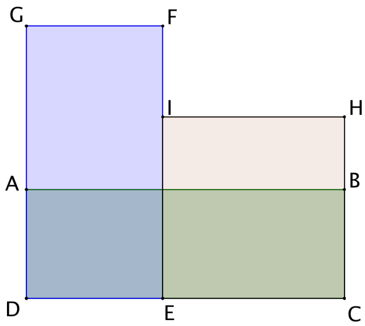
$$\delta = \arccos\left(\left(\sin 3271^\circ + \sin 3272^\circ + \cdots + \sin 6871^\circ\right)^{\cos 3240^\circ + \cos 3241^\circ + \cdots + \cos 6840^\circ}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 9 нулями и имеют ровно по 110 делителей. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 14, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 48 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 48 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 19$.

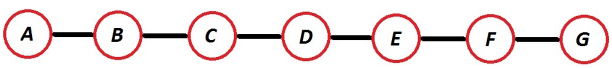


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 108, \\ y^2 + yz + z^2 = 49, \\ z^2 + xz + x^2 = 157. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 24 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2032}+(x-y-z)^{2032}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-12)^2+(y-13)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z)\cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 9.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

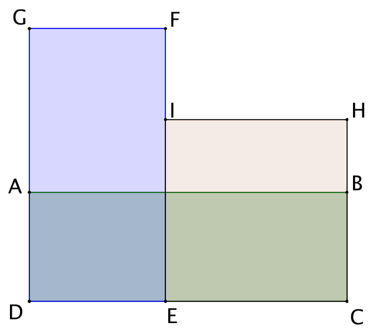
$$\delta=\arccos \left(\left(\sin 2193^{\circ}+\sin 2194^{\circ}+\cdots+\sin 5793^{\circ}\right)^{\cos 2160^{\circ}+\cos 2161^{\circ}+\cdots+\cos 5760^{\circ}}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 8 нулями и имеют ровно по 90 делителей. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB=\angle OMC=\alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 16, $\sin \alpha=\frac{\sqrt{55}}{8}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 49 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 49 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC=17$.

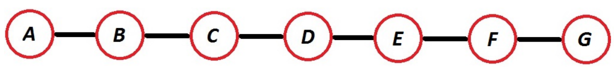


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
x^{2}+xy+y^{2}=108, \\
y^{2}+yz+z^{2}=9, \\
z^{2}+xz+x^{2}=117.
\end{array}\right.$$

Найдите значение выражения $xy+yz+xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 26 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2034}+(x-y-z)^{2034}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-13)^2+(y-14)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

11 класс, вариант 10.

1. **(5 баллов)** Найдите градусную меру угла

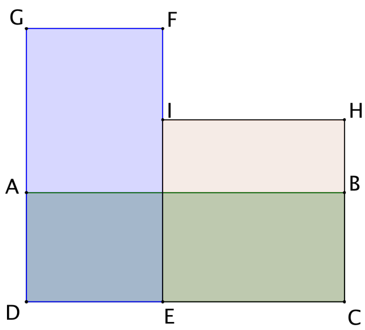
$$\delta = \arccos\left(\left(\sin\ 2195^\circ + \sin\ 2196^\circ + \cdots + \sin\ 5795^\circ\right)^{\cos\ 2160^\circ + \cos\ 2161^\circ + \cdots + \cos\ 5760^\circ}\right)$$

2. **(5 баллов)** Два различных натуральных числа заканчиваются 6 нулями и имеют ровно по 56 делителей. Найдите их сумму.

3. **(7 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 16, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$?

4. **(7 баллов)** На доске записано 50 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 50 минут?

5. **(8 баллов)** Прямоугольники $ABCD, DEFG, CEIH$ имеют равные площади и целочисленные стороны. Найдите DG, если $BC = 13$.

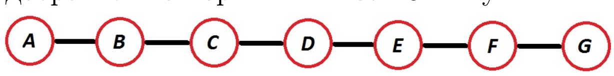


6. **(8 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 147, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 156. \end{cases}$$

Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

7. **(10 баллов)** Семь кротовых нор A, B, C, D, E, F, G последовательно соединены шестью тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы D в B за 28 минут?



8. **(10 баллов)** В выражении $(x+y+z)^{2036}+(x-y-z)^{2036}$ раскрыли скобки и привели подобные члены. Сколько получилось одночленов $x^a y^b z^c$ с коэффициентом отличным от нуля?

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Найдите все значения x и y, для которых выполняется равенство:

$$(x-14)^2+(y-15)^2+(x-y)^2=\frac{1}{3}.$$

10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x, y, z) \cdot xyz$ – квадрат натурального числа.